Л.А.Сена

ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ИХ РАЗМЕРНОСТИ

Л. А. Сена

ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ИХ РАЗМЕРНОСТИ

Учебно-справочное руководство

Издание третье, переработанное и дополненное

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.3
С31
УДК 53(083)

Сена Л.А. **Единицы физических величин и их размерности**: Учебно-справочное руководство. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с., ил.
ISBN 5-02-013848-7

Изложены принципы построения систем единиц, а также основы теории размерностей. Наряду с описанием СИ дано представление о других системах единиц, а также о некоторых внесистемных единицах, имеющих практическое применение. Особое внимание уделено методам перевода единиц из одной системы в другую. Новое издание переработано и обновлено по сравнению с предыдущим изданием с учетом действующего ГОСТ 8.417–81 (СТ СЭВ 1052–78) "Единицы физических величин".

Для студентов и аспирантов вузов, а также научных работников, инженеров и преподавателей физики в общеобразовательной и профессиональной школах.

Табл. 12. Ил. 34. Библиогр. 35 назв.

Рецензент
кандидат технических наук *П.Н. Селиванов*

$С \frac{1704010000 - 113}{053(02)\text{-}88}$ 127-88

ISBN 5-02-013848-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание книги заметным образом отличается от предыдущего. Хотя сохранилась структура первых двух изданий, а также основная цель книги – служить учебно-справочным пособием для студентов вузов, тем не менее новое, третье издание потребовало довольно большой работы. Особенно это относится к содержащемуся в книге справочному материалу. Это связано с появлением новых документов, относящихся к единицам физических величин. Первый из них – решение Международного союза чистой и прикладной физики – Symbols, Units and Nomenclature in Physics: Document U.I.P. 20(1978), I.U.P.A.P., S.U.N., Commission, содержащее обширные рекомендации по обозначениям, единицам измерения и терминологии в физике*). В 1978 г. был утвержден стандарт СЭВ (СТ СЭВ 1052–78) "Единицы физических величин". Этот стандарт лег в основу Государственного стандарта СССР – ГОСТ 8.417–81, в котором учтены также рекомендации XVI Генеральной конференции по мерам и весам (1979 г.).

Согласно этим стандартам основной системой единиц, которая должна применяться при проведении практических измерений, в технической документации, договорно-правовых отношениях, учебном процессе, устанавлива-

---

*) Это решение опубликовано на русском языке: УФН. – 1979. – Т. 129. – С. 290.

ется Международная система единиц (СИ). В научных исследованиях теоретического характера допускается применение других систем, в частности СГС и систем, построенных на фундаментальных физических постоянных (так называемых естественных систем); разрешено также применение и некоторых внесистемных единиц.

В 1983 г. состоялась XVII Генеральная конференция по мерам и весам, важнейшим решением которой явилось новое определение метра, связывающее его со скоростью света и стандартным определением секунды. Указанные документы потребовали тщательного пересмотра соответствующих разделов книги, с тем чтобы привести их в соответствие с новыми определениями, обозначениями и т.п.

Учитывая названные выше документы, в книге в качестве основной принята Международная система единиц (СИ). Однако при изложении единиц электрических и магнитных величин представилось целесообразным, как и в предыдущих изданиях, начинать с СГС. Такой подход позволяет избежать трудностей методического характера и легче воспринимается студентами. Практически полностью исключена система МКГСС (техническая). Она упоминается лишь там, где излагаются возможные способы построения систем единиц и сравниваются характеристики существующих систем. Сокращение числа внесистемных единиц произведено с известной осторожностью, учитывая "живучесть" некоторых из них.

Практически целиком пришлось переписать § 9.5, посвященный единицам ионизирующих излучений, в связи с появлением ГОСТ 15484 – 81 "Ионизирующие излучения и их измерения".

Как и во втором издании, большое внимание уделено размерностям, в частности вопросу о физической сущности размерностей. Приводятся две точки зрения – М. Планка и А. Зоммерфельда – и более основательно аргументируется точка зрения М. Планка. Замечу, что ее разделяет подавляющее большинство физиков.

Подверглись полному пересмотру содержащиеся в книге таблицы. Добавлены новая таблица наименований, обозначений и размерностей единиц физических величин в СИ, таблицы единиц электромагнитного и ионизирующего излучений.

В процессе подготовки настоящего издания было получено много советов и замечаний от работников вузов, исследовательских и промышленных предприятий и издательств. Всем им выражаю большую благодарность. Особенно я благодарен рецензенту – начальнику отдела международных работ по метрологии НПО "ВНИИМ им. Д.И. Менделеева" П.Н. Селиванову.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Тридцать лет назад мною была написана небольшая книжка "Единицы измерения физических величин". В 1948 г. она вышла вновь в полностью переработанном виде и затем с небольшими исправлениями и уточнениями переиздавалась в 1949 и 1951 гг.

Потребность в такого рода учебном пособии (а книга была написана именно как учебное пособие для студентов) была в то время весьма велика.

Предлагаемая книга коренным образом отличается от "Единиц измерения физических величин" и преследует другие цели.

Основная задача книги отражена в ее заглавии, о котором следует сказать особо. Внесение в заглавие книги слова "размерности" подчеркивает то обстоятельство, что наряду с вопросом о системах единиц большое внимание уделено системам размерностей.

Для того чтобы формулы размерности не оставались абстрактными, в книге даются краткие сведения о применении этих формул, в частности в методе анализа размерностей и методе подобия.

Особенно большое внимание в книге уделено общим принципам построения систем единиц и методам перевода единиц из одной системы в другую.

1969 г.

Глава 1

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О СИСТЕМАХ ОСНОВНЫХ И ПРОИЗВОДНЫХ ЕДИНИЦ

§ 1.1. Физические величины и их единицы

В науке, технике и обыденной жизни мы имеем дело с разнообразными свойствами окружающих нас тел. Эти свойства отражают процессы взаимодействия тел между собой и их воздействие на наши органы чувств. Для описания свойств вводятся физические величины, каждая из которых является качественно общей для многих объектов (физических тел, их состояний, процессов, в которых они участвуют), но в количественном отношении различной для разных объектов. Для того чтобы дать меру физической величине, мы устанавливаем ее единицу. **Единица определенной физической величины представляет собой значение данной величины, которое по определению считается равным 1.** Операция, с помощью которой мы узнаем числовое значение той или иной величины для определенного объекта, представляет собой измерение этой величины.

Повседневно нам приходится иметь дело со всевозможными измерениями. Измерения таких величин, как длина, площадь, объем, время, масса, известны человеку с незапамятных времен и встречаются на каждом шагу. Без них невозможны были бы торговля, строительство зданий, раздел земли и т.п.

Особенно велико значение измерений в технике и научных исследованиях. Такие науки, как математика, механика, физика, стали называться точными именно потому, что благодаря измерениям они получили возможность устанавливать точные количественные отношения, выражающие объективные законы природы.

Нередко результат измерений, произведенных в том или ином научном опыте, давал решающий ответ на принципиальный вопрос, поставленный наукой, позволял сделать выбор между двумя теориями, а подчас даже приводил к возникновению новой теории или даже новой отрасли науки. Так, измерение скорости распространения света в различных средах способствовало утверждению волновой теории света. Измерение отклонения катодных лучей в магнитном и электрическом полях привело к открытию электрона; измерение распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела послужило причиной зарождения теории квантов.

Немаловажную роль играет точность измерения. Казалось бы, ничтожные отклонения атомных масс от целых чисел (по атомной шкале) определяют энергетический баланс ядерных реакций. Яркая иллюстрация важности точности измерений получена в последние годы. С помощью открытого в 1962 г. так называемого эффекта Джозефсона*) были с весьма большой точностью измерены некоторые атомные постоянные, что позволило разрешить противоречия, существовавшие на протяжении долгого времени в квантовой электродинамике.

Ни одна отрасль техники – от строительной механики и до сложных химических производств, от радиотехники и до ядерной энергетики – не могла бы существовать без развернутой системы измерений, определяющей размеры и свойства выпускаемой продукции, устанавли-

*) Подробнее об эффекте Джозефсона см. § 7.6.

вающей условия контроля над механизмами и процессами. Без измерений, причем точных измерений, была бы невозможна стандартизация.

Особенно возросла роль измерений в связи с развитием автоматического управления, так как автоматические системы и счетно-решающие устройства должны получать в качестве исходных данных информацию о различных величинах, определяющих ход регулируемого процесса: температуре, давлении газа, скорости потока жидкости и т.д. При этом результат измерения не обязательно выдается в виде числа, а преобразуется в команду, управляющую рабочими механизмами.

Огромное разнообразие явлений, с которыми приходится встречаться в технике и научном исследовании, делает соответственно весьма широким и круг величин, подлежащих измерению. Напряжение в электрической сети, вязкость смазочного масла, упругость стали, показатель преломления стекла, мощность двигателя, сила света лампы, длина электромагнитной волны радиостанции — вот лишь некоторые из бесчисленного множества величин, подвергающихся измерению в науке и технике.

Чрезвычайно разнообразны также и методы измерений. Простые измерительные линейки и сложные оптические приборы служат для измерения длины; магнитоэлектрические, электромагнитные и тепловые приборы измеряют напряжение и силу тока; манометры различных типов измеряют давление и т.д. Однако независимо от применяемого способа всякое измерение любой физической величины сводится к экспериментальному определению отношения данной величины к другой подобной, принятой за единицу. Так, например, измеряя длину стола, мы определяем отношение этой длины к длине другого тела, принятой нами за единицу длины (например, метровой линейки); взвешивая кусок хлеба, узнаем, во сколько раз его масса больше или меньше массы другого тела – определенной единичной гири "килограмма" или "грамма".

Измерить какую-либо величину – это значит найти опытным путем отношение данной величины к соответствующей единице измерения. Это отношение и является мерой интересующей нас величины.

Так как само понятие "больше – меньше" применимо лишь к однородным величинам, очевидно, что и сравнивать можно только однородные величины. Можно сравнивать высоту здания с расстоянием между городами, силу натяжения пружины с весом гири, но бессмысленно ставить вопрос о том, превышает ли скорость поезда длину карандаша или объем стакана – массу чернильницы. Столь же нелепо, разумеется, пытаться измерить скорость единицей массы или площадь – единицей силы.

Для того чтобы измерение имело однозначный характер, необходимо, чтобы отношение двух однородных величин не зависело от того, какой единицей измерены эти величины. Подавляющее большинство физических величин удовлетворяет этому условию, которое обычно называют условием *абсолютного значения относительного количества.* Это условие может быть соблюдено при наличии по крайней мере принципиальной возможности такого количественного сравнения двух однородных величин, в результате которого получается число, выражающее отношение этих величин.

Встречаются, однако, подчас такие свойства, которые не удается охарактеризовать величиной, удовлетворяющей указанному требованию. В этих случаях вводят некоторые условные числовые характеристики, которые уже нельзя рассматривать как единицы. С развитием измерительной техники иногда возникает возможность замены таких условных характеристик "настоящими" единицами. Так, например, для определения скорости ветра раньше служила условная шкала "силы ветра" Бофорта, которую затем заменили измерением скорости ветра в метрах в секунду. В настоящее время каждому баллу шкалы Бофорта приведен в соответствие определенный интервал скорости ветра. К числу таких условных величин относится и твердость материалов, для сравнения которой существуют различные шкалы, между которыми, кстати сказать, нет даже вполне однозначного соответствия. Хотя эти условные числовые характеристики физических свойств, строго говоря, и не являются единицами, они позволяют производить качественное сравнение величин, что в ряде случаев достаточно удовлетворительно для практических целей. Для удобства читателя наиболее употребительные характеристики такого типа также рассматриваются в этой книге.

Вопрос о том, как определить единицу измеряемой величины, вообще говоря, может быть решен произвольно. И действительно, история материальной культуры знает громадное число разнообразных единиц, в особенности для измерения длины, площади, объема и массы. Это разнообразие единиц сохранилось в некоторой степени и до настоящего времени.

Наличие большого числа разнообразных единиц создавало, естественно, затруднения в международных торговых отношениях, обмене результатами научных исследований и т.п. Вследствие этого ученые разных стран пытались установить общие единицы, которые действовали бы во всех странах. При этом, разумеется, не ставилась задача для каждой величины устанавливать одну-единственную единицу. Поскольку на практике приходилось встречаться с большими и малыми значениями измеряемых величин, целесообразно было иметь соответственно единицы различного размера – крупные и мелкие, с тем условием, чтобы переход от одних единиц к другим осуществлялся возможно более просто. Такими единицами стали единицы метрической системы мер, созданной в эпоху Великой французской революции, – системы, которая, по мысли ее авторов, должна была служить "на все времена, для всех народов, для всех стран" ("pour tous les temps, pour tous les peuples, pour tous les pays").

С середины XIX в. метрическая система стала широко распространяться, была узаконена почти во всех странах и легла в основу построения единиц, служащих для измерения различных величин в физике и смежных науках. Отличительным свойством метрической, или, как ее иногда называют, десятичной, системы мер является то, что разные единицы одной и той же величины относятся друг к другу, как целые (положительные или отрицательные) степени десяти.

Несмотря на явные преимущества и удобства метрической системы наряду с ней в ряде стран применялись и применяются свои, местные единицы, а в Великобритании, США и некоторых других странах до недавнего времени метрическая система не являлась государственной и использовалась, и то не всегда, лишь в научных работах. В настоящее время большинство этих стран постепенно переходят на метрическую систему.

То обстоятельство, что для измерения одной и той же величины применяется несколько единиц, требует умения переходить от одних единиц к другим. Иначе говоря, нужно уметь определять число, выражающее данную величину одной единицей, если известно число, выражающее ее другой. Если данная величина A, будучи измерена единицей α_1, дает число a_1, то можно написать

$$A/\alpha_1 = a_1.$$

Если при измерении той же величины A единицей α_2 мы получим число a_2, то соответственно

$$A/\alpha_2 = a_2,$$

или же

$$A = \alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2.$$

Сравнивая эти выражения, можно записать

$$a_1/a_2 = \alpha_2/\alpha_1. \tag{1.1}$$

Эта формула выражает хорошо известное положение, что *числовое значение физической величины и ее единица находятся в обратном отношении,* т.е. во сколько раз крупнее единица данной величины, во столько раз меньше число, которым эта величина выражается. Так, например, если рост человека, измеренный в сантиметрах, выражается числом 175, то тот же рост, измеренный в дециметрах, будет выражаться числом 17,5. Это простое положение многие забывают, когда речь идет о более сложных или менее знакомых величинах. Поэтому, записывая числовое значение какой-либо величины, мы обязательно рядом с числом должны поставить символ единицы, которой эта величина измерена. Так, например, мы пишем: "рост человека равен 17,5 дм" или же "рост человека равен 175 см". Выражения 17,5 дм и 175 см представляют собой равноценные обозначения одной и той же величины – длины. Поэтому можно написать

17,5 дм = 175 см.

§ 1.2. Прямые и косвенные измерения

Как мы уже говорили, всякое измерение заключается в сравнении данной величины с другой, однородной величиной, принятой за единицу. Однако далеко не всегда такое сравнение производится непосредственно. В большинстве случаев измеряется не сама интересующая нас величина, а другие величины, связанные с нею теми или иными соотношениями и закономерностями. Нередко для измерения данной величины приходится предварительно измерить несколько других, по значению которых вычислением определяется значение искомой величины. Так, для определения плотности измеряют объем тела и его массу, для определения скорости – пройденный путь и время и т.д.

В соответствии со сказанным все измерения делят на *прямые* и *косвенные*. Обычно при этом к прямым относят такие, при которых числовое значение измеряемой величины получается в результате одного наблюдения или отсчета (например, по шкале измерительного прибора). Однако, по существу, в большинстве таких случаев в скрытом виде имеет место также не прямое измерение, а косвенное. Действительно, различные измерительные приборы (вольтметры, амперметры, термометры, манометры и т.д.) дают показания в делениях шкалы, так что мы непосредственно измеряем лишь линейные или угловые отклонения стрелки, указывающие нам значение измеряемой величины через ряд промежуточных соотношений, связывающих отклонение стрелки с измеряемой величиной. Так, например, в магнитоэлектрическом амперметре магнитное поле, определяемое формой и размерами рамки и протекающим по ней током (который и подлежит измерению), взаимодействуя с полем магнита, создает вращающий момент; последнему противодействует момент пружины, зависящий от ее механических свойств, и рамка поворачивается на угол, при котором оба момента уравновешиваются. Таким образом, измерение электрической величины – силы тока – через ряд промежуточных звеньев сводится к угловому или линейному измерению*).

---

*) Наличие шунта вводит дополнительное промежуточное звено между подлежащим измерению током и непосредственно измеряемым отклонением стрелки.

Характерно при этом, что сведение измерения разнообразных величин к линейным и угловым измерениям имеет место в подавляющем большинстве измерительных приборов. Это не случайно, поскольку наиболее развитым из наших чувств является зрение, а следовательно, нам очень удобно и наглядно сравнивать величины, непосредственно воспринимаемые глазами. Такими, естественно, являются пространственные величины, в первую очередь дли́ны и углы. Обычно там, где не требуется особо высокой точности, и за исключением очень малых и очень больших длин, линейные измерения производятся прямым сравнением измеряемой длины с той или иной мерой; при этом определяется, сколько раз эта мера уложится в данной длине. Точно так же измерение угла может быть произведено наложением подходящей угловой меры.

Однако длины и углы отнюдь не являются единственными величинами, которые можно измерять непосредственно. Измерение площади может быть произведено наложением на измеряемую площадь соответствующим образом выбранной единицы площади, например в виде квадрата или треугольника. Для измерения объема жидкости можно воспользоваться каким-либо сосудом, объем которого принят за единицу. Промежутки времени могут быть измерены прямым счетом числа периодов какого-либо периодически чередующегося процесса (например, качания маятника или смены дня и ночи).

Однако и для измерения указанных величин часто применяют косвенные методы, и измерения площадей и объемов сводят к линейным измерениям, время отсчитывают по циферблату часов (опять-таки линейные или угловые меры!) и т.д. Если же обратиться к другим величинам, то можно без труда обнаружить, что для большинства из них мы в настоящее время и не располагаем методами прямого, непосредственного измерения, а пользуемся либо специальными измерительными приборами, которые изменение данной величины переводят в изменение других величин (в подавляющем большинстве случаев длин и углов), либо рядом промежуточных измерений, из которых искомая величина получается путем вычислений.

Измерительные приборы, переводящие измеряемую величину в отклонение стрелки, можно до некоторой степени уподобить вычислительным машинам. Сходство это в последние годы особенно усилилось в связи со все более широким распространением цифровых измерительных приборов (в том числе часов), в которых значение измеряемой величины выдается непосредственно в виде числа.

Из того факта, что практически все измерения могут быть сведены к линейным, отнюдь не следует, что сами измеряемые величины утрачивают свою качественную особенность и сводятся к длине. В действительности это лишь означает, что, поскольку все наблюдаемые в природе явления протекают в пространстве, каждое из них может быть отражено соответствующим пространственным перемещением (расширением ртути термометра, поворотом рамки электроизмерительного прибора, отклонением пучка электронов в осциллографе и т.д.).

§ 1.3. Основные и производные единицы

Ранее большинство единиц устанавливалось, как правило, совершенно независимо друг от друга. Исключение в ряде случаев составляли лишь единицы длины, площади и объема. Наоборот, основной особенностью современных единиц является то, что между единицами разных величин устанавливаются зависимости на основе законов и определений, которыми связаны между собой измеряемые величины. Таким образом, из нескольких условно выбираемых так называемых *основных* единиц строятся *производные* единицы.

Поскольку при косвенных измерениях значение искомой величины определяется по значениям других, связанных с ней величин, существует возможность установить соответствующую связь и между их единицами. Те соотношения и закономерности, которые определяют условия косвенного измерения, могут, очевидно, служить и для установления связи между основными и производными единицами.

Для того чтобы показать, каким образом это осуществляется, остановимся прежде всего на вопросе о том, какой смысл следует придавать уравнениям, выражающим связь между различными физическими величинами. Метрология различает два вида таких уравнений: *уравнения связи между величинами и уравнения связи между числовыми значениями.* Первые представляют собой соотношения в общем виде, независимо от единиц. Уравнения связи между числовыми значениями могут иметь различный вид, в зависимости от выбранных единиц для каждой из величин. В частности, в этих уравнениях могут присутствовать и некоторые коэффициенты пропорциональности. Легко видеть, что для установления единиц должны быть использованы уравнения связи между числовыми значениями.

Поясним сказанное примером, взяв для этой цели связь между площадями геометрических фигур и их линейными размерами, устанавливаемую теоремой: "отношение площадей геометрически подобных фигур равно второй степени отношения их соответственных линейных размеров". Эта связь может быть записана в следующем виде:

$$S_1/S_2 = (l_1/l_2)^2. \qquad (1.2)$$

Именно такого рода соотношения следует понимать как уравнения связи между величинами, поскольку они не зависят от выбора единиц входящих в них величин. Если под символами S_1, S_2, l_1 и l_2 понимать соответствующие величины, то конкретный физический смысл будут иметь лишь отношения S_1/S_2 и l_1/l_2. Конечно, (1.2) можно переписать в виде

$$S_1/S_2 = l_1^2/l_2^2, \tag{1.2а}$$

но при этом возникает вопрос, что обозначают выражения l_1^2 и l_2^2, т.е. вторые степени длины. Действительно, если вторая степень числа l_1/l_2, представляющего отношение длин l_1 и l_2, является также определенным числом, то для второй степени длины, т.е. произведения длины на длину, трудно предложить конкретный физический смысл.

Иначе обстоит дело, если символы, входящие в формулу (1.2), считать именованными числами, выражающими значения величин при том или ином выборе единиц этих величин, в данном случае – единиц площади и длины. Здесь каждый символ, как и вообще любое именованное число, можно трактовать как произведение отвлеченного числа на единицу данной величины, причем это число, разумеется, равно отношению величины к той, с ней однородной, значение которой принято за единицу. При таком понимании символов, входящих в выражение любой физической закономерности, к ним можно применять любые математические операции – умножения, деления, возведения в степень и т.п., а сами формулы могут быть подвергнуты различным преобразованиям. При этом действия должны производиться как над числами, так и над символами соответствующих единиц. В свете сказанного формулу (1.2) можно представить в виде

$$S_1/l_1^2 = S_2/l_2^2. \tag{1.2б}$$

Словами эту формулу можно выразить следующим образом: "для геометрически подобных фигур отношение числа, выражающего площадь фигуры, ко второй степени числа, выражающего соответствующий линейный размер фигуры, есть величина постоянная". Обозначая эту постоянную $\mathscr{K}$, можно вместо (1.2б) написать

$$S = \mathscr{K} l^2, \tag{1.3}$$

где коэффициент $\mathscr{K}$ зависит, с одной стороны, от формы измеряемой геометрической фигуры, а с другой – от выбора единиц длины и площади*).

Как было сказано, в принципе единицы длины и площади можно выбрать совершенно независимо друг от друга. Однако наличие зависимости размера площади от линейных размеров фигуры позволяет связать единицы площади с единицами длины, т.е. сделать единицу площади производной от единицы длины, а последнюю считать основной. Для этого нужно условиться принимать в качестве единицы площади площадь определенной фигуры, линейный размер которой равен некоторому условно принятому числу единиц длины. Обычно в геометрии это делается следующим образом: взяв за основу какую-либо единицу длины, например метр, принимают за единицу площади площадь квадрата, сторона которого равна выбранной единице длины, в данном случае метру. Эта единица площади называется "квадратный метр" (кв. м). Полагая в формуле (1.3) l = 1 м, можно записать

$$1\ \text{кв. м} = \mathscr{K}\,(1\ \text{м})^2, \tag{1.3a}$$

---

*) Здесь и в дальнейшем мы будем использовать символ $\mathscr{K}$ для общего обозначения коэффициента пропорциональности в формулах физических законов и определений независимо от его конкретного значения. В отдельных случаях, когда это представится целесообразным, коэффициент $\mathscr{K}$ будет снабжаться тем или иным индексом.

откуда

$$\mathcal{K} = 1\ \frac{\text{кв. м}}{\text{м}^2}\ ,$$

и формулу (1.3) представить в виде

$$S\,[\text{кв. м}] = 1\ \frac{\text{кв. м}}{\text{м}^2}\ (l\ [\text{м}])^2. \tag{1.3б}$$

Если, не меняя единиц длины и площади, аналогичным образом переписать формулу (1.3) для круга, то получим (l – длина диаметра круга)

$$S\,[\text{кв. м}] = \frac{\pi}{4}\ \frac{\text{кв. м}}{\text{м}^2}\ (l\ [\text{м}])^2, \tag{1.3в}$$

так как в этом случае коэффициент $\mathcal{K}$ будет равен $(\pi/4)$ кв. м/м^2.

Принятая связь единицы площади с единицей длины может быть сохранена и при любой другой единице длины. При этом формулу (1.3) можно переписать для квадрата в виде

$$S = l^2, \tag{1.4}$$

а для круга

$$S = \frac{\pi}{4}\,l^2. \tag{1.4а}$$

Формулы (1.4) и (1.4а) можно выразить словами следующим образом: "если за единицу площади принять площадь квадрата, сторона которого равна единице длины, то число, выражающее площадь любого квадрата, будет равно второй степени числа, выражающего длину его стороны, а число, выражающее площадь любого круга, будет равно умноженной на $\pi/4$ второй степени числа, выражающего длину диаметра круга".

Разумеется, такого рода формулировки чрезвычайно громоздки, а потому их заменяют более краткими: "площадь квадрата равна второй степени его стороны" и "площадь круга равна умноженной на $\pi/4$ второй степени его диаметра", молчаливо предполагая, что речь идет о числах, которыми выражаются соответствующие величины при надлежащем выборе их единиц.

Рассмотренный пример наглядно показывает способ, с помощью которого устанавливается производная единица. Для этого следует:

1) выбрать величины, единицы которых принимаются в качестве основных, т.е. единицы, размеры которых устанавливаются произвольно и независимо друг от друга;

2) установить размер этих единиц;

3) выбрать определяющее уравнение, связывающее величины, измеряемые основными единицами, с величиной, для которой устанавливается производная единица; при этом символы всех величин, входящих в определяющее уравнение, должны рассматриваться не как сами величины, а как их именованные числовые значения;

4) приравнять единице (или другому постоянному числу) коэффициент пропорциональности, входящий в определяющее уравнение.

Таким образом, производной является единица, размер которой связывается с размерами основных единиц уравнениями, выражающими физические законы, или определениями соответствующих величин.

В дальнейшем мы будем условно называть основными величинами величины, измеряемые основными единицами, а производными – измеряемые производными единицами. Следует особо подчеркнуть, что эти общепринятые наименования – "основные величины" и "производные величины" – ни в коем случае не следует понимать в том смысле, что первые имеют какие-то принципиальные преимущества перед вторыми. Величины, которые при одном выборе приняты за основные, при другом могут быть производными, и наоборот.

Определяющие уравнения, с помощью которых устанавливаются производные единицы, удобно записывать в виде явной функциональной зависимости производной величины от основных. Установленные описанным выше способом производные единицы могут быть далее использованы для введения новых производных единиц. Поэтому в определяющие уравнения наряду с основными величинами могут входить производные, единицы которых были установлены ранее.

Поясним сказанное примерами. Для установления единицы скорости воспользуемся определением скорости, которое можно записать в виде

$$v = \mathcal{K} \frac{dl}{dt} . \tag{1.5}$$

Для частного случая равномерного движения вместо (1.5) можно написать

$$v = \mathcal{K} \frac{l}{t} , \tag{1.5a}$$

где, как и раньше, $\mathcal{K}$ – коэффициент, зависящий от выбора единиц длины, времени и скорости. Как и в примере с установлением единицы площади, единица скорости может быть выбрана независимо от единиц длины и времени. Можно, например, как это иногда делается при изложении теории относительности, принимать за единицу скорости скорость света, а единицы длины и времени брать обычными. Можно, измеряя длину в километрах, а время в минутах, выражать скорость в принятых в мореходстве единицах скорости – узлах.

Однако на практике единица скорости определяется как производная единиц длины и времени, принимаемых в качестве основных. При этом коэффициент $\mathscr{K}$ полагается равным единице, так что единица скорости определяется как скорость такого равномерного движения, при котором за единицу времени проходится путь, равный единице длины.

Единица ускорения может быть установлена с помощью формулы, определяющей ускорение,

$$a = \mathscr{K} \frac{dv}{dt}, \tag{1.6}$$

которую для прямолинейного и равноускоренного движения можно переписать в виде

$$a = \mathscr{K} \frac{v_2 - v_1}{t}. \tag{1.6а}$$

Здесь разность $v_2 - v_1$ обозначает приращение скорости за время t. Полагая, как и раньше, $\mathscr{K} = 1$, получим производную единицу ускорения, определяемую как ускорение такого прямолинейного и равноускоренного движения, при котором в единицу времени скорость возрастает на единицу. В этом определении наряду с основной единицей (времени) используется ранее установленная производная единица (скорости).

Рассмотрим еще один пример – установление единицы силы. Как и единицы любых других величин, единица силы может быть установлена независимо от других и даже принята в качестве основной. Однако чаще всего единица силы определяется как производная на основании второго закона Ньютона. Записывая этот закон в виде

$$F = \mathscr{K} ma \tag{1.7}$$

(где m – масса материальной точки) и полагая $\mathscr{K}$ равным единице, получим определение единицы силы как такой силы, которая материальной точке массой, равной единице массы (принимаемой в качестве основной), сообщает ускорение, равное единице ускорения (определенной ранее в качестве производной единицы).

Если, например, в качестве единицы длины принять метр (м), единицы времени – секунду (с) и единицы массы – килограмм (кг), то в качестве производных единиц скорости и ускорения будем иметь метр в секунду (м/с) и метр в секунду за секунду (м/(с · с)). При этом за единицу силы принимается ньютон (Н) – сила, сообщающая точке массой один килограмм ускорение один метр в секунду за секунду. В этом случае, очевидно, коэффициент $\mathscr{K}$ может быть записан в виде

$$\mathscr{K} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}},$$

а второй закон Ньютона – в виде

$$F\ [\text{Н}] = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}}\ m\ [\text{кг}]\ a \left[\frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{с}}\right]. \qquad (1.7\text{а})$$

Если в качестве единицы длины принять сантиметр (см), массы – грамм (г), сохранив в качестве единицы времени секунду (с), то соответствующая единица силы – дина (дин) определится как сила, сообщающая точке массой один грамм ускорение один сантиметр в секунду за секунду. В этом случае коэффициент пропорциональности будет

$$\mathscr{K} = 1 \frac{\text{дин} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{г} \cdot \text{см}}$$

и второй закон Ньютона запишется в виде

$$F\ [\text{дин}] = 1 \frac{\text{дин} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{г} \cdot \text{см}}\ m\ [\text{г}]\ a \left[\frac{\text{см}}{\text{с} \cdot \text{с}}\right]. \qquad (1.7\text{б})$$

Обычно при записи формул физических уравнений опускается подобное обозначение коэффициента, содержащее, по существу, определение производной единицы, так что, например, второй закон Ньютона приобретает вид

$$F = ma. \qquad (1.7в)$$

Следует, однако, иметь в виду, что в действительности в каждой такой формуле коэффициент пропорциональности "незримо" присутствует. Забвение этого обстоятельства нередко приводит к недоразумениям и серьезным ошибкам.

Способ установления производной единицы отражается в ее наименовании и обозначении, которое строится путем группирования по обычным алгебраическим правилам единиц, на которых основано ее определение. Так образуются единицы: площади – квадратный метр $(м^2)$, ускорения – метр на секунду в квадрате или метр в секунду за секунду $(м/с^2)$ и т.д.

Исключение составляют единицы, которым присвоены собственные наименования – ньютон, паскаль и т.д. Наименования и обозначения этих единиц, так же как и наименования и обозначения основных единиц, могут входить в наименование и обозначение производной единицы. В качестве примера приведем наименование и обозначение единицы момента силы: ньютон-метр $(Н \cdot м)$.

§ 1.4. Построение систем единиц

Совокупность основных и производных единиц относящяся к некоторой системе величин и построенная в соответствии с принятыми принципами, образует систему единиц. Для построения системы единиц следует, выбрав несколько основных единиц, установить с помощью определяющих уравнений производные единицы всех остальных интересующих нас величин. Определяющие уравнения могут быть двух типов: одни, по существу, представляют собой определение новой величины — таковыми, например, являются формула ускорения (1.6) или формула работы

$$dA = \mathcal{K} F dl \cos (\widehat{F, dl}), \tag{1.8}$$

другие выражают обнаруженную экспериментально или теоретически связь между исследуемыми величинами. К закономерностям этого типа относятся: закон всемирного тяготения, закон Кулона о взаимодействии электрических зарядов и др. Такое деление уравнений на "определения" и "законы" не является абсолютным и зависит от подхода к данному конкретному вопросу. Это, однако, не играет существенной роли в определении новых единиц, поскольку в обоих случаях закономерности представляются в виде формул, связывающих данную величину с другими, для которых единицы установлены ранее.

В связи с изложенным в § 1.3 способом установления производных единиц и построения системы единиц встает естественный вопрос: в какой мере мы свободны в выборе основных величин (в частности, их числа), определяющих уравнений и коэффициентов пропорциональности? Вряд ли вызывает сомнение вопрос о произвольности выбора размера основных единиц. Существование систем, в которых принимаются в качестве основных разные единицы длины (метр и сантиметр) и разные единицы массы (килограмм и грамм), наглядно иллюстрирует наличие в принципе полной свободы в таком выборе.

Легко, далее, показать, что полная свобода имеется и в выборе коэффициентов пропорциональности в определяющих уравнениях. С этой целью вернемся к рассмотренному выше примеру с установлением единицы площади. Выбрав в качестве единицы длины метр, мы в качестве единицы площади приняли квадратный метр – площадь квадрата, сторона которого равна метру. Однако такой способ установления производной единицы площади хотя и имеет определенные практические преимущества, отнюдь не является обязательным. Можно, например, за единицу площади принять площадь круга, диаметр которого равен одному метру. Назовем эту единицу площади "круглый метр" (кр.м). Такой способ установления единицы площади равносилен замене коэффициента в формуле (1.3в) с $(\pi/4)$ кв.м/м^2 на 1 кр.м/м^2, а в формуле (1.3б) – с 1 кв.м/м^2 на $(4/\pi)$ кр.м/м^2. Соответственно формулы для площади квадрата (1.4) и площади круга (1.4а) примут вид

$$S = (4/\pi)l^2, \tag{1.9}$$

$$S = l^2. \tag{1.9а}$$

Следует заметить, что измерение площади не в квадратных, а в круглых метрах не является чем-то неестественным или, тем более, противозаконным. Речь здесь может идти только о практических преимуществах той или иной единицы *). Разумеется, если бы в качестве единицы площади вместо квадратного метра был принят круглый метр, то формулы, выражающие площади различных геометрических фигур, изменили бы свой вид. Так, например, площадь равностороннего треугольника выражалась бы формулой

$$S = (\sqrt{3}/\pi)l^2. \tag{1.9б}$$

При этом независимо от того, как определена единица площади (как квадратный метр или как круглый метр), ее обозначение будет м^2. Это показывает, что обозначение производной единицы, включающее в себя обозначения

*) Заметим, кстати, что в США круглые единицы площади применяются для измерения площадей труб, балок круглого сечения и т.д.

основных единиц, само по себе ничего не говорит о размере этой производной единицы. Уместно здесь же отметить, что общепринятость квадратных единиц площади и соответственно кубических единиц объема определила и названия второй и третьей степени чисел ("квадрат числа" и "куб числа").

В рассмотренном примере различные определяющие уравнения (площадь круга и площадь квадрата) привели лишь к изменению числовых коэффициентов в формулах, так как, по сути дела, нами была использована одна и та же геометрическая закономерность, связывающая площади подобных фигур с их линейными размерами.

Возможность выбора существенно различных определяющих уравнений для установления производной единицы одной величины мы покажем на примере установления единицы силы. Как мы уже говорили, обычно для этой цели используется второй закон Ньютона, который математически может быть представлен в виде

$$F = \mathscr{K} ma.$$

Коэффициент пропорциональности $\mathscr{K}$ в формуле (1.7), зависящий от выбора единиц входящих в формулу величин, назовем инерционной постоянной; будем обозначать его $\mathscr{K}_I$. Во всех применяемых на практике системах единиц инерционную постоянную полагают равной единице, вследствие чего и становится возможной общепринятая сокращенная формулировка второго закона Ньютона: "сила равна произведению массы на ускорение".

Оставляя в качестве основных единицы длины, массы и времени, мы для определения единицы силы не ограничены только вторым законом Ньютона. В нашем распоряжении имеется закон всемирного тяготения, согласно которому любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Этот закон можно записать в виде

$$F = \mathscr{K}_g \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.10}$$

где r – расстояние между тяготеющими точками, а $\mathscr{K}_g$ – так называемая гравитационная постоянная *), числовое значение которой зависит от выбора единиц. Опыт показал, что если в качестве основных единиц принять килограмм, метр и секунду, а производную единицу силы – ньютон – определить из второго закона Ньютона, то гравитационная постоянная $\mathscr{K}_g$ оказывается равной $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

Однако при тех же основных единицах длины, массы и времени (м, кг, с) мы можем в качестве определяющего уравнения взять формулу (1.10) и, положив $\mathscr{K}_g = 1$, определить единицу силы как силу взаимного тяготения двух материальных точек, массы которых равны единице, при расстоянии между этими точками, равном единице длины. Если мы пойдем по этому пути, то будем вынуждены сохранить в выражении второго закона Ньютона инерционную постоянную, отличную от единицы. Легко видеть, что новая "гравитационная" единица силы будет равна $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н, а инерционная постоянная примет значение $\mathscr{K}_i = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ грав.ед.силы $\cdot$ с^2/(кг $\cdot$ м).

Хотя изложенный "гравитационный" способ установления единицы встречается весьма редко (главным образом в астрономии**)), однако от этого он не становится менее законным, чем обычный "инерционный". В дальнейшем, при рассмотрении единиц электри-

*) Рекомендуемое обозначение гравитационной постоянной G. Здесь мы сохраняем символ $\mathscr{K}_g$, чтобы подчеркнуть принадлежность гравитационной постоянной к категории коэффициентов пропорциональности в выражениях физических закономерностей.

**) Вследствие этого "гравитационную единицу силы иногда называют астрономической.

ческих и магнитных величин, мы увидим, что выбор различных определяющих уравнений для установления единицы одной и той же величины привел в свое время к построению различных, но вполне равноправных систем единиц.

Таким образом, в выборе определяющих уравнений, как и в выборе размера основных единиц и числовых коэффициентов в определяющих уравнениях, не существует жестких ограничений. Вопрос, который в наибольшей степени является предметом спора и который должен быть рассмотрен более детально, – это вопрос о числе основных единиц. По этому вопросу существует два диаметрально противоположных мнения.

Согласно одному из них, число основных единиц задано нам природой и определяется характером тех явлений, которые подлежат рассмотрению. В качестве обоснования такого взгляда приводятся даже "философские" соображения о том, что каждое новое качество должно характеризоваться и измеряться новой основной единицей. При этом утверждается, что для описания всех явлений из области механики необходимо и достаточно иметь три основные единицы. При исследовании же других физических явлений необходимо, кроме трех основных единиц, вводить для каждой области физики по крайней мере по одной дополнительной, специфической для данной области единице физической величины. Так, например, в учении о теплоте такой единицей может быть единица температуры, в учении об электричестве – единица заряда (количества электричества) или силы тока и т.п.

Сторонники противоположной точки зрения, к числу которых принадлежит и автор этой книги, считают вышеприведенную аргументацию несостоятельной по следующим соображениям. Качества материального мира бесконечно многообразны, и если считать, что каждое качество характеризуется величиной, единица которой должна быть основной, то число таких единиц будет также бесконечно большим. Действительно, понятие площади не может быть получено из понятия линейной протяженности, а следовательно, единица площади должна быть основной. То же, разумеется, относится и к единице объема. В таком случае независимыми, основными должны быть единицы заряда, индукции магнитного поля, силы, энергии, да, впрочем, и любой другой физической величины.

С другой стороны, возможно также якобы "философское" обоснование того, чтобы основной была только одна единица, поскольку существует взаимная связь всех явлений природы, отражающая единство материи. Таким образом, попытки обосновать число основных единиц исходя из "философских" соображений приводят к двум диаметрально противоположным выводам: число основных единиц должно быть бесконечно велико или, наоборот, должна быть только одна основная единица.

Оба эти вывода являются ошибочными. Конечно, физические величины, отражающие реальные свойства окружающего нас мира, действительно бесконечно разнообразны и несводимы друг к другу *). Однако единицы физических величин сами по себе не являются объектами природы, а представляют собой лишь вспомогательный аппарат для ее изучения. Законы природы никак не изменят своего объективного характера при замене одних единиц другими, подобно тому как не изменятся никакие математические закономерности при замене

*) Очень образно об этом говорил на вводной лекции по курсу физики в Ленинградском университете О.Д. Хвольсон: "В школе вас учат, что скорость есть путь, проходимый в единицу времени, а я вам скажу, что скорость есть скорость, путь есть путь и ничего общего между ними нет".

десятичной системы счисления на двоичную, используемую в вычислительных машинах. Поэтому основное требование, которое должно быть предъявлено к системе единиц, заключается в том, что система должна быть возможно более удобной для практических целей. Конечно, создать такую систему единиц, которая была бы одинаково удобной во всех областях науки и техники, чрезвычайно трудно. Поэтому в свое время возникли "частные" системы, применяемые в той или иной ограниченной области. Только Международная система единиц (СИ) и с некоторыми дополнениями СГС могут считаться универсальными. Сравнительные достоинства и недостатки существующих систем рассматриваются в § 1.6.

Полагая, что число основных единиц в принципе вполне произвольно и может быть как увеличено, так и уменьшено, мы вовсе не предполагаем, что качественно различные физические явления могут быть сведены друг к другу, в частности к чисто механическим явлениям. Однако измерения разных физических величин могут быть сведены к измерению механических или даже геометрических величин, и, следовательно, имеется возможность сделать соответствующие единицы производными.

Для того чтобы наглядно показать произвольность числа основных единиц, обратимся к разобранному выше примеру с установлением единицы силы. Мы видели, что в качестве определяющего уравнения при этом могут быть с равным правом использованы второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения. Однако имеется еще и третья возможность: объединив оба закона, использовать в качестве определяющего уравнения полученный таким образом объединенный закон. Этот последний можно представить в виде

$$a = \mathscr{K}\frac{m}{r^2}. \tag{1.11}$$

Смысл этого утверждения состоит в том, что ускорение, приобретаемое любой материальной точкой под влиянием тяготения к другой неподвижной материальной точке массой m и отстоящей от первой на расстоянии r, пропорционально массе m и обратно пропорционально квадрату расстояния r.

Коэффициент пропорциональности $\mathscr{K}$ в формуле (1.11) представляет собой, по существу, отношение гравитационной постоянной к инерционной. Положив этот коэффициент равным единице, можно определить производную единицу массы как массу такой материальной точки, которая любой другой материальной точке, находящейся от нее на расстоянии, равном единице длины, сообщает ускорение, равное единице ускорения. Очевидно, эта единица массы численно равна $1/\mathscr{K}$, т.е. в системе, в которой в качестве основных единиц приняты метр и секунда, эта единица будет равна $1{,}5 \cdot 10^{10}$ кг.

Соединение второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения в объединенный закон отнюдь не является искусственным, как это может показаться с первого взгляда. Полученная таким образом формула (1.11) без труда приводится к третьему закону Кеплера, являющемуся опытным законом природы и, заметим кстати, открытому раньше законов Ньютона. Действительно, предполагая, для простоты, что движение планет происходит по окружностям с периодом обращения T, и заменяя в формуле (1.11) ускорение a (которое в данном случае является центростремительным) его выражением

$$a = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r, \tag{1.12}$$

получим

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathscr{K}} \frac{r^3}{m}. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) описывает не только движение планет вокруг Солнца, но и движение спутников вокруг планет. Стоящая в знаменателе этой формулы масса m представляет собой не только массу Солнца, но и массу каждой планеты, обладающей одним или несколькими спутниками. Эти массы можно вычислить, зная радиусы орбит и времена обращения планет или спутников. Так, например, если в формулу (1.13) подставить гравитационную постоянную (полагая инерционную постоянную равной единице), радиус земной орбиты и время обращения Земли вокруг Солнца, то найдем значение массы Солнца: $m_С = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг или $m_С' = 1{,}33 \cdot 10^{15}$ производных единиц массы (при основных единицах метре и секунде).

Можно построить систему, приравняв единице в формуле (1.13) не гравитационную постоянную, а весь коэффициент $4\pi^2/\mathscr{K}$. Различие между двумя системами будет при этом аналогично различию между системами с квадратными и круглыми метрами в качестве единиц площади. При $4\pi^2/\mathscr{K} = 1$ формулу (1.13) удобно представить в виде

$$m = r^3/T^2. \qquad (1.14)$$

Из этой формулы единица массы определяется как масса такой неподвижной материальной точки, вокруг которой любая другая материальная точка, удаленная на расстояние, равное единице длины, обращается (совершает один полный оборот) за время, равное единице. При таком определении производной единицы массы появится числовой коэффициент во втором законе Ньютона, или в законе всемирного тяготения, или в обоих законах, так как коэффициент в формулах (1.11) и (1.13) придется приравнять $4\pi^2$.

Единица массы, определенная из формулы (1.14), будучи производной, зависит от выбора единиц длины и времени. Можно, например, за единицу длины принять расстояние от Земли до Луны, а за единицу времени –

время обращения Луны вокруг Земли. При таком выборе единицей массы будет масса Земли. Подставляя в формулу (1.14) радиусы орбит планет и спутников планет, мы найдем в такой системе единиц массу Солнца и массы планет, имеющих спутники. Эти массы имеют следующие числовые значения:

Солнце –	332 000
Юпитер –	317
Сатурн –	94,9
Нептун –	17,2
Уран –	14,7
Марс –	0,11

Определив единицу массы как производную единицу, мы получим систему механических единиц, содержащую в качестве основных не три, а только две единицы – длины и времени. Весьма важно при этом, что, объединив второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения, мы приравняли постоянному числу каждую из постоянных – инерционную постоянную во втором законе Ньютона и гравитационную постоянную в законе всемирного тяготения. При этом не существенно, каково значение этих постоянных. При первом определении производной единицы массы обе постоянные были приняты равными единице, а при втором определении можно было, например, приравнять инерционную постоянную единице, а гравитационную – значению $4\pi^2$.

Если вглядеться в то, каким образом удалось сократить число основных единиц, то можно увидеть, что это и было достигнуто тем, что мы обе постоянные (инерционную и гравитационную) приравняли отвлеченному постоянному числу.

Таким образом, оказывается, что число основных единиц тесно связано с числом коэффициентов, стоящих в выражениях физических законов и определений. Коэффициенты пропорциональности, подобные гравитационной и инерционной постоянным и зависящие от выбора основных единиц и определяющих уравнений, получили название фундаментальных или мировых постоянных. В этом их отличие от так называемых специфических постоянных, характеризующих различные свойства отдельных веществ (молярной массы, критической температуры, диэлектрической проницаемости и т.п.).

В принципе фундаментальные постоянные фигурируют в выражениях всех физических законов и определений, но подходящим выбором единиц мы можем то или иное их число приравнять каким-либо постоянным числам (чаще всего единице). Следовательно, чем больше основных единиц принято для построения системы, тем больше фундаментальных постоянных будет стоять в формулах. Сокращение числа основных единиц обязательно сопровождается сокращением числа фундаментальных постоянных. Естественно спросить, возможно ли таким образом дальнейшее сокращение числа основных единиц до одной (или даже до нуля!)?

В § 7.2 при рассмотрении разных способов построения единиц электрических и магнитных величин мы покажем, что без труда можно довести число основных единиц до одной. Более того, приравнивание единице важнейшей из постоянных атомной физики – постоянной Планка, позволяет построить систему, полностью лишенную основных единиц. На первый взгляд это представляется парадоксальным. Однако, как мы увидим (§ 9.8), такая возможность действительно имеется. При этом будут жестко зафиксированы размеры единиц всех физических величин.

Проанализировав основные принципы построения систем единиц, мы убедились в том, что существует почти неограниченная свобода в выборе способов построения системы. Однако эта свобода является таковой лишь теоретически. Поскольку система единиц представляет собой своего рода аппарат, предназначенный для облегчения расчетов в науке и технике, она должна удовлетворять ряду практических требований. С этой точки зрения способы построения системы единиц и, в частности, число основных единиц не безразличны и в известной степени ограничены.

Слишком большое число основных единиц неизбежно связано с большим числом фундаментальных постоянных в физических формулах, что затрудняет их запоминание и удлиняет вычисления. Кроме того, потребовалась бы огромная работа по установлению эталонов всех основных единиц. Точность, с которой устанавливались бы эти эталоны, была бы различной, вследствие чего отличались бы по точности и фундаментальные постоянные в формулах физических законов и определений. С другой стороны, слишком малое число основных единиц в такой степени ограничивает возможности построения производных единиц, что многие из последних неизбежно окажутся либо слишком большими, либо слишком малыми, а потому неудобными для практики.

Заметим, впрочем, что в настоящее время выражение "размер единиц, удобный для практики" стало несколько расплывчатым вследствие того, что диапазон размеров величин, встречающихся в науке и технике, чрезвычайно широк. Так, например, в ядерной физике приходится иметь дело с длинами порядка 10^{-15} м, а в астрономии – порядка 10^{22}–10^{26} м. Мощности электростанций превышают 10^9 Вт, а мощность сигнала, воспринимаемого радиолокационной станцией, достигает значений, меньших чем 10^{-16} Вт. В научных исследованиях диапазон давлений простирается от значений, лежащих ниже 10^{-10} Па, до значений, достигающих десятков и сотен миллиардов паскалей.

Имеются еще и другие, также практические соображения, которые делают малопригодными системы со слишком малым числом единиц. О некоторых из них будет сказано в гл. 3 при изложении основных понятий анализа размерностей.

Исходя из этих соображений оказывается целесообразным строить системы единиц, пригодные для различных областей физики, в которых число основных единиц было бы порядка пяти – семи.

§ 1.5. Выбор основных единиц

В § 1.4 было показано, что существует широкая свобода в способе построения системы единиц и, в частности, в выборе величин, единицы которых принимаются за основные. В то же время практические соображения накладывают определенные ограничения на этот выбор. Иногда для описания какой-то совокупности физических явлений или для решения конкретной задачи методом анализа размерностей полезно выбрать в качестве основных такие единицы, которые позволят более просто выразить интересующие нас закономерности или решить данную задачу. Подобные примеры можно найти в гл. 3 настоящей книги. Может даже оказаться целесообразным приравнять единице возможно большее число фундаментальных постоянных, доведя число произвольно выбираемых основных единиц до нуля. При этом, разумеется, значительно упростится вид соответствующих уравнений. Подобным образом часто поступают в атомной физике, в особенности при решении различных задач с помощью методов квантовой механики. Подробнее об этом будет сказано в § 9.8.

Иначе обстоит дело, когда основные единицы выбираются с целью построения возможно более универсальной системы, которая была бы пригодна для разнообразных физических и технических измерений. Величины, единицы которых принимаются за основные, должны отражать наиболее общие свойства материи. Вряд ли имеет смысл выбирать в качестве основных единицы каких-либо частных, специфических величин, таких, например, как поверхностное натяжение, удельное сопротивление или теплоемкость.

Поскольку формой существования всех видов материи является пространство – время, естественно включить в число основных единицы протяженности и времени. Здесь уместно сделать следующее замечание. Хотя с точки зрения теории относительности длины отрезков и промежутков времени утратили свою абсолютность, поскольку они зависят от относительного движения систем отсчета, они сохранили свою объективность, подобно тому как в обычной геометрии проекции отрезка на координатные оси, будучи относительными (т.е. зависящими от системы координат), тем не менее остаются объективными. Эти соображения позволяют нам без всяких оговорок включить в число основных единицы длины и времени. То же в полной мере относится и к третьей величине – массе, единицы которой обычно также выбираются в качестве основных.

Системы, построенные на трех основных единицах, могли бы, разумеется, быть применены для любых других, в частности тепловых и световых, измерений, для чего следовало связать определяющими уравнениями соответствующие величины. Например, не составило бы труда сделать температуру производной величиной, используя ее связи с другими физическими величинами, такими как средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа, плотность теплового излучения абсолютно черного тела и т.п. Однако чрезвычайно широкое распространение, которое имеет в науке, технике и повседневной жизни температура, делает целесообразным ее выделение в число основных величин. В течение длительного времени к числу основных величин относилось и количество теплоты, несмотря на то что уже в середине XIX в. была установлена эквивалентность теплоты и работы.

В светотехнике существенными являются величины, характеризующие субъективное восприятие света. Поэтому использование при определении единиц этих величин только энергетических параметров лишит их важнейшего качества – характеристики воздействия на наше зрение. Это потребовало введения специфических величин – силы света, светового потока, освещенности, яркости и др. Единица одной из них – силы света – была включена в число основных единиц.

Практические соображения потребовали включения в число величин, единицы которых принимаются за основные, одну из электрических или магнитных величин. После долгих дискуссий в качестве такой величины была принята сила тока.

В настоящее время в физике и химии приходится иметь дело с такими величинами, как число частиц, концентрация частиц и поток частиц. Для определения и измерения числа частиц была введена особая величина, которой присвоено наименование "количество вещества".

Таким образом число основных единиц, на которых строятся системы единиц, достигло в настоящее время семи. Это *единицы длины, массы, времени, температуры, силы тока, силы света и количества вещества.* Из числа основных величин было исключено *количество теплоты,* учитывая, как сказано выше, полную эквивалентность теплоты и работы.

При этом должны быть удовлетворены важные требования – возможность сохранения постоянства размера основных единиц, их воспроизведения, а в случае утраты – и их восстановления. Само собой разумеется, что должна быть обеспечена возможно более высокая точность, с которой могут сравниваться образцовые меры данной единицы, изготовленные в разных местах.

Ведь последующие измерения всех производных величин, опирающиеся на значения основных единиц, всегда будут иметь точность не большую, чем эти последние. Очень важно также иметь возможность сравнивать между собой результаты измерений, произведенных с использованием разных единиц. Для этого необходимо знать соотношение между единицами, применямыми в разных странах (а иногда и в городах), или, что еще лучше, иметь везде одинаковые единицы. Осуществить это единство лучше всего, если попытаться связать основные единицы с величинами, встречающимися в природе.

Первый шаг в этом направлении был сделан в эпоху Великой французской революции, когда специальная комиссия в составе крупнейших французских ученых конца XVIII в. (Борда, Кондорсе, Лаплас и Монж), созданная в мае 1790 г. по постановлению Учредительного собрания, предложила принять в качестве единицы длины одну десятимиллионную часть четверти дуги Парижского меридиана. 30 марта 1791 г. предложение комиссии было утверждено, и она приступила к определению принятой единицы. В результате работы комиссии в 1799 г. во Франции был введен "метр подлинный и окончательный" ("metre vrai et difinitif"), послуживший основой метрической системы. Прототипом метра явилась специально изготовленная линейка – платино-иридиевый стержень, хранящийся в настоящее время в Национальном архиве Франции ("архивный метр").

Одновременно с метром была введена единица веса – килограмм*), определенная вначале как вес кубического дециметра воды при температуре ее наибольшей плотности 4 °С. Подобно тому как для сохранения метра была изготовлена образцовая линейка, так и для

*)По существу, килограмм является единицей массы, но во время его установления не делали различия между весом и массой.

сохранения килограмма была изготовлена образцовая гиря – прототип килограмма.

Для образования кратных и дольных единиц длины и веса (массы) была принята десятичная система, согласно которой все более крупные и более мелкие единицы получаются умножением основной единицы на положительную или отрицательную степень десяти. Поэтому совокупность всех единиц, построенных таким образом, назвали десятичной системой мер. Метрическая десятичная система включала в себя и ряд производных единиц: единицу площади – квадратный метр, единицу объема – кубический метр и их кратные и дольные единицы.

В качестве единицы времени была узаконена секунда, определенная как 1/86 400 часть средних солнечных суток.

Повышение точности измерений, связанное с развитием измерительной техники, позволило, однако, обнаружить, что между выбранными единицами и изготовленными для них прототипами существует хотя и небольшое, но вполне измеримое расхождение. Исключение составила лишь секунда, которая, благодаря высокой точности астрономических измерений, оставалась практических неизменной и требовала лишь уточнения самой формулировки.

В связи с этим встал вопрос о том, изготовить ли новые прототипы или примириться с имеющимся расхождением и принять в качестве законных единиц меры, определяемые существующими прототипами. Помимо того что изменение последних само по себе представило бы огромные затруднения и неудобства, не было гарантии, что новое уточнение не потребует их нового изменения. Поэтому было решено зафиксировать прототипы как основные эталоны единиц этих величин.

Таким образом, были установлены следующие основные единицы:

единица длины – метр (м), определяемая как расстояние между осями штрихов, нанесенных на платино-иридиевой линейке, при 0 °С. Сплав платины и иридия был выбран как обладающий очень малым температурным коэффициентом объемного расширения, а форма поперечного сечения линейки (рис. 1) отвечала требованию возможно меньшего прогиба;

единица массы – килограмм (кг) – масса платино-иридиевой гири;

единица силы – килограмм-сила (кгс) – сила притяжения к Земле той же гири в месте ее хранения в Международном бюро мер и весов в Севере (близ Парижа);

единица времени – секунда, определяемая как 1/86 400 часть средних солнечных суток. В астрономии и смежных с ней областях за единицу принималась звездная секунда, определяемая как 1/86 400 часть звездных суток. Так как благодаря вращению Земли вокруг Солнца за один год звездных суток проходит на единицу

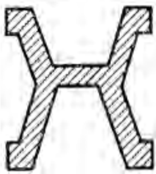


Рис. 1

больше, чем солнечных, то звездная секунда составляла 0,99726957 солнечной секунды.

В дальнейшем определение секунды несколько уточнилось, так как повышение точности измерений позволило установить некоторое непостоянство средних суток. За основу нового определения секунды был принят так называемый тропический год – промежуток времени между двумя весенними равноденствиями. Согласно этому определению секунда есть 1/31 556 925,9747 часть тропического года, начавшегося в 12 часов дня 31 декабря 1899 г.*). Указание на определенный год имеет целью учесть тот факт, что сам тропический год уменьшается примерно на 0,5 секунды за столетие.

Развитие молекулярной и атомной радиоспектроскопии дало возможность достаточно точно связать единицы времени с периодом колебаний, соответствующим какой-либо определенной спектральной линии. Поэтому решением XIII Генеральной конференции по мерам и весам (1967 г.) было дано новое определение секунды, согласно которому **секунда есть продолжительность 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133** (изотопа цезия с массовым числом 133).

В связи с определением метра и килограмма не как естественных величин, а по прототипам утратилось одно из преимуществ метрической системы – ее сохранность и возможность точного воспроизведения. Дальнейшее повышение точности измерений позволило частично вернуться к установлению основных единиц по измерению естественных величин. При этом для единицы массы – килограмма сохранилось его определение по международному прототипу, а длину метра оказалось возможным и наиболее целесообразным связать с длиной волны определенной спектральной линии. В качестве таковой была принята оранжевая линия криптона. Так как естественный криптон содержит шесть изотопов, спектральные линии которых хотя и в малой степени, но отличаются друг от друга, то определение метра через длину волны уточняется указанием на то, что в качестве источника берется изотоп криптона с массовым числом 86 ($^{86}_{36}Kr$). Принятая спектральная линия соответствует переходу

---

*) По астрономическому счету времени полдень 31 декабря 1899 г. обозначается "12 часов 0 января 1900 г.".

электрона в атоме криптона между квантовыми состояниями, которые в спектроскопии обозначаются символами $2p_{10}$ и $5d_5$. По определению, принятому на XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960 г.), метр содержит 1 650 763,73 длины волны в вакууме этой спектральной линии.

Современные достижения лазерной техники и квантовой электроники, высокая точность, которой удалось достичь при измерении скорости света, позволили связать определение единицы длины – метра с единицей времени – секундой. XVII Генеральная конференция по мерам и весам (1983 г.) приняла решение дать следующее определение метра: **метр есть расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299 792 458 секунды.** При таком определении значение скорости света принимается как величина, не подлежащая уточнению.

Заметим при этом, что и единицу массы в принципе можно было бы определить не массой эталонной гири, а связать ее с массой какой-либо атомной частицы (например, нейтрона). К сожалению, в настоящее время точность определения атомных масс уступает точности измерения массы путем взвешивания.

Введенные для тепловых измерений основные величины – температура и количество теплоты – потребовали установления соответствующих единиц. Температура, точнее разность температур, определялась жидкостными термометрами, причем в физике была принята шкала Цельсия, в которой интервал между точкой плавления льда и точкой кипения воды при нормальном давлении делился на сто частей. Впоследствии была введена абсолютная, а затем практически с ней совпадающая термодинамическая шкала температур. Подробнее об этой шкале сказано в гл. 5.

Для измерения количества теплоты была введена единица – калория, определенная, как количество теплоты, необходимое для нагревания одного грамма воды на один градус Цельсия. 10^3 калорий составили килокалорию, а 10^6 калорий – термию. Последнее название не получило распространения. Точные измерения показали, что количество теплоты, требуемое для нагревания на один градус, не является постоянным, а зависит от того, в каком температурном интервале происходит нагревание. Поэтому была введена средняя калория, которая определялась как одна сотая часть того количества теплоты, которое необходимо, чтобы нагреть один грамм воды от точки плавления до точки кипения при нормальном давлении. Эта калория соответствует нагреванию воды от 14,5 до 15,5 °C.

О единицах силы тока – ампере, силы света – канделе и количества вещества – моле будет сказано в § 1.6 и соответствующих главах книги.

В заключение отметим, что имеется существенное различие между двумя способами установления основной единицы – по прототипам, материализованным в виде узаконенных образцов, и по измерению естественных величин. При первом способе установления единицы эталоном служит некоторое тело (гиря, линейка). Такими прототипами при введении метрической системы мер были прототипы килограмма и метра. Первый из них сохранился до нашего времени. Второй способ предполагает проведение некоторой процедуры измерения. Для ее осуществления необходимо, как правило, использовать сложную оптическую, радиотехническую и другую аппаратуру, совершенство которой в конечном счете определяет точность установления единицы. Для практических измерений обычно создаются эталоны, обеспечивающие воспроизведение единиц с наивысшей возможной точностью. При этом эталоны не обязательно являются мерой самой единицы, а могут определять значение других величин, по которым возможно вычисление основной единицы. Так, для определения единицы силы тока в качестве эталонов изготовляются стандартные гальванические элементы и стандартные резисторы (сопротивления), а сила тока определяется по закону Ома. Нередко при этом может оказаться, что сравнение друг с другом эталонов, изготовленных в разных местах (например, в разных странах), обладает точностью, большей, чем прямое определение основной единицы по ее формулировке.

Уместно здесь обратить внимание на то, что некоторые основные единицы оказываются связанными с другими единицами, а потому не являются самостоятельными. Уже при создании метрической системы мер имела место подобная ситуация. Для определения килограмма, который устанавливался как основная единица веса (массы), необходима была производная единица объема, поскольку килограмм приравнивался весу кубического дециметра воды при температуре 4 °С. Для определения ампера нужна единица силы, для нового определения метра нужна единица времени и т.д.

Выше (§ 1.3) говорилось об условности выбора величин, которые мы принимаем за основные. Можно при этом, исходя из метрологических соображений точности и воспроизводимости измерений, считать основными одни величины, а при построении систем единиц – другие. Эта идея впервые была высказана проф. П.Л. Калантаровым, который для описания электрических и электромагнитных явлений предложил систему, в которой основными величинами были длина, время, электрический заряд и магнитный поток.

§ 1.6. Установление систем единиц

В чрезвычайно узком смысле "системы единиц" существовали с незапамятных времен. Единицы длины определяли производные единицы площади и объема. После введения метрической системы мер появилась производная единица удельного веса (плотности) – килограмм на кубический дециметр – единица, совпадающая с относительным удельным весом или относительной плотностью (по отношению к удельному весу или к удельной плотности воды).

Следующим шагом можно считать введение в теории теплопроводности Ж. Фурье (1820 г.) системы тепловых единиц. В этой системе в качестве основных единиц были приняты единицы длины, времени и температуры, а в качестве производных – объемная теплоемкость и внутренняя и внешняя теплопроводности.

Значительно более общая система единиц была создана К.Ф. Гауссом (1832 г.). Приняв в качестве основных единицы длины (миллиметр), массы (миллиграмм) и времени (секунда), Гаусс создал "абсолютную систему единиц", в которую наряду с единицами механических величин входили единицы всех электрических и магнитных величин, которые в то время фигурировали в физике.

Позднее название "абсолютная система единиц" потеряло однозначность. Иногда его применяли по отношению к системам, построенным на вполне определенных единицах длины, массы и времени (сантиметр, грамм, секунда), иногда, наоборот, придавали ему более широкий смысл, считая абсолютной любую систему, имеющую некоторое ограниченное число основных единиц и включающую в себя в качестве производных все остальные единицы из области геометрии, механики, электричества и электромагнетизма. В настоящее время уже совсем не пользуются понятием "абсолютная система", тем более, что нет никакого критерия, который позволил бы, исходя из принципиальных соображений, отдать предпочтение какой-либо определенной системе и присвоить ей столь обязывающее название.

Предложение Гаусса построить систему единиц, используя три основные единицы – длины, массы и времени, было принято в физике с той лишь разницей, что основной единицей длины вместо миллиметра был взят сантиметр, а вместо миллиграмма – грамм. На этих трех единицах была построена система, обозначаемая СГС (CGS). В то же время, также на трех основных единицах, была построена техническая система (МКГСС), в которой в качестве единицы длины был принят метр, а вместо единицы массы была принята единица силы – килограмм-сила (кгс)*). За единицу времени, как и в СГС, была принята секунда.

Система СГС охватывала механические, электрические и магнитные измерения, причем произошло ее разделение на электростатическую (СГСЭ) и электромагнитную (СГСМ) системы. В первой за основу принималось взаимодействие электрических зарядов, а во второй – взаимодействие "магнитных масс". Впоследствии оказалось целесообразным принять такой вариант системы, в котором величины, относящиеся к электростатическим явлениям, и величины, связанные с прохождением тока (сила тока, сопротивление), измеряются электростатическими единицами, а относящиеся к магнитным явлениям – электромагнитными. Эта система получила название симметричной, или гауссовой, системы и обозначает СГС.

В МКГСС входили единицы только геометрических и механических величин, причем единица такой важной величины, как масса, не имела специального названия. Обычно эту единицу обозначали т.е.м. (техническая еди-

---

*) В ГДР, ФРГ и Австрии эта единица называется килопонд.

ница массы). Проф. М.Ф. Маликов предложил для нее название "инерта". В предыдущих изданиях настоящей книги это название упоминалось, хотя никакими стандартами оно не было утверждено, да, пожалуй, практически и не применялось. В настоящее время, в связи с ликвидацией МКГСС, этот вопрос отпал.

В 1881 г. Первый международный конгресс электриков установил "абсолютную практическую систему электрических единиц". Эта система была построена на основе принятой конгрессом системы СГСМ умножением единиц последней на различные степени числа 10. Были таким образом установлены единицы следующих величин: электродвижущей силы – 10^8 единиц СГСМ, силы тока – 0,1 единицы СГСМ, сопротивления – 10^9 единиц СГСМ и электроемкости – 10^{-9} единицы СГСМ. Этим единицам были присвоены названия: вольт (В), ампер (А), ом (Ом), фарада (Ф) *). В 1889 г. к ним были добавлены: единица мощности ватт (Вт) – 10^7 единиц СГС (эргов в секунду) и единица работы джоуль (Дж) – 10^7 единиц СГС (эргов). Ватт определялся как мощность, соответствующая току силой один ампер при напряжении один вольт, а джоуль – как работа в течение одной секунды при мощности один ватт. Так как ватт и джоуль применялись исключительно в электротехнике, то их часто называли "единица электрической мощности" и "единица электрической работы".

Практическая система быстро получила всеобщее распространение, и все электротехнические измерения и расчеты производились в этой системе. Однако система имела существенный недостаток, заключавшийся в том, что в ней отсутствовала единица силы, вследствие чего не было возможности использовать ее для вычисления механических сил при взаимодействии зарядов и токов.

---

*) В настоящее время эта единица называется фарад.

В 1901 г. итальянский инженер Джорджи предложил таким образом расширить систему, чтобы ее можно было сделать универсальной, т.е. охватить все измерения в механике, электричестве и электромагнетизме. Поскольку в систему следовало включить уже распространенные практические единицы, сделовало одну из них сделать основной. По вопросу о выборе единицы, которая должна была стать основной, на протяжении многих лет шли дискуссии. Предлагались единицы следующих величин: силы тока, разности потенциалов, сопротивления, электрической емкости, индуктивности, магнитного потока, магнитной проницаемости.

После ряда дискуссий, исходя из метрологических соображений, за основную единицу была выбрана единица силы тока – ампер. На IX Генеральной конференции по мерам и весам (1948 г.) единица силы тока получила следующее определение: **ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 метра один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 метр силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютон.**

Написав закон взаимодействия параллельных токов и подставив в него все величины в практической системе единиц, мы вынуждены будем ввести новую фундаментальную постоянную. Это вытекает из указанной выше связи между числом основных единиц и числом фундаментальных постоянных. Новая постоянная, так называемая магнитная постоянная, будет определена ниже, в гл. 7, посвященной единицам электрических и электромагнитных величин.

Вначале система, построенная на основных единицах метре, килограмме, секунде и ампере, ограничивалась, подобно СГС, только геометрическими, механическими, электрическими и электромагнитными измерениями. Для обозначения этой системы в разное время применялись символы МКСМ и МКСА.

Важный шаг в развитии систем единиц был сделан созданием в 1960 г. Международной системы единиц, обозначаемой SI или СИ *). Решениями XIII и XVI Генеральных конференций по мерам и весам (1967 и 1979 гг.) в систему были включены единицы температуры и силы света. В качестве первой был установлен кельвин (прежнее название: градус Кельвина) с обозначением К, вместо прежнего °К. Кельвин определяется как 1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды. Единица силы света – кандела (кд) – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср. Это определение вошло в стандарт Совета Экономической Взаимопомощи (СТ СЭВ 1052–78).

О физическом смысле определений кельвина и канделы, как и ампера, будет сказано в соответствующих главах книги. Решением XIV Генеральной конференции по мерам и весам (1971 г.) в число основных единиц Международной системы была включена еще одна основная единица. Ею стала единица количества вещества – моль

*) Система Интернациональная (Systeme International d'Unites). В дальнейшем наименования систем и единиц будут даны в русской транскрипции. Заметим, что в одних изданиях пишут "система СИ", а в других – просто "СИ". В первом случае имеет место явная тавтология (система "Система Интернациональная"). Во втором – соответствующие предложения несколько режут слух. Если мы привыкли к выражению "вычисления производились в системе СГС", то выражение "производились в СИ" звучит непривычно. Что касается произношения названия системы в разговорной речи, то обычное, ставшее распространенным произношение – "си". В то же время НПО "ВНИИМ им. Д.И. Менделеева" рекомендует произношение "эс и".

(моль). Подробнее об этой единице см. § 4.5. В то же время была исключена единица количества теплоты – калория и заменена общей единицей работы – джоулем.

В 1961 г. Международная система единиц была определена в СССР "как предпочтительная во всех областях науки, техники и народного хозяйства, а также при преподавании" (ГОСТ 9867–61). В 1978 г. был введен стандарт Совета Экономической Взаимопомощи, который в 1981 г. был принят за основу стандарта СССР (ГОСТ 8.417–81). Этим стандартом определены основные и наиболее употребительные производные единицы Международной системы, единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ, единицы, временно допускаемые, и единицы, подлежащие изъятию в сроки, устанавливаемые специальными соглашениями. В этом же стандарте определяются области, на которые стандарт не распространяется. К ним в первую очередь относятся единицы, применяемые при научных исследованиях теоретического характера.

§ 1.7. Обзор основных характеристик различных систем единиц

В настоящее время на практике широко применяются две системы единиц: Международная система единиц (СИ) и симметричная (гауссова) система (СГС).

Международная система единиц – это единственная в настоящее время система, которую мировая общественность приняла для практического применения именно благодаря ее достоинствам и преимуществам перед всеми остальными системами единиц (универсальность как по содержанию производных единиц практически всех областей измерений, так и по применению во всех отраслях народного хозяйства; возможность унификации единиц, так как для каждой величины устанавливается только одна единица, все основные и большинство производных единиц имеют размеры, удобные для практики; упрощение расчетов и т.д.).

Система СГС существует более ста лет и до настоящего времени используется в научных исследованиях (физике, астрономии и смежных науках), а также в периодической научной литературе, однако, Международная система единиц все шире проникает и в эти области.

Система СГС имеет ряд достоинств, определивших ее длительное использование и сохранение до настоящего времени. Здесь в первую очередь следует назвать логичность и последовательность ее построения. При описании электромагнитных явлений в уравнениях присутствует только одна фундаментальная константа – скорость света, наличие которой весьма уместно в электромагнитной теории света и теории относительности.

Формально в СГС входят только геометрические, механические, электрические и электромагнитные единицы, поскольку в ней присутствуют только три основные единицы – сантиметр, грамм и секунда. Однако во всех исследованиях, охватывающих тепловые явления, используется единица температуры кельвин. Кроме того, в молекулярной физике и химии число частиц (по современной терминологии – количество вещества) имеет в качестве единицы моль. В светотехнике к единицам СГС добавляется единица светового потока люмен. Образованная таким образом светотехническая система единиц ранее обозначалась СГСЛ.

Наряду с несомненными достоинствами СГС обладает существенными недостатками. Подавляющее большинство ее единиц далеки от практики. В первую очередь это относится к единицам электричества и электромагнетизма, применяющимся в электротехнике. Весьма неудобны для пересчета соотношения между единицами СГС и практическими. Так, один вольт равен 1/300 СГС-единицы напряжения, а один ампер – $3 \cdot 10^9$ СГС-единицы силы тока. Но эти числа лишь приближенные. Так, например, ампер должен относится к СГС-единице силы тока как одна десятая скорости света в вакууме, измеренной в сантиметрах в секунду. Немаловажное неудобство состоит в том, что все единицы СГС, относящиеся к электростатике и электрическому току, не имеют названий. Имеются в виду такие величины, как электрический заряд, напряженность поля, потенциал, сила тока и др. В электротехнике отсутствуют приборы, которые измеряли бы эти величины в единицах СГС. До недавнего времени приборы применялись лишь для измерения некоторых магнитных величин (магнитная индукция, магнитный поток). Поэтому, производя расчеты в СГС, следует сначала в эту систему перевести показания приборов, а после расчета производить обратный перевод.

Создание Международной системы единиц, потребовавшее большого труда, в котором приняли участие метрологические организации многих стран (значительную роль при этом сыграли советские метрологи), позволило охватить измерения во всех областях физики и техники.

Основная трудность при построении этой системы состояла в необходимости "сшить" электрические и магнитные единицы с единицами механическими. Достигнуто это было введением двух постоянных: электрической ϵ_0 и магнитной μ_0. В зарубежной литературе можно встретить прежние названия ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Вряд ли следует доказывать, что в этих названиях не больше смысла, чем в "гравитационной проницаемости вакуума", как можно было бы назвать гравитационную постоянную.

Введение постоянных ϵ_0 и μ_0 вместо одной постоянной, равной скорости света в СГС, вызвало ряд возражений против Международной системы единиц. Сущность этих возражений сводилась к тому, что характеристики электромагнитного поля E, D, B и H, которые при их обычном определении должны быть однородными, в Международной системе единиц утрачивают однородность, что делает систему в электродинамике и, в особенности, в теории относительности некорректной. Изложение подобных возражений имеется в статье Д.В. Сивухина (УФН. – 1979. – Т. 129. – С. 335). Однако А.А. Пинский (Измерительная техника. – 1981 г. – № 9. – С. 10) приводит резонные соображения в защиту корректности Международной системы единиц.

Оставляя в стороне аргументы в пользу той или иной точки зрения, заметим, что можно изменить определения отдельных векторов поля так, что предмет спора по существу отпадет. Подобный пример рассмотрен в § 7.4.

Высказывались критические замечания по поводу некоторых формулировок единиц, входящих в СИ, которые, однако, не затрагивают существа системы и могут быть учтены при ее дальнейшем совершенствовании. В настоящее время Международная система единиц получила широкое распространение, во многих странах узаконена как основная система в промышленности, торговле и в значительной степени в научных исследованиях в ряде областей. Этому способствовали несомненные достоинства системы, искупающие ее отдельные недостатки. В числе достоинств следует в первую очередь указать на единство выражения энергии и ее единиц как в механических, так и в электрических и магнитных явлениях:

джоуль = ньютон · метр = вольт · кулон = ампер · вебер.

Разумеется, весьма важно то, что подавляющее большинство величин измеряется единицами, давно вошедшими в практику и стоящими на шкалах приборов. При расчетах не требуется производить никаких предварительных преобразований единиц. Это, в частности, относится к тепловым расчетам, в которых произведен переход от раздельного измерения работы и количества теплоты в джоулях и калориях к единому измерению в джоулях.

Мы уже говорили о двух системах, которые в настоящее время следует считать ликвидированными. Это система МКГСС для механических величин и система тепловых единиц, в основе которой лежит единица количества теплоты (калория или кратная ей – килокалория). О "судьбе" этих единиц следует сказать особо. Система МКГСС с самого начала была ограничена только геометрическими и механическими измерениями. При этом, как указывалось, для такой фундаментальной величины, как масса, не существовало специальной единицы. На практике пользовались килограммом (массы) – единицей, не входящей в систему. При этом одинаковое наименование единицы силы, входящей в систему, и единицы массы, лежащей вне системы, приводило к бесконечной путанице не только при преподавании, но и в практической деятельности.

Если в обиходе, определяя вес тела, мы в действительности интересуемся его массой, то применение "весовой" терминологии, распространенной в некоторых областях техники ("весовой расход жидкости"), совершенно недопустимо.

Из различных единиц МКГСС практически применялись только три: единица силы – килограмм-сила, ее часто называли просто килограмм *), единица давления – килограмм-сила на квадратный метр и единица работы – килограмм-сила-метр (кгс · м), для которой существовало неправильное, но весьма распространенное название – килограммометр.

Во всех теплотехнических расчетах пользовались исключительно единицей количества теплоты – калорией

*) В настоящее время единица килограмм-сила (со старым названием "килограмм") сохранилась в тяжелой атлетике.

(кал) и кратными ей килокалорией (ккал) и гигакалорией (Гкал). Эти же единицы использовались для построения единиц других тепловых величин, в том числе тепловых свойств вещества (теплоемкость, теплопроводность). После введения Международной системы единиц все эти единицы ликвидированы. Однако до настоящего времени их иногда используют при расчетах расходов тепловой энергии в различных областях народного хозяйства и в диэтетике.

Следует еще упомянуть о двух системах, применяемых в теоретических разделах физики и астрономии (§ 9.8). В одной из них приравнены единице постоянная Планка, масса и заряд электрона, в другой – постоянная Планка, масса электрона (иногда другой элементарной частицы) и скорость света. Обе системы имеют весьма ограниченное применение. Не говоря уже о том, что все производные единицы оказываются очень далекими от практики, эти системы обладают существенным недостатком с метрологической точки зрения. Значения некоторых постоянных известны с недостаточной точностью, и их уточнение потребовало бы изменения образцовых мер, а открытие новых физических явлений или закономерностей сможет привести к существенному изменению соотношений между значениями единиц, принятых за основные.

§ 1.8. Внесистемные единицы

Несмотря на определенные преимущества, которые дает применение единиц, определяемых той или иной системой, до настоящего времени широко распространены различные единицы, не укладывающиеся ни в одну из систем. От многих из них нельзя отказаться ввиду удобства их применения в определенных областях, другие сохранились в силу исторических традиций.

В дореволюционной России существовала старая русская система мер, которая после революции декретом Совета Народных Комиссаров от 14 сентября 1918 г. была заменена метрической. Названия единиц этой системы сохранились в настоящее время только в поговорках и пословицах ("мерить на свой аршин", "мал золотник, да дорог", "косая сажень в плечах" и т.п.). В Великобритании и США еще сохраняются единицы, неудобство которых состоит не только в том, что они построены не по десятичной системе, но и в том, что нередко под одним названием скрываются разные единицы (несколько миль, галлонов, не вполне точно совпадающие дюймы и т.п.). Впрочем, и в этих странах в настоящее время происходит постепенный переход к метрической системе.

Среди внесистемных единиц в первую группу должны быть выделены десятичные кратные и дольные единицы. Наименование этих единиц образуется с помощью соответствующих приставок (деци-, санти,- милли-, дека-, гекто-, кило- и т.п.). Перечень этих приставок и соответствующие обозначения даны в приложении III.

Вторую группу внесистемных единиц образуют единицы, построенные из основных единиц системы не по десятичному принципу. К таким в первую очередь относятся единицы времени: минута, час.

Наконец, третью группу образуют единицы, не связанные с какой-либо системой. Сюда входят все устаревшие национальные единицы, такие как старые русские, английские и т.п. Кроме того, к этой группе относятся единицы, используемые в большей или меньшей мере до настоящего времени: морская миля, карат и др.

В дальнейшем, рассматривая единицы той или иной величины, мы наряду с единицами, входящими в СИ и СГС, будем давать и наиболее распространенные внесистемные единицы и приведем их соотношения с системными единицами.

Глава 2

РАЗМЕРНОСТИ

§ 2.1. Определение размерностей

Наличие различных систем ставит задачу перевода одних единиц в другие. Очевидно, изменение основных единиц должно приводить и к изменению производных. Так, например, если вместо метра за единицу пути возьмем километр, то получим единицу скорости километр в секунду, в 1000 раз большую, чем метр в секунду. Взяв в качестве единицы времени час и сохранив в качестве единицы пути метр, получим единицу скорости метр в час, в 3600 раз меньшую, чем метр в секунду. Наконец, можно получить единицу скорости километр в час, равную 1000/3600 м/с $\approx$ 0,278 м/с, если в качестве единицы длины взять километр, а в качестве единицы времени – час. Мы видим, что всякое изменение основных единиц изменяет соответственно производную единицу.

Желательно найти такое соотношение, которое позволяло бы определить, как с изменением каждой из основных единиц изменится производная единица интересующей нас величины. Такой вопрос впервые поставил в 1822 г. французский математик и физик Ж. Фурье в своей монографии "Аналитическая теория тепла". В этой монографии он ввел понятие и термин "размерность". Согласно этому понятию, если при изменении основной единицы в n раз производная единица изменяется в n^p раз, то эта производная единица обладает размерностью p по отношению к соответствующей основной единице. Фурье в качестве величин, единицы которых он принял за основные, установил длину, время и температуру. При этом он определил размерности величин, входящих в выведенные им уравнения. Так, для объемной теплоемкости размерность относительно длины оказывается равной "–3", относительно времени – "0" и относительно температуры – "–1".

В СИ и СГС единицы длины, массы и времени являются основными. Поэтому если производная единица величины A изменяется пропорционально степени p изменения единицы длины, пропорционально степени q изменения единицы массы и степени r изменения единицы времени, то единица величины A обладает размерностью p относительно единицы длины, размерностью q относительно единицы массы и размерностью r относительно единицы времени. Символически это записывают в виде

$$[A] = \mathrm{L}^p \mathrm{M}^q \mathrm{T}^r, \qquad (2.1)$$

где квадратные скобки, в которые заключен символ величины A, означают, что речь идет о размерности единицы этой величины относительно единиц длины, массы и времени, а символы L, M и T представляют собой обобщенные единицы этих величин, без указания конкретного размера единиц*). В качестве единицы длины можно принять метр, сантиметр, милю, в качестве единицы массы – килограмм, грамм, тонну, карат, в качестве единицы времени – секунду, час, сутки.

---

*) Наряду с обозначением размерности заключением символа величины в квадратные скобки применяется обозначение $\dim A$ (сокращение французского слова dimension – размер). Учитывая, что практически во всей советской учебной и научной литературе применяется обозначение размерностей квадратными скобками – обозначение во многих отношениях более удобное, мы приняли его и в настоящей книге.

Формулу (2.1), представляющую собой размерность единицы величины A, называют кратко "размерность A", подобно тому, как вместо выражения "величина, единица которой принята в качестве основной", применяется сокращенное выражение "основная величина". Термин "размерность физической величины" является распространенным; он узаконен, и мы будем им в дальнейшем пользоваться, со сказанным выше его пониманием.

Если в двух системах размерности какой-либо величины совпадают, но размеры основных единиц различны, то отношение производных единиц определится непосредственно размерностью, в которую следует вместо L, M и T подставить отношения соответствующих основных единиц. Например, если каждую из основных единиц увеличить в 10 раз, то производная единица увеличится в 10^{p+q+r} раз. Если производная единица не зависит от размера какой-либо из основных единиц, то говорят, что данная производная единица обладает нулевой размерностью по отношению к соответствующей основной единице. Может оказаться, что размер производной единицы не зависит ни от одной из основных единиц. Соответствующую величину называют безразмерной или величиной нулевой размерности по отношению ко всем величинам, принятым за основные.

Размерности могут служить для проверки уравнений, выражающих физические закономерности. Если размерность одной или нескольких величин по отношению хотя бы к одной из основных единиц не совпадает с размерностями других величин, стоящих в уравнении, то можно утверждать, что уравнение ошибочно. Действительно, предположим, что при каком-то выборе размера основных единиц левая и правая части уравнения оказываются численно равными. Пусть при этом размерности левой и правой части уравнения по отношению к одной из основных единиц не совпадают. Изменим в какое-то число раз размер этой единицы. Очевидно, что левая и правая части уравнения изменятся в разное число раз и прежнее равенство частей нарушится.

Требование равенства размерностей всех членов уравнения, описывающего любое физическое явление, любую физическую закономерность, по существу, совпадает с требованием, чтобы размерность записывалась только для таких величин, для которых удовлетворяется условие абсолютного значения относительных количеств. При этом оказывается, что при любом выборе основных единиц размерность производной единицы представляет собой одночлен, состоящий из произведений размерностей основных единиц в некоторых степенях, причем эти степени могут быть как положительными, так и отрицательными, как целыми, так и дробными.

Докажем это положение, используя для наглядности конкретный пример с определением размерности силы. Пусть два тела одинаковой массы в течение некоторого времени подвержены действию разных сил. Начальные скорости обоих тел равны нулю. В результате тела пройдут разные расстояния, зависящие от действующих сил. Поскольку массы тел и время движения в обоих случаях одинаковы, силы и пройденные расстояния однозначно связаны друг с другом. Будем считать единицу длины основной, т.е. выбираемой произвольно, а единицу силы – производной, т.е. зависящей от выбора единицы длины. Обозначим числовые значения сил F_1 и F_2, а пройденных путей l_1 и l_2. Существующие связи между F_1 и l_1 и между F_2 и l_2 запишем в общем виде:

$$F_1 = f(l_1), \ F_2 = f(l_2). \tag{2.2}$$

Из условия абсолютного значения относительных количеств вытекает, что отношение

$$F_1/F_2 = f(l_1)/f(l_2) \tag{2.3}$$

не зависит от выбора единиц. Поэтому единицу длины можно увеличить или уменьшить в любое число раз. Уменьшим эту единицу в x раз. Соответственно числа, измеряющие пути l_1 и l_2, увеличатся в x раз. Таким образом,

$$F_1/F_2 = f(xl_1)/f(xl_2) = f(l_1)/f(l_2). \tag{2.4}$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$f(xl_1) = \frac{f(l_1)}{f(l_2)} f(xl_2). \tag{2.5}$$

Продифференцируем обе части по x:

$$l_1 \frac{df(xl_1)}{d(xl_1)} = \frac{f(l_1)}{f(l_2)} l_2 \frac{df(xl_2)}{d(xl_2)}. \tag{2.6}$$

Так как число x совершенно произвольно, то (2.6) должно быть справедливо и при $x = 1$. В этом случае (2.6) можно переписать в виде

$$\frac{l_1}{f(l_1)} \frac{df(l_1)}{dl_1} = \frac{l_2}{f(l_2)} \frac{df(l_2)}{dl_2}. \tag{2.7}$$

Это равенство должно выполняться при любых l. Таким образом,

$$\frac{l}{f(l)} \frac{df(l)}{dl} = a, \tag{2.8}$$

где a – некоторая постоянная величина. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$f(l) = \mathcal{K}_1 l^a. \tag{2.9}$$

Если изменить условие задачи и определить числовое значение двух сил, под действием которых два тела разной массы за одно и то же время пройдут одинаковые расстояния, то, повторяя все рассуждения, получим

$$f(m) = \mathcal{K}_2 m^b. \tag{2.10}$$

Подобным же образом для двух тел равной массы, прошедших равные расстояния за разные промежутки времени,

$$f(t)=\mathscr{K}_3 t^c. \tag{2.11}$$

Общую зависимость можно представить в виде

$$f(l, m, t)=\mathscr{K} l^a m^b t^c. \tag{2.12}$$

Коэффициент $\mathscr{K}$ представляет собой число, не зависящее от выбора единиц.

Следует ли из полученного результата, что все закономерности, связывающие между собой различные физические величины, могут иметь только степенной характер? Отнюдь нет. Мы ведь знаем, что многие физические законы выражаются тригонометрическими, показательными и другими неалгебраическими функциями. Из соотношения (2.12) вытекает лишь, что изменение единиц величин, входящих в аргументы соответствующих функций, не должно изменять единиц зависимых величин. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы единицы величин, входящих в аргументы неалгебраических функций, образовывали безразмерную комбинацию, т.е. не изменялись при любом изменении единиц, принятых за основные.

Поясним сказанное примером. Пусть конденсатор емкостью C, заряженный до разности потенциалов U, разряжается через сопротивление R. Временная зависимость тока разряда имеет, как известно, экспоненциальный характер:

$$I=\frac{U}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \tag{2.13}$$

Для того чтобы равенство (2.13) сохранялось при любом выборе единиц, необходимо, чтобы показатель степени был безразмерным, а это значит, что произведение RC должно обладать размерностью времени; это произведение получило и соответствующее название: "постоянная времени контура". В идеальном колебательном контуре Томсона аналогичная постоянная времени образуется комбинацией $\sqrt{LC}$.

Может возникнуть вопрос: как быть в том случае, если установить в рассмотренном примере единицы емкости и сопротивления в качестве независимых, основных единиц? Очевидно, в этом случае в показатель степени, кроме указанных величин, войдет имеющая размерность постоянная величина. Подобный пример мы имеем в барометрической формуле, выражающей зависимость давления воздуха от высоты. Эту формулу можно представить в виде

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_Б T}\right), \tag{2.14}$$

где h – высота, m – масса молекулы, g – ускорение свободного падения, T – температура, а $k_Б$ – постоянная Больцмана.

При образовании размерностей производных единиц мы будем пользоваться следующими теоремами.

1. Если числовое значение величины C равно произведению числовых значений величин A и B, то размерность C равна произведению размерностей A и B:

$$[C] = [A] \cdot [B]; \tag{2.15}$$

иначе говоря, если

$$[A] = \mathrm{L}^{p_a}\,\mathrm{M}^{q_a}\,\mathrm{T}^{r_a}, \qquad [B] = \mathrm{L}^{p_b}\,\mathrm{M}^{q_b}\,\mathrm{T}^{r_b},$$

то

$$[C] = \mathrm{L}^{p_a+p_b}\,\mathrm{M}^{q_a+q_b}\,\mathrm{T}^{r_a+r_b}. \tag{2.16}$$

2. Если числовое значение величины C равно отношению числовых значений величин A и B, то размерность C равна отношению размерностей A и B:

$$[C] = [A/B] = [A]/[B], \tag{2.17}$$

или

$$[C] = \mathrm{L}^{p_a - p_b}\, \mathrm{M}^{q_a - q_b}\, \mathrm{T}^{r_a - r_b}. \qquad (2.18)$$

3. Если числовое значение величины C равно степени n числового значения величины A, то размерность C равна степени n размерности A:

$$[C] = [A^n] = [A]^n. \qquad (2.19)$$

При

$$[A] = \mathrm{L}^p\, \mathrm{M}^q\, \mathrm{T}^r$$

имеем

$$[C] = \mathrm{L}^{pn}\, \mathrm{M}^{qn}\, \mathrm{T}^{rn}. \qquad (2.20)$$

Доказательства всех этих теорем очень просты, вследствие чего мы ограничимся лишь тем, что докажем первую из них.

Если числовое значение величины C равно произведению числовых значений величин A и B, то это значит, что при измерении этих величин единицами c_1, a_1 и b_1 мы будем иметь

$$C_1 = A_1 B_1, \qquad (2.21)$$

где

$$C_1 = C/c_1, \quad A_1 = A/a_1, \quad B_1 = B/b_1. \qquad (2.22)$$

Соответственно при измерении тех же величин единицами c_2, a_2 и b_2 получим

$$C_2 = A_2 B_2, \qquad (2.23)$$

где

$$C_2 = C/c_2, \quad A_2 = A/a_2, \quad B_2 = B/b_2. \qquad (2.24)$$

Беря соотношения (2.21) и (2.23) и принимая во внимание (2.22) и (2.24), находим

$$c_2/c_1 = (a_2/a_1)(b_2/b_1). \qquad (2.25)$$

Если

$$a_2/a_1 = L^{p_a} M^{q_a} T^{r_a}, \tag{2.26}$$

$$b_2/b_1 = L^{p_b} M^{q_b} T^{r_b}, \tag{2.27}$$

то

$$c_2/c_1 = L^{p_a+p_b} M^{q_a+q_b} T^{r_a+r_b}, \tag{2.28}$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что таким же путем могут быть доказаны и остальные теоремы.

Важно отметить следующее обстоятельство. Так как способ построения производной единицы включает в себя приравнивание единице (или иному произвольному постоянному числу, не зависящему от размера основных единиц) коэффициента пропорциональности в определяющем уравнении, то это означает, что мы условливаемся считать этот коэффициент безразмерным.

Поясним сказанное примерами.

1. Размерность площади квадрата можно записать в виде

$$[S_{кв}] = [l]^2 = L^2 M^0 T^0, \tag{2.29}$$

или, опуская здесь, как и в дальнейшем, символы основных единиц, стоящие в нулевой размерности, в виде

$$[S_{кв}] = L^2. \tag{2.30}$$

2. Размерность площади круга будет

$$[S_{кр}] = \left[\frac{\pi}{4}\right] [l^2] = L^2, \tag{2.31}$$

поскольку коэффициент $\pi/4$ является постоянным коэффициентом, не зависящим от размера основных единиц, а потому безразмерным. Поэтому размерность площади любой геометрической фигуры независимо от ее формы будет

$$[S] = L^2. \tag{2.32}$$

3. Размерность скорости можно определить из формулы скорости равномерного движения:

$$[v] = [l]/[t] = \mathrm{LT}^{-1}. \qquad (2.33)$$

4. Размерность ускорения определяется из формулы ускорения равноускоренного движения:

$$[a] = [v_2 - v_1]/[t] = \mathrm{LT}^{-2}. \qquad (2.34)$$

Для наглядности воспользуемся последней формулой с тем, чтобы определить, как изменится единица ускорения, если от измерения длины в метрах и времени в секундах перейти к измерению длины в километрах и времени в минутах. При таком переходе единица длины увеличивается в 1000 раз, а единица времени – в 60 раз. Согласно формуле (2.34) единица ускорения изменится в $1000/60^2 = 10/36$ раза, т.е. новая единица ускорения будет равна 0,278 старой.

5. Размерность кинетической энергии, определяемой формулой

$$W_\text{к} = mv^2/2, \qquad (2.35)$$

будет, очевидно, равна (в СИ и СГС)

$$[W_\text{к}] = \mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}. \qquad (2.35\text{a})$$

Из последней формулы, в частности, вытекает, что если перейти при измерениях длины от сантиметров к метрам, а при измерении массы от граммов к килограммам и сохранить единицу времени секунду, то единица кинетической энергии увеличивается в $(100)^2 \cdot 1000 = 10^7$ раз.

6. Второй закон Ньютона, записанный в форме

$$Ft = mv_2 - mv_1, \qquad (2.36)$$

где произведение Ft называется импульсом силы, а mv – импульсом или количеством движения*) тела,

---

*) Термин "количество движения" применяется в настоящее время преимущественно в теоретической механике. В теории относительности, квантовой механике, атомной и ядерной физике обычно пользуются термином "импульс".

определяет размерность силы:

$$[F] = \mathrm{LMT}^{-2}. \qquad (2.36а)$$

В дальнейшем, исследуя единицы производных величин, мы всегда будем обращаться к размерностям. Размерность производной единицы часто определяет и ее наименование, и ее символическое обозначение. Например, единица скорости метр в секунду обозначается м/с, единица площади квадратный метр – $м^2$, и т.д.

§ 2.2. Перевод размерностей при разном выборе основных величин

Если, не меняя определяющих уравнений, изменить подбор величин, единицы которых принимаются в качестве основных, то соответственно изменится и вид формул, выражающих размерности производных единиц. В механике определяющим уравнением является второй закон Ньютона, математическое выражение которого можно написать в виде

$$\boldsymbol{F} = \mathcal{K} m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2}\ , \qquad (2.37)$$

где $\mathcal{K}$, как и раньше, коэффициент, зависящий от выбора единиц величин, входящих в уравнение. На основании этого закона можно по-разному строить системы единиц, поскольку в уравнение (2.37) входят четыре величины: сила, масса, длина и время. Можно, например, для всех величин ввести независимые единицы. В этом случае $\mathcal{K}$ приобретет размерность и его числовое значение будет зависеть от размеров выбранных основных единиц, причем это значение должно быть определено экспериментально. Можно $\mathcal{K}$ сделать безразмерным и приравнять, как обычно, единице. В этом случае любые три из четырех величин можно сделать основными, а четвертая окажется производной. При этом возможны следующие системы: FML (единица времени производная), FMT (единица длины производная), LFT (единица массы производная) и LMT (единица силы производная). Первые две системы отсутствуют в метрологии, третья соответствует МКГСС и последняя – СИ и СГС.

Для перевода размерности какой-либо величины из одной системы в другую следует заменить размерность соответствующей основной единицы ее размерностью, выраженной в другой системе.

Поясним это примерами.

1. Перевести размерность работы из системы LMT в систему LFT.

Размерность работы в LMT

$$[A] = L^2MT^{-2}. \tag{2.38}$$

Размерность массы в LFT

$$[m] = M = L^{-1}\ FT^2. \tag{2.39}$$

Подставляя (2.39) в (2.38), получим размерность работы в LFT.

$$[A] = L^2T^{-2} \cdot L^{-1}FT^2 = LF. \tag{2.38 a}$$

2. Перевести размерность давления из системы FML в систему FMT.

Размерность давления в FML

$$[p] = FL^{-2} \tag{2.40}$$

(такая же размерность в LFT). Размерность длины в FMT

$$[L] = FM^{-1}T^2. \tag{2.41}$$

После подстановки (2.41) в (2.40) получим размерность давления в FMT:

$$[p] = F^{-1}M^2T^{-4}. \tag{2.40a}$$

Если в эту формулу подставить размерность силы в LMT, то получим известную размерность давления в СИ и СГС.

§ 2.3. Перевод размерностей при разных определяющих уравнениях

При установлении производной единицы с помощью определяющего уравнения (т.е. математической формулировки, определения или закона), связывающего данную величину с величинами, принятыми за основные (или ранее определенными), полагают равным единице или другому постоянному числу стоящий в уравнении коэффициент пропорциональности. Это значит, что мы лишаем его размерности относительно основных единиц, или, что то же, придаем ему нулевую размерность. Иначе говоря, мы договариваемся считать коэффициент неизменным при любом изменении основных единиц при условии, что определяющее уравнение остается неизменным. Если же это условие не соблюдается и мы для определения производной единицы используем другое определяющее уравнение, то соответственно может измениться и коэффициент пропорциональности. Так, например, если для определения единицы площади пользоваться не площадью квадрата, а площадью круга, то, как мы видели (§ 1.4), коэффициент пропорциональности в формуле площади квадрата становится равным не единице, а $4/\pi$, поскольку коэффициент пропорциональности принимается равным единице в новом определяющем уравнении (формула площади круга).

Переход от квадратных к круглым единицам площади заставляет соответственно изменить коэффициенты пропорциональности во всех формулах, относящихся к измерению площадей. При этом размерность площади

$$[S] = L^2 \qquad (2.42)$$

останется неизменной, поскольку мы и здесь используем, по сути дела, ту же теорему о связи площади геометрических фигур с их линейными размерами и считаем коэффициент пропорциональности в частном выражении этой теоремы (формула площади круга) равным единице.

Разобранный пример можно рассматривать даже не как переход от одного определяющего уравнения к другому, а как замену в формуле площади квадрата коэффициента пропорциональности, принятого раньше за единицу, на $4/\pi$.

Возможно, однако, такое изменение определяющего уравнения, которое сделает коэффициент пропорциональности размерным, т.е. зависящим от размера основных единиц. Наиболее наглядно это можно видеть на примере установления единицы силы как производной единицы в системах, в которых основными величинами являются длина, масса и время. При обычном определении единицы силы с помощью второго закона Ньютона мы получили размерность силы (см. (2.36а))

$$[F] = \mathrm{LMT}^{-2}. \tag{2.43}$$

Если подставить эту размерность в выражение закона всемирного тяготения (1.10), то для гравитационной постоянной*) получится размерность

$$[G] = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}. \tag{2.44}$$

Наличие размерности у гравитационной постоянной означает, что ее числовое значение зависит от выбора основных единиц. Для определения этой зависимости следует вспомнить, что размерность показывает, как изменяется производная единица при изменении основных единиц. Поэтому, вводя условно "единицу гравитационной постоянной", можно на основании (2.44) сказать, что эта "единица" изменяется прямопропорционально кубу единицы длины, обратно пропорционально единице массы и квадрату единицы времени. Поскольку

*) Здесь и далее мы будем употреблять для гравитационной постоянной рекомендуемое обозначение G.

числовое значение величины при изменении единиц, ее измеряющих, меняется в обратном отношении (см. (1.1)), то, следовательно, числовое значение гравитационной постоянной будет обратно пропорционально кубу единицы длины и прямо пропорционально единице массы и квадрату единицы времени. Так, если при основных единицах метре, килограмме и секунде гравитационная постоянная численно равна $6{,}67 \cdot 10^{-11}$, то при переходе к основным единицам сантиметру, грамму и секунде она примет значение $6{,}67 \cdot 10^{-8}$.

Если для определения единицы силы использовать не второй закон Ньютона, а закон всемирного тяготения, то при этом мы сделаем гравитационную постоянную безразмерной, т.е. не зависящей от основных единиц, а равной какому-нибудь постоянному числу, например единице. При таком определении размерность силы станет равной

$$[F] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^{2} \tag{2.45}$$

и инерционная постоянная, которая ранее принималась равной единице и лишенной размерности, приобретает размерность:

$$[\mathscr{K}_i] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}\mathrm{T}^{2}. \tag{2.46}$$

Изменение размерности силы и появление размерной инерционной постоянной при одновременном исчезновении размерной гравитационной постоянной приведет, разумеется, к иному математическому выражению законов и определений в области механики и к изменению размерностей. Так, например, размерность работы, определяемой, как и раньше, произведением силы на путь и на косинус угла между их направлениями, будет уже не

$$[A] = \mathrm{L}^{2}\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2},$$

а

$$[A] = [F]\,[l] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^{2}\mathrm{L} = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{M}^{2}. \tag{2.47}$$

Эту же размерность работы можно получить и иным путем. Если последовательно в новой системе вывести связь между работой и величиной, образованной полупроизведением массы на квадрат скорости (величиной, носившей ранее название "живой силы"), то эта связь примет вид

$$A = \mathcal{K}_i \left(\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} \right). \tag{2.48}$$

Подставляя в правую часть размерности массы, скорости и инерционной постоянной (2.46), получим

$$[A] = L^{-3}MT^2 \cdot M \cdot (LT^{-1})^2 = L^{-1}M^2. \tag{2.48a}$$

Таким образом, в тех случаях, когда разные системы отличаются друг от друга выбором определяющих уравнений, необходимо учитывать, что коэффициенты пропорциональности, которые в одной системе считаются безразмерными (и обычно равными единице), в другой системе приобретают размерность. При переходе от одной системы к другой следует для определения размерностей заменить безразмерный коэффициент размерным или наоборот.

Если сократить число основных единиц (это, например, можно сделать, объединяя второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения в общий закон, аналогичный третьему закону Кеплера), то в этом случае становятся равными единице, а следовательно, безразмерными и гравитационная и инерционная постоянные, а в формулах сохраняются лишь размерности длины и времени (см. (1.12)). Перевод размерностей от систем с тремя к системе с двумя основными единицами может быть при этом произведен, если в соответствующих формулах заменить размерность массы ее выражением, полученным из формулы, объединяющей второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения. Записав эту формулу в виде

$$a = \mathcal{K}\frac{m}{r^2} \qquad (2.49)$$

и считая $\mathcal{K}$ безразмерным (например, равным единице), находим размерность для единицы массы

$$[m] = L^3T^{-2}. \qquad (2.50)$$

Если это выражение подставить в любую из размерностей силы, выведенную как из второго закона, так и из закона всемирного тяготения, получатся, разумеется, одинаковые размерности. Действительно,

$$[F] = LMT^{-2} = L^4T^{-4}, \qquad (2.51)$$

$$[F] = L^{-2}M^2 = L^4T^{-4}. \qquad (2.52)$$

То же относится и к размерностям единиц остальных величин, относящихся к механике. Приведем для иллюстрации некоторые из них. При подстановке в (2.47) и (2.48а) размерности массы (2.50) получаем для размерности работы и энергии

$$[A] = L^5T^{-4}. \qquad (2.53)$$

Аналогично, размерности импульса силы и импульса тела

$$[Ft] = [mv] = L^4T^{-3}. \qquad (2.54)$$

§ 2.4. Определение связи между единицами разных систем

Перевод единиц одной системы в единицы другой осуществляется наиболее просто в том случае, когда обе системы построены на одних и тех же определяющих уравнениях и на одних и тех же основных величинах, так что основные единицы отличаются только размером. Из сказанного выше вытекает, что так как при этом размерность производной единицы в обоих случаях одна и та же, то достаточно в размерность подставить отношения размеров основных единиц, которые должны быть заданы либо определением, либо опытным путем, например сравнением эталонов соответствующих единиц.

В дополнение к приведенным выше примерам установим соотношение двух единиц силы, определенных на основании второго закона Ньютона, при следующих основных единицах: "сантиметр, грамм, секунда" и "фут, фунт*), минута". Соотношения основных единиц следующие:

1 фут = 30,48 см (сравнение эталонов),

1 фунт = 409,5 г (сравнение эталонов),

1 мин = 60 с (определение).

На основе размерности силы

$$[F] = \mathrm{LMT}^{-2}$$

определяем соотношение единиц силы:

$$\frac{\text{единица системы "фут, фунт, минута"}}{\text{единица системы "сантиметр, грамм, секунда"}} =$$

$$= \frac{30{,}48 \cdot 409{,}5}{(60)^2} = 3{,}467.$$

Сложнее обстоит дело в том случае, когда при одном и том же определяющем уравнении приняты в качестве основных единицы разных величин, как это имеет место в случаях, рассмотренных в § 2.2.

Поскольку по крайней мере одна из величин, которая в одной из систем принята за основную, является в другой системе производной и наоборот, следует уста-

---

*) Имеются в виду единицы старой русской системы мер.

новить связь между соответствующими единицами. Очевидно, эта связь может быть установлена только с помощью эксперимента. В механике такой эксперимент может основываться на втором законе Ньютона. Удобно при этом взять системы LMT и LFT, поскольку первая соответствует СИ и СГС, а вторая – МКГСС, хотя и изъятой из употребления, но единица силы которой – килограмм-сила (кгс) еще достаточно широко известна.

Согласно второму закону Ньютона, если коэффициент в формуле (2.1) приравнять единице, единица силы сообщает телу, масса которого равна единице, единицу ускорения. Разумеется, предполагается, что сила, масса и ускорение выражены в одной системе единиц. Если провести опыт, в котором сила, равная единице в одной системе, приложена к телу, масса которого равна единице в другой системе, и измерить ускорение, приобретаемое телом, то можно найти соотношение либо между единицами силы, либо между единицами массы этих систем. Поскольку все тела падают в данной точке земного шара с одинаковым ускорением, то сила притяжения к Земле в каждой точке равна произведению массы тела на ускорение свободного падения. Последнее несколько различно в разных точках земного шара, возрастая от значения 9,7805 м/с^2 на экваторе до 9,8322 м/с^2 на полюсе. Ускорение в месте хранения эталонной гири килограмма (Севр) равно 9,80665 м/с^2. Это значение стандартизовано как постоянная величина, не подлежащая изменению независимо от уточнения измерений, и получило название нормального ускорения свободного падения*). Поскольку сила, сообщающая телу, масса которого равна килограмму, ускорение 1 м/с^2, равна одному ньютону (§ 1.3), то "нормальный

*) В дальнейшем для ускорения свободного падения будем принимать приближенное значение 9,81 м/с^2.

вес" килограмма равен 9,81 Н. В то же время сила, с которой килограмм притягивается к Земле в месте хранения эталона килограмма, является единицей силы в LFT и называется килограмм-силой (кгс). Отсюда следует, что

1 кгс = 9,81 Н.

Разумеется, в таком же отношении находятся и единицы массы:

1 ед. массы LFT = 9,81 кг.

Обратные соотношения:

1 Н = 0,102 кгс,

1 кг = 0,102 ед.массы LFT.

В написанных равенствах в левой части стоят единицы одной системы, а в правой – их значения, выраженные в единицах другой системы.

Имея эти равенства, можно найти соотношения между единицами всех величин обеих систем. При этом можно пользоваться как размерностями соответствующих величин, так и непосредственно уравнениями, которыми эти величины связаны с основными либо с производными, для которых единицы определены ранее. Очевидно, что кинематические величины, в размерности которых не входят размерности как массы, так и силы, будут измеряться одинаковыми единицами в обеих системах. Отличаться будут единицы статических и динамических величин. Поскольку в размерности практически всех этих величин размерности массы в LMT и силы в LFT входят в первой степени, то соотношения между единицами этих величин такие же, как и между единицами массы и силы. Так, например, единицы работы связаны между собой соотношением

1 кгс · м = 9,81 Дж,

единицы давления –

$$1 \text{ кгс/м}^2 = 9{,}81 \text{ Па}$$

(Па – паскаль – единица давления СИ, равная одному ньютону на квадратный метр).

Рассмотрим еще в качестве примера соотношение между единицами LMT и FMT. Пусть в первой основными являются метр, килограмм и секунда, а во второй – килограмм-сила, килограмм и секунда. Так как килограмм-сила сообщает массе один килограмм ускорение 9,81 м/с^2, то единицей длины в FMT будет 9,81 м. Отсюда легко получить значения других единиц FMT. Это можно сделать, подставляя соответствующие значения в определяющие уравнения либо в размерности.

Так, например, единица давления FMT находится из уравнения

$$p = \frac{F}{S} = \frac{9{,}81 \text{ Н}}{(9{,}81 \text{ м})^2} = 0{,}102 \text{ Па} \qquad (2.55)$$

и из размерности

$$[p] = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{MT}^{-2}, \qquad (2.55\text{ а})$$

а именно

$$1 \text{ ед. давления FMT} = (9{,}81)^{-1} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}102 \text{ Па}.$$

Единица работы может быть найдена из определяющего уравнения

$$A = F \cdot l = 9{,}81 \text{ Н} \cdot 9{,}81 \text{ м} = 96{,}2 \text{ Дж} \qquad (2.56)$$

и из размерности

$$[A] = \mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}, \qquad (2.56\text{а})$$

а именно

$$1 \text{ ед. работы FMT} = (9{,}81)^2 \cdot 1 \cdot 1 = 96{,}2 \text{ Дж}.$$

Такое же соотношение будет иметь и единица мощности LMT и FMT.

Поскольку определена единица длины, а единица массы одинакова в обеих системах, соотношение между единицами разных величин может быть получено, если найти по размерностям этих величин отношение единиц длины в тех степенях, в которых размерность длины входит в эти единицы.

Так, из размерности объема следует, что единица FMT в $9{,}81^3 = 943$ раза больше кубического метра, а, следовательно, единица плотности в таком же отношении меньше. Динамический момент инерции, определяемый формулой

$$J = \int_V r^2 dm, \tag{2.57}$$

измеряется единицей FMT, которая в 96,2 раза больше единицы LMT ($кг \cdot м^2$).

Перейдем теперь к рассмотрению перевода единиц в наиболее сложном случае, когда в разных системах для определения производной единицы используются разные определяющие уравнения. При этом мы ограничимся лишь тем представляющим наибольший интерес случаем, когда основные величины в обеих системах одни и те же.

Пусть мы имеем некоторую величину A, единицы которой a_1 и a_2 в двух разных системах (основанных на разных законах) имеют размерности

$$[A_1] = L^{p_1} M^{q_1} T^{r_1}, \tag{2.58}$$

$$[A_2] = L^{p_2} M^{q_2} T^{r_2},$$

причем числа A_1 и A_2, выражающие величину A в этих единицах, находятся в следующем соотношении:

$$A_1 = \mathcal{K} A_2. \tag{2.59}$$

Здесь $\mathcal{K}$ – коэффициент пропорциональности, являющийся величиной уже не безразмерной, а зависящей от выбора основных единиц.

Единица, которой "измеряется" $\mathscr{K}$, имеет, очевидно, размерность

$$[\mathscr{K}] = \frac{[A_1]}{[A_2]} = \mathrm{L}^{p_1 - p_2}\mathrm{M}^{q_1 - q_2}\mathrm{T}^{r_1 - r_2}. \tag{2.59 a}$$

Так как числовые значения величин в разных единицах и единицы этих величин находятся в обратном отношении, то можно написать

$$a_1 = \frac{1}{\mathscr{K}} a_2. \tag{2.60}$$

Отношение размерностей величины A в первой и второй системах дает размерность коэффициента $\mathscr{K}$. Таким образом, знание числового значения этого коэффициента в какой-либо системе единиц позволит определить его числовое значение в любой другой системе и тем самым – соотношение между соответствующими единицами данной величины A.

Поясним вышесказанное на разобранном нами примере силы. При измерении силы инерционной единицей закон всемирного тяготения имеет вид

$$F = G\ \frac{m_1 m_2}{r^2}\ . \tag{2.61}$$

Если основные единицы в обеих системах одинаковы, то стоящее в правой части выражение $m_1 m_2 / r^2$ представляет собой ту же силу взаимного тяготения, но измеренную в гравитационных единицах. Следовательно, обозначая число, измеряющее силу в инерционной системе, через F_i, а в гравитационной – через F_g, можно написать

$$F_i = GF_g. \tag{2.62}$$

С изменением основных единиц числа F_i и F_g будут изменяться, но не в одинаковой степени. Поэтому коэффициент G будет изменять свое числовое значение. Для того чтобы определить характер этого изменения, обратимся к размерностям

$$[F_i] = \mathrm{LMT}^{-2}, \ [F_g] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^2, \qquad (2.63)$$

откуда

$$[G] = \frac{[F_i]}{[F_g]} = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2} \qquad (2.64)$$

Как мы уже видели (§2.3), числовое значение гравитационной постоянной обратно пропорционально кубу единицы длины и прямо пропорционально единице массы и квадрату единицы времени.

Напомним, что при основных единицах метре, килограмме и секунде $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$, а при основных единицах сантиметре, грамме и секунде $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$. Так как инерционная и гравитационная единицы силы (обозначим их φ_i и φ_g) находятся в соотношении

$$\varphi_i = \frac{1}{G}\,\varphi_g, \qquad (2.65)$$

то при измерении массы в килограммах и расстояния в метрах

$$\varphi_i = \frac{1}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}\,\varphi_g = 1{,}5 \cdot 10^{10}\,\varphi_g, \qquad (2.66)$$

а при измерении массы в граммах и расстояния в сантиметрах соответственно

$$\varphi_i = \frac{1}{6{,}67 \cdot 10^{-8}}\,\varphi_g = 1{,}5 \cdot 10^{7}\,\varphi_g. \qquad (2.67)$$

Вводя обозначения единиц силы, можно вместо (2.66) и (2.67) написать

$$1\ \text{Н} = 1{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{кг}^2/\text{м}^2 = 1{,}5 \cdot 10^{12}\ \text{г}^2/\text{см}^2,$$

$$1\ \text{дин} = 1{,}5 \cdot 10^{7}\ \text{г}^2/\text{см}^2.$$

Без большого труда может, очевидно, быть определено соотношение единиц и в том случае, если в обеих системах размер основных единиц различен. Наиболее просто и наглядно это можно сделать, если предварительно перевести одну из единиц в систему с теми же основными величинами, но с размерами основных единиц такими, как во второй системе.

Само собой разумеется, что все подобные переводы могут быть осуществлены при том условии, что в той системе, в которой присутствует размерный коэффициент пропорциональности, числовое значение последнего известно либо непосредственно, либо может быть получено переводом из другой системы с такими же определяющими уравнениями.

§ 2.5. Составление переводных таблиц

Для того чтобы не переводить при каждом расчете одни единицы в другие, целесообразно составить таблицы, с помощью которых можно величину, измеренную одной единицей, выразить через любую другую единицу той же величины. При этом для каждой величины потребуется специальная таблица перевода. Слева в такой таблице располагаются единицы, которые нужно выразить в других единицах, а вверху – те единицы, через которые они должны быть выражены.

Возьмем для примера единицы длины. Соответствующая таблица приведена в приложении IV. Число $5{,}40 \cdot 10^{-4}$, стоящее на пересечении строки "1 м" и столбца "м. миля", показывает, что в 1 м содержится $5{,}40 \cdot 10^{-4}$ м. мили.

При составлении переводных таблиц используются либо соотношения, основанные прямо или косвенно на эксперименте (как, например, 1 кгс = 9,81 Н), либо определения (например, 1 м = 100 см), либо сравнения эталонов, либо, наконец, расчеты, подобные приведенным выше и основанные на применении размерностей.

Подобные таблицы перевода, составленные для важнейших рассматриваемых величин и приведенные в конце книги, могут оказаться полезными при решении самых различных задач. В эти таблицы, наряду с единицами разных систем, включен ряд наиболее употребительных внесистемных единиц. Кроме того, учитывая, что некоторые из исключенных стандартами единиц до недавнего времени широко использовались на практике, а некоторые из них фактически существуют и сейчас (например, лошадиная сила), в таблицы включен также и ряд подобных единиц.

§ 2.6. О физическом смысле размерностей

Аналогично существованию противоположных точек зрения на то, как должны строиться системы единиц (в частности, каково должно быть число основных единиц и какие величины следует принять за основные), имеются также противоположные точки зрения на физическую сущность размерностей. Согласно одной из них, размерность выражает физическую связь между данной величиной и основными величинами системы. Противоположная точка зрения предполагает, что единственный смысл размерности – указание на то, как изменится единица данной величины при известном изменении единиц, принятых за основные. Изменение выбора основных величин и определяющих уравнений может коренным образом изменить размерность.

Спор между этими двумя точками зрения продолжается уже около ста лет. В книге П.В. Бриджмена "Анализ размерностей", вышедшей в переводе на русский язык в 1934 г., приведены цитаты, иллюстрирующие мнение разных ученых, отстаивающих как ту, так и другую точки зрения. Сам Бриджмен решительно высказывается в пользу второй.

Очень четко эта точка зрения выражена М. Планком, который пишет: "... ясно, что размерность какой-либо физической величины не есть свойство, связанное с существом ее, но представляет просто некоторую условность, определяемую выбором системы измерений. Если бы на эту сторону вопроса достаточно обращали внимания, то физическая литература, в особенности касающаяся системы электромагнитных измерений, освободилась бы от массы бесплодных разногласий" (*Планк М.* Введение в теоретическую физику. В 3-х ч. – М.: ГТТИ, 1932. – Ч. I: Общая механика, § 28). И "... то обстоятельство, что какая-либо физическая величина имеет в двух различных системах единиц не только разные числовые значения, но даже и различные размерности, часто истолковывалось как некоторое логическое противоречие, требующее себе объяснения, и, между прочим, подало повод к постановке вопроса об "истинной" размерности физических величин . . . нет никакой особой необходимости доказывать, что подобный вопрос имеет не более смысла, чем вопрос об "истинном" названии какого-либо предмета" (там же. – 1933. – Ч. III: Электричество и магнетизм, § 7).

Диаметрально противоположной точки зрения придерживался другой крупный немецкий физик А. Зоммерфельд. Он прямо писал: "Мы не придерживаемся точки зрения Планка, согласно которой вопрос о действительной размерности физической величины лишен смысла". Значительная часть предисловия к т. III курса теоретической физики (*Зоммерфельд А.* Электродинамика. – М.: ИЛ, 1958) посвящена вопросу выдержек из книг Зоммерфельда.

"... Мы находим фундаментальное различие между "силовыми" величинами (Intensitätsgrößen) и величинами "количественными" (Quantitätsgrößen) в самих, взятых нами за основу, уравнениях Максвелла . . .

Рассмотрение, в котором внимание обращено на размерность физических величин, становится плодотворным, если ввести четвертую электрическую единицу, не зависящую от механических единиц... Так как мы различаем размерности силовых и количественных величин, то диэлектрическая и магнитная проницаемости должны обладать размерностью. Вследствие этого их нельзя приравнивать единице и для вакуума".

Из приведенных выдержек видно, что А. Зоммерфельд связывает выбор основных величин и их размерностей с самой сущностью физических величин.

В 1970 г. был опубликован стандарт (ГОСТ 16263–70) "Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения". Этот стандарт, введенный как *рекомендуемый,* содержит около двухсот терминов по различным разделам метрологии. Согласно этому стандарту, **размерность физической величины** определяется как "**выражение, отражающее связь величины с основными величинами системы, в котором коэффициент пропорциональности принят равным 1**".

Как следует из этого определения, размерность связывается с существом физической величины, что совпадает с точкой зрения Зоммерфельда.

Поскольку автор полностью разделяет точку зрения Планка, представляется желательным рассмотреть вопрос о сущности размерностей более подробно.

Прежде всего заметим, что понятие "связь между величинами", взятое абстрактно, лишено смысла, если не указано определяющее уравнение, представляющее математическую запись физического закона или определения, которым соответствующие величины связаны. А так как законы, которыми связываются величины, или их определения могут быть различны, причем в них могут и не входить основные величины, то, следовательно, определение размерности оказывается неоднозначным.

Приведем для примера размерность силы. В § 2.3 мы видели, что в зависимости от определяющего уравнения размерность силы может принимать различный вид — LMT^{-2}, $L^{-2}M^{2}$ и $L^{4}T^{-4}$, причем ни одна из этих формул не является "противозаконной". При этом по первой формуле сила оказывается обратно пропорциональной квадрату времени (неизвестно, какого), по второй — вообще не зависит от времени, а по третьей — обратно пропорциональна четвертой степени времени.

Если бы каждая величина при своем определении непосредственно связывалась с величинами, принятыми за основные, то размерность указывала бы на такую связь. Однако в подавляющем большинстве случаев такая непосредственная связь отсутствует и между основными величинами и производной лежит цепочка (подчас довольно длинная) промежуточных определений.

Так, например, давление (или нормальное, или касательное механическое напряжение) определяется силой, приходящейся на единицу площади поверхности; сила в свою очередь — произведением массы на ускорение; площадь — произведением двух линейных величин; ускорение — производной скорости по времени и скорость — производной перемещения по времени. Эту цепочку можно выразить следующим рядом размерностей:

$$[p] = [F]\cdot[S]^{-1} = \mathrm{M}\cdot[a]\cdot\mathrm{L}^{-2} = \mathrm{M}\cdot[v]\cdot\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathrm{L}^{-2} =$$

$$= \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathrm{L}^{-2} = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}. \qquad (2.68)$$

В разультате размерность приобрела вид, в котором трудно усмотреть наличие связи с основными величинами. Действительно, вряд ли можно найти разумную трактовку наличия в размерности таких статических величин, как давление и механическое напряжение, размерности времени, стоящей в минус второй степени. И уж, конечно, конкретных представлений не вызывают размерности электрических единиц в СГС, в которых символы размерности основных единиц стоят в дробных степенях.

В процессе образования размерности производной величины, при определении размерностей промежуточных величин, показатели степени складываются, вычитаются, некоторые обращаются в нуль, так что в итоге размерность может приобрести довольно причудливый вид. Для примера приведем размерность электрической емкости в СИ:

$$[C] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{4}\mathrm{I}^{2}. \tag{2.69}$$

Из всех основных величин, входящих в эту размерность, емкость может быть связана только с линейными размерами, однако ни у какого проводника электрическая емкость, разумеется, не обратно пропорциональна площади.

Об ограниченном содержании размерности говорит и то, что в ряде случаев единицы разных величин обладают одинаковой размерностью. Это, конечно, ни в коем случае не следует трактовать в том смысле, что эти величины имеют общую физическую природу. В частности, это относится к величинам, единицы которых, согласно их определению, оказываются безразмерными. Здесь можно назвать угол (плоский и телесный), коэффициент трения, добротность колебательной системы и т.д.

В некоторых отдельных случаях совпадение размерностей позволяет предполагать наличие связи между различными величинами и подчинение их общим закономерностям. Так, совпадение размерностей давления и объемной плотности энергии находит отражение в том факте, что давление идеального газа пропорционально объемной плотности энергии поступательного движения его молекул. В СГС размерность емкости совпадает с размерностью длины, что можно трактовать в том смысле, что емкость изолированных проводников одинаковой формы пропорциональна их линейным размерам. Однако подобных примеров можно привести немного, и в большинстве случаев размерность не дает наглядного представления о связи данной величины с другими величинами, в частности с принятыми за основные.

В настоящее время практически во всей физической литературе под размерностью понимается только обобщенное выражение зависимости единицы данной величины от основных единиц при принятом определяющем уравнении.

Наряду с использованием размерностей для перевода единиц из одной системы в другую и установления соотношения между единицами, их применяют для проверки правильности формул, полученных в результате того или иного теоретического вывода. Неизменность размерности в рамках данной системы требует, чтобы размерности в левой и правой частях любого равенства, связывающего различные физические величины (или, точнее, числа, которыми эти величины выражаются), были одинаковы. В противном случае при переходе от одних единиц к другим равенство нарушилось бы. Поэтому, получив в результате вывода или решения задачи формулу, выражающую зависимость интересующей нас величины от других величин, следует проверить совпадение размерностей левой и правой частей равенства. Если эти размерности не совпадают, то можно утверждать, что при выводе допущена ошибка и равенство является неверным. Разумеется, совпадение размерностей еще не является гарантией того, что полученное уравнение верно.

§ 2.7. Краткие выводы

В гл. 1 и 2 были изложены принципы построения систем основных и производных единиц и размерностей, а также методы перехода от одной системы к другой.

Для удобства читателей дается краткая сводка содержания этих глав, которая может быть сформулирована в виде следующих выводов.

1. Измерение представляет собой экспериментальную операцию, в результате которой производится сравнение данной величины с другой однородной величиной, принятой за единицу.

2. Условием объективного измерения и установления единиц физических величин является возможность получения абсолютного значения относительных количеств.

3. В принципе единицы всех величин могут выбираться независимо друг от друга. Однако наличие наряду с прямыми косвенных измерений позволяет единицы разных величин связывать друг с другом.

4. При построении систем взаимно связанных единиц единицы нескольких величин выбираются независимо от остальных и друг от друга. Такие единицы условно называются основными.

5. Для всех остальных величин устанавливаются так называемые производные единицы, которые связываются либо с основными единицами, либо друг с другом с помощью определяющих уравнений, представляющих собой математическое выражение физических законов и определений физических величин.

6. Символы (обозначения) физических величин, стоящие в математических выражениях физических закономерностей и определений и используемые для установления единиц, представляют собой не сами величины, а именованные числовые значения, которыми эти величины выражаются при соответствующем выборе единиц.

7. Зависимость производной единицы от основных определяется размерностью, представляющей собой одночлен, образованный произведением обобщенных обозначений основных единиц в различных степенях.

8. Математическое равенство, выражающее связь между различными физическими величинами, должно обладать размерной однородностью (размерности левой и правой частей должны быть одинаковыми). При этом в равенстве может присутствовать размерный коэффициент пропорциональности, т.е. такой, числовое значение которого изменяется при изменении основных единиц.

9. Совокупность основных и производных единиц образует систему единиц. Система единиц строится следующим образом:

а) выбираются величины, единицы которых принимаются за основные (такие величины условно называются основными);

б) устанавливаются размеры основных единиц;

в) выбирается определяющее уравнение для установления производной единицы;

г) приравнивается единице (или другому постоянному числу) и, следовательно, полагается безразмерным коэффициент пропорциональности в определяющем уравнении.

10. Построение системы, в принципе, вполне произвольно. Произвольными являются число и сам подбор основных величин, размер основных единиц и выбор определяющих уравнений.

11. Число основных единиц связано с числом размерных коэффициентов в математических выражениях физических закономерностей. Чем больше основных единиц, тем больше число таких коэффициентов.

12. При различном выборе определяющих уравнений размерность единицы одной и той же величины может иметь различный вид. Следовательно, размерность не является некоторым неизменным свойством данной

физической величины, а зависит от способа построения системы единиц.

13. Перевод единиц из одной системы в другую осуществляется с помощью размерности, для чего необходимо выявить связь между основными единицами, которая устанавливается в зависимости от способа построения систем, а именно:

а) если обе системы построены на одних и тех же основных величинах и одних и тех же определяющих уравнениях, то связь между основными единицами определяется либо сравнением эталонов, либо условным соотношением единиц (например, единица одной из систем определяется как кратная или дольная единица другой системы);

б) если определяющие уравнения в обеих системах одинаковы, а основные величины различны, то следует экспериментальным путем установить связь между единицами величины, которая в одной системе является основной, а в другой – производной;

в) если производные единицы построены с помощью разных определяющих уравнений, то следует предварительно в одном из них, записанном в той системе, в которой оно не является определяющим, установить размерность коэффициента пропорциональности, определить экспериментально его значение при каких-то известных размерах основных единиц и затем, пользуясь размерностью, вычислить его значения при размерах основных единиц, соответствующих данной системе.

14. Несмотря на наличие теоретической возможности произвольным способом строить системы единиц, практические соображения накладывают ряд ограничений на число основных единиц, выбор основных величин и определяющих уравнений. В частности, целесообразно, чтобы число основных величин было не слишком малым и не слишком большим.

Глава 3

ПОНЯТИЕ ОБ АНАЛИЗЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ

§ 3.1. Определение функциональных связей путем сравнения размерностей

Применение размерностей не исчерпывается переводом единиц и проверкой правильности формул. В ряде случаев, если предварительно известно, какие физические величины участвуют в исследуемом процессе, можно путем сопоставления размерностей установить характер зависимости, которая связывает данные величины. Во многих областях физики и смежных науках – теплотехнике, гидромеханике и др. – такой метод, получивший название анализа размерностей, нашел широкое распространение.

Особенно плодотворным он оказывается в тех случаях, когда нахождение искомой закономерности прямым путем либо встречает значительные математические трудности, либо требует знания таких деталей процесса, которые заранее не известны. По сути дела, анализ размерностей основывается на требовании независимости связи между физическими величинами от выбора единиц, что равносильно требованию совпадения размерностей в обеих частях уравнений. Позволяя в ряде случаев быстро установить характер искомой закономерности, анализ размерностей отнюдь не является всемогущим методом, и подчас его возможности оказываются весьма ограниченными.

В задачу настоящей книги не входит подробное изложение методов и применений анализа размерностей, которому посвящены специальные книги. Мы ограничимся лишь кратким ознакомлением с тем, как с помощью размерностей можно решать практические задачи, для чего рассмотрим несколько простейших характерных примеров*).

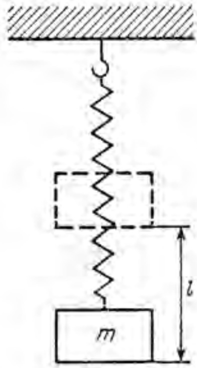


Рис. 2

Задача 1. На пружине подвешен груз массой m, вес которого уравновешивается силой натяжения пружины (рис. 2). Для удлинения пружины относительно положения равновесия на l требуется приложить силу F, пропорциональную l ($F = kl$). Такая же по модулю, но обратная по направлению сила стремится вернуть груз в исходное положение. Если убрать растягивающую силу, груз через некоторое время t вернется к исходному положению. Определить время t в зависимости от l, m и k, где k – жесткость пружины.

Для решения задачи необходимо представить время как некоторую функцию известных величин l, m и k. Хотя в принципе эта функция может иметь различный вид, по поводу нее можно высказать некоторые определенные соображения. Предположим, что в состав этой функции входят какие-либо тригонометрические, показательные или другие неалгебраические функции. Как было сказано выше (§ 2.1), аргументом этих последних могут быть только безразмерные величины.

Легко видеть, что в системе единиц LMT из величин l, m и k, размерности которых равны соответственно

*) В приводимых задачах используются размерности, выведенные и рассмотренные в последующих главах. Их можно также найти в приложениях в конце книги.

L, M и MT^{-2}, невозможно составить никакой безразмерной комбинации, так как T входит только в размерность k, поэтому в такую комбинацию k войти не может, а l и m, разумеется, не могут дать безразмерного сочетания. Таким образом, единственно возможным видом связи между t и l, m и k является алгебраическая функция. Представляется естественным искать эту функцию в виде

$$t = Cl^p m^q k^r, \tag{3.1}$$

где C – неизвестный безразмерный коэффициент пропорциональности, а p, q и r – неизвестные показатели степени.

Приравняем размерности левой и правой частей уравнения (3.1):

$$\mathrm{T} = \mathrm{L}^p \cdot \mathrm{M}^q \cdot [\mathrm{MT}^{-2}]^r = \mathrm{L}^p \mathrm{M}^{q+r} \mathrm{T}^{-2r}. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) будет инвариантным по отношению к размеру основных единиц (т.е. сохранится при увеличении или уменьшении размера основных единиц), если показатели степени при соответствующих размерностях основных единиц в левой и правой частях будут равны. Исходя из этого условия, получаем следующие уравнения для показателей степени:

$$p = 0, \quad q + r = 0, \quad -2r = 1, \tag{3.3}$$

откуда

$$r = -1/2, \quad q = 1/2. \tag{3.4}$$

Соответственно

$$t = C\sqrt{m/k}. \tag{3.5}$$

Время оказывается не зависящим от удлинения l.

Точное решение задачи, основанное на применении законов механики, приводит к тому же уравнению (3.5), но с определенным коэффициентом, равным $\pi/2$.

Задача 2. В цилиндрическом сосуде площадью сечения S_1 до уровня, расположенного на высоте h от дна, налита идеальная (не обладающая вязкостью) жидкость плотностью ρ (рис. 3). В дне сосуда имеется отверстие площадью сечения S_2. Определить время вытекания жидкости t.

Поскольку вытекание происходит под действием силы тяжести, естественно предположить, что в числе

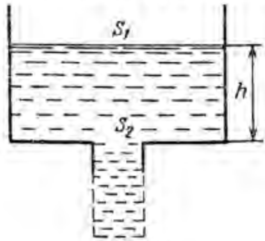


Рис. 3

величин, определяющих процесс, должно присутствовать ускорение свободного падения. В данном случае в принципе возможно присутствие в искомой связи трансцендентной функции, включающей в аргумент величины h, S_1 и S_2 (ρ и g по приведенным выше соображениям в этот аргумент входить не могут). Тем не менее попытаемся и здесь представить искомое время в виде степенного одночлена

$$t = C\rho^p g^q h^r S_1^k S_2^l, \tag{3.6}$$

где, как и выше, C – безразмерный и неопределяемый коэффициент пропорциональности, а p, q, r, k, l – подлежащие определению показатели степени. Составим уравнение размерностей:

$$\mathrm{T} = \mathrm{L}^{-3p}\mathrm{M}^p \cdot \mathrm{L}^q\mathrm{T}^{-2q} \cdot \mathrm{L}^r \cdot \mathrm{L}^{2k} \cdot \mathrm{L}^{2l}, \tag{3.7}$$

откуда, приравнивая показатели степени левой и правой частей, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&0 = -3p + q + r + 2(k + l),\\
&0 = p, \quad 1 = -2q.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Для определения пяти показателей степени мы имеем только три уравнения. Правда, два показателя определяются непосредственно:

$$p = 0, \quad q = -1/2. \tag{3.9}$$

Это уже представляет определенный интерес, так как показывает, что время вытекания не зависит от плотности жидкости и обратно пропорционально корню квадратному из ускорения свободного падения.

Для определения остальных показателей степени требуется либо иметь дополнительные данные, либо сделать какие-то предположения, основанные на нашем представлении о ходе процесса. Предположим, что скорость жидкости в отверстии не зависит от его сечения. В этом случае время вытекания должно быть обратно пропорционально S_2. Вместе с тем время вытекания при одинаковом начальном уровне жидкости h должно быть пропорционально общей массе жидкости и, следовательно, S_1. Это дает для показателей k и l значения 1 и -1. При таком предположении сразу определяется показатель $r = 1/2$ и для времени вытекания получается выражение

$$t = C\sqrt{\frac{h}{g}}\,\frac{S_1}{S_2}\,. \tag{3.10}$$

Что касается коэффициента C, то, как и в задаче 1, анализ размерностей не дает возможности его определить. Расчет показывает, что этот коэффициент равен $\sqrt{2}$.

Определение показателя степени r возможно также другим путем. Поскольку в условии задачи ничего не говорится о форме отверстия и форме сечения сосуда, можно единицу площади отнести к числу основных, не связывая ее с единицей длины. В этом случае вместо уравнения (3.7) следует написать

$$T = L^{-3p} M^p L^q T^{-2q} L^r \Sigma^k \Sigma^l, \tag{3.11}$$

где Σ – условное обозначение размерности площади. Из этого уравнения дополнительно к условиям $p = 0$ и $q = -1/2$ получим

$$k = -l, \quad r = 1/2. \tag{3.12}$$

Таким образом, в качестве решения задачи мы имеем

$$t = C\sqrt{\frac{h}{g}}\,\varphi\left(\frac{S_1}{S_2}\right), \tag{3.13}$$

где в отличие от (3.10) $\varphi(S_1/S_2)$ является неизвестной функцией отношения S_1/S_2.

Легко видеть, что по сравнению с первоначальным положением, когда требовались специальные предположения, нам удалось добиться большей определенности решения задачи благодаря введению еще одной основной единицы.

Задача 3. В жидкость плотностью ρ погружена цилиндрическая пробирка, на дне которой находится груз, удерживающий пробирку в вертикальном положении (рис. 4). Масса пробирки с грузом равна m. Дно пробирки расположено на глубине h от уровня жидкости. Если пробирку погрузить на некоторую глубину, возникает колебательное движение пробирки вверх и вниз. Пренебрегая сопротивлением движению, определить период колебаний пробирки τ.

Поскольку силой, возвращающей пробирку в исходное положение, является архимедова сила, можно предположить, что среди величин, от которых может зависеть период колебаний, должно фигурировать ускорение свободного падения. Уравнение размерностей для всех величин имеет вид

$$T = [\rho]^p [m]^q [h]^r [g]^k, \qquad (3.14)$$

или

$$T = L^{-3p} M^p \cdot M^q \cdot L^r \cdot L^k T^{-2k}. \qquad (3.15)$$

Для определения четырех показателей степени p, q, r и k имеет три уравнения:

$$-3p + r + k = 0, \quad p + q = 0, \quad -2k = 1. \qquad (3.16)$$

Показатель k определяется непосредственно, но для

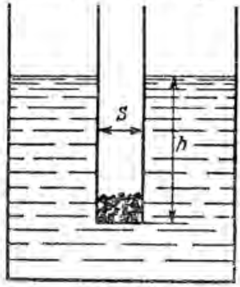


Рис. 4

определения остальных трех показателей остаются два уравнения, из которых определить порознь p, q и r невозможно. Пользуясь тем, что масса пробирки равна массе вытесненной жидкости, запишем ее в виде $m = \rho h S$, где S – площадь сечения пробирки. Уравнение размерностей приобретет при этом вид

$$T = [L^{-3} M]^p \cdot L^r \cdot [LT^{-2}]^k \cdot L^{2l}, \qquad (3.17)$$

в котором снова неизвестными оказываются четыре показателя p, r, k и l. Правда, в этом случае мы получаем несколько большую информацию. Кроме того, что $k = -1/2$, мы получаем $p = 0$, т.е. период колебаний оказывается не зависящим от плотности жидкости. Получив этот результат, мы можем вернуться к уравнениям (3.15) и (3.16), из которых получаем

$$q = 0, \quad r = 1/2. \tag{3.18}$$

Таким образом,

$$\tau = C\sqrt{h/g}. \tag{3.19}$$

Можно поступить и иначе, а именно, чтобы сделать задачу более определенной, подобно задаче 2, ввести самостоятельную размерность площади. Вместо (3.17) будем иметь

$$\mathrm{T} = [\mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}]^{p} \cdot \mathrm{L}^{r} \cdot [\mathrm{LT}^{-2}]^{k} \cdot \Sigma^{l}, \tag{3.20}$$

откуда

$$p = l = 0, \quad r = 1/2, \quad k = -1/2, \tag{3.21}$$

и окончательно выражение для периода колебаний приобретает тот же вид

$$\tau = C\sqrt{h/g}.$$

Решение задачи интегрированием соответствующего дифференциального уравнения движения дает для C значение 2π.

Задача 4. На тело массой m действует постоянная сила F на пути h. Определить скорость, которую приобретет тело в конце пути.

Аналогично предыдущим примерам, запишем скорость в виде

$$v = CF^{p}m^{q}h^{r} \tag{3.22}$$

с неизвестным коэффициентом C и показателями степени p, q и r. Уравнение размерностей будет иметь вид

$$\mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{L}^{p}\mathrm{M}^{p}\mathrm{T}^{-2p} \cdot \mathrm{M}^{q} \cdot \mathrm{L}^{r}. \tag{3.23}$$

Сопоставляя показатели степени, получим

$$p = 1/2, \quad q = \ 1/2, \quad r = 1/2, \tag{3.24}$$

откуда

$$v = C\sqrt{\frac{Fh}{m}}\,. \tag{3.25}$$

Решение этой задачи на основе закона сохранения энергии дает, как известно,

$$v = \sqrt{2\frac{Fh}{m}}\,, \tag{3.25а}$$

т.е. $C = \sqrt{2}$.

Рассмотрим эту же задачу несколько иначе. Попробуем найти искомую скорость с помощью анализа размерностей, но в такой системе единиц, в которой единица силы определяется не вторым законом Ньютона, а законом всемирного тяготения. В этой системе размерность силы (см. (2.45))

$$[F] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^2. \tag{3.26}$$

Уравнение размерностей, построенное на основании (3.22), будет

$$\mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{L}^{-2p}\mathrm{M}^{2p}\cdot\mathrm{M}^q\cdot\mathrm{L}^r. \tag{3.27}$$

Мы пришли к абсурдному, противоречивому результату. В левой части размерность времени входит в степени -1, в то время как в правой части время вообще отсутствует. Какова же причина этого противоречия? Рассматривая существо задачи, мы видим, что основной закон, определяющий данный процесс – ускорение под действием внешней силы, т.е. второй закон Ньютона, – выпал из рассмотрения. Это существенно в том отношении, что в принятой нами системе единиц в выражении для второго закона Ньютона должна стоять инерционная постоянная, размерность которой (см. (2.46))

$$[\mathcal{K}_i] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}\mathrm{T}^2.$$

Введя в уравнение размерностей размерность инерционной постоянной, мы получим совместные уравнения, однако для определения четырех степеней будем иметь только три уравнения. Действительно, написав вместо (3.23)

$$\mathrm{L}\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{L}^{-2p}\mathrm{M}^{2p} \cdot \mathrm{M}^{q} \cdot \mathrm{L}^{r} \cdot \mathrm{L}^{-3k}\mathrm{M}^{k}\mathrm{T}^{2k}, \tag{3.28}$$

получим систему уравнений

$$1 = -2p + r - 3k, \quad 0 = 2p + q + k, \quad -1 = 2k, \tag{3.29}$$

из которой непосредственно определяется только $k = -1/2$, так что в искомой зависимости какой-нибудь один показатель степени остается неизвестным и ее можно записать, например, в следующем виде:

$$v = CF^p \left(\frac{h}{m}\right)^{2p-1/2} \mathcal{K}_i^{-1/2} =$$

$$= C\left(\frac{Fh^2}{m^2}\right)^p \left(\frac{\mathcal{K}_i h}{m}\right)^{-1/2}. \tag{3.30}$$

Задачу можно определить полностью, если ввести еще одну основную единицу. В качестве таковой примем единицу силы. Обозначив ее размерность, как и раньше, F, получим для размерности инерционной постоянной

$$[\mathcal{K}_i] = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^2\mathrm{F}. \tag{3.31}$$

Записав теперь искомую зависимость в виде

$$\mathrm{L}\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{F}^{p} \cdot \mathrm{M}^{q} \cdot \mathrm{L}^{r} \cdot \mathrm{L}^{-k}\mathrm{M}^{-k}\mathrm{T}^{2k}\mathrm{F}^{k}, \tag{3.32}$$

находим для показателей степени систему уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= r - k, \quad & 0 &= q - k, \\ -1 &= 2k, \quad & 0 &= p + k, \end{aligned} \tag{3.33}$$

откуда определяются все показатели степени:

$$p = r = 1/2, \quad q = k = -1/2,$$

и, следовательно,

$$v = C\sqrt{\frac{Fh}{m\mathscr{K}_l}}\,. \tag{3.34}$$

Легко видеть, что если, наоборот, уменьшить число основных единиц, приняв для решения задачи систему с двумя основными единицами длины и времени, в которой размерности силы и массы (см. (2.51) и (2.50))

$$[F] = \mathrm{L}^4\mathrm{T}^{-4}, \tag{3.35}$$

$$[m] = \mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}, \tag{3.36}$$

то задача станет неопределенной. Действительно, написав уравнение размерностей в виде

$$\mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{L}^{4p}\mathrm{T}^{-4p}\cdot\mathrm{L}^{3q}\mathrm{T}^{-2q}\cdot\mathrm{L}^{r}, \tag{3.37}$$

мы получим для нахождения степеней только два уравнения:

$$1 = 4p + 3q + r, \quad -1 = -4p - 2q. \tag{3.38}$$

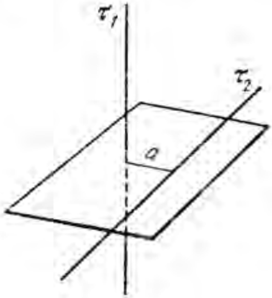
Решение вновь требует дополнительных предположений, не вполне очевидных, несмотря на простоту самой задачи. Уравнения (3.38) совместны и удовлетворяются, если подставить значения показателей из (3.33).

Задача 5. Два бесконечно тонких проводника бесконечной длины расположены взаимно перпендикулярно на расстоянии a друг от друга (рис. 5). Проводники несут на себе равномерный заряд с линейной плотностью τ_1 и τ_2. Определить силу взаимодействия между проводниками*).

---

*) В таком виде задача не вполне корректна, так как взаимное влияние зарядов на проводниках делает невозможным равномерное распределение заряда. Эту некорректность можно обойти, если представить проводники состоящими из малых отрезков, изолированных друг от друга.

Решим задачу в Международной системе единиц (СИ). Размерность заряда $[Q]$ = TI, и, следовательно, размерность линейной плотности заряда $L^{-1}TI$. Кроме того, следует ввести электрическую постоянную ϵ_0, размерность которой $[\epsilon_0] = L^{-3}M^{-1}T^4I^2$.



Р и с. 5

По-видимому, никакие другие физические величины в решение задачи входить не должны. Уравнение размерностей имеет вид

$$[F] = [\tau]^p[\epsilon_0]^q[a]^r, \tag{3.39}$$

или

$$LMT^{-2} = [L^{-1}TI]^p \cdot [L^{-3}M^{-1}T^4I^2]^q \cdot L^r, \tag{3.40}$$

откуда для показателей степени получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &1 = -p - 3q + r, \\ &1 = -q, \ -2 = p + 4q, \end{aligned} \tag{3.41}$$

решая которую находим

$$p = 2, \ q = -1, \ r = 0. \tag{3.42}$$

Сила взаимодействия

$$F = C\frac{\tau_1\tau_2}{\epsilon_0} \tag{3.43}$$

оказывается не зависящей от расстояния. Коэффициент $C = 1/2$ получается при решении задачи с помощью закона Кулона.

Задача 6. Покидающие источник *И* заряженные частицы (ионы или электроны) ускоряются разностью потенциалов U_0 и узким пучком влетают в плоский конденсатор, параллельно пластинам последнего, на равном расстоянии от обеих пластин (рис. 6). Начальная скорость заряженных частиц равна нулю. Длина пластин конденсатора равна l, расстояние между пластинами d. Какую минимальную разность потенциалов следует приложить между пластинами конденсатора, чтобы пучок не мог выйти за пределы конденсатора? Известны заряд Q частицы

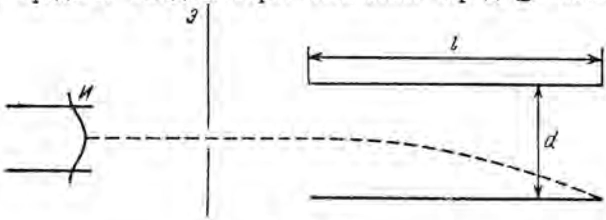


Рис. 6

пучка и ее масса m. Потенциал ускоряющего электрода *Э* совпадает с потенциалом средней плоскости между пластинами конденсатора, так что можно считать, что между ускоряющим электродом и конденсатором на частицы пучка поле не действует.

Решаем эту задачу также в Международной системе единиц. Запишем уравнение размерностей в виде

$$[U] = [U_0]^a [Q]^b [m]^c [l]^x [d]^y, \tag{3.44}$$

или

$$L^2MT^{-3}I^{-1} = L^{2a}M^aT^{-3a}I^{-a} \cdot I^bT^b \cdot M^c \cdot L^x \cdot L^y. \quad (3.45)$$

Тогда для показателей степени имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} &2 = 2a + x + y, \ \ 1 = a + c, \\ &-3 = -3a + b, \ \ -1 = -a + b, \end{aligned} \quad (3.46)$$

откуда находим

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ x + y = 0, \quad (3.47)$$

т.е. показатели степеней x и y остаются неизвестными. Результат может быть записан в виде

$$U = CU_0 f(l/d). \quad (3.48)$$

Уравнение размерностей показывает, что заряд и масса частицы выпали из окончательной формулы не случайно. Этот вывод имеет более широкое значение. Из него следует, что при заданной конфигурации электрического поля траектория движения заряженной частицы определенного знака, начальная скорость которой равна нулю, не зависит от заряда и массы частицы. Этот вывод следует особенно подчеркнуть, так как нередко приходится слышать совершенно неверное утверждение, что силовая линия электрического поля якобы является траекторией движения заряженной частицы бесконечно малой массы.

§ 3.2. П-теорема и метод подобия

Рассматривая приведенные примеры, мы приходим к выводу, что анализ размерностей не может являться универсальным методом, позволяющим автоматически находить интересующие нас зависимости между физическими величинами, участвующими в том или ином процессе. Применение анализа размерностей требует во многих случаях удачного выбора системы единиц, учета размерных постоянных, которые могут входить в выражения для законов, управляющих данным процессом, или в определения физических величин. Нередко требуются такие дополнительные предположения, которые приходится принимать интуитивно.

Приведенные примеры показывают, кроме того, что чем меньше основных величин и чем больше параметров, участвующих в процессе (включая размерные постоянные), тем более неполной является система уравнений, которую можно составить для нахождения показателей степени при символических обозначениях величин, входящих в искомую зависимость. В то же время возможны и такие случаи, когда уравнения размерностей приводят к несовместной системе уравнений для показателей степеней размерностей. Это, как мы видели, свидетельствует о том, что какая-то из величин, существенных для решения задачи, оказалась неучтенной. В числе таких величин может быть и размерная постоянная.

Существенную помощь при анализе размерностей оказывает так называемая П-теорема, к доказательству и формулировке которой мы сейчас обратимся.

Предположим, что n физических величин связаны между собой функциональной зависимостью

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \tag{3.49}$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ – числовые значения соответствующих величин при некотором выбранном нами наборе основных единиц физических величин. В число этих величин, наряду с такими, как масса, скорость, сила тока, могут входить и размерные постоянные, как, например, гравитационная постоянная, ускорение свободного падения, скорость света и т.п.

Условие абсолютного значения относительных количеств требует, чтобы уравнение (3.49) было справедливо при любом размере основных единиц. Переход к системе с другими определяющими уравнениями может привести к тому, что либо появятся новые размерные постоянные, либо исчезнут некоторые из них, входящие в уравнение (3.49).

Пусть при нашем выборе величин, единицы которых приняты за основные, из общего числа n величин k имеют назависимые размерности. Например, если в уравнение (3.49) входят значения длины, времени, скорости и плотности вещества, то независимыми в СИ и СГС будут размерности длины, времени и плотности вещества (L, T и $L^{-3}M$), а зависимой – размерность скорости (LT^{-1}).

Будем считать, что в уравнении (3.49) первые k величин (от a_1 до a_k) имеют независимые размерности, а остальные (от a_{k+1} до a_n) – зависимые. Независимость размерностей первых k величин позволяет считать их основными и придать им самостоятельные размерности $A_1, A_2, ..., A_k$, т.е.

$$[a_1] = A_1, \ [a_2] = A_2, \ ..., \ [a_k] = A_k. \tag{3.50}$$

Соответственно размерности $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n$ примут вид

$$[a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ ... \ A_k^{p_k}, \ ..., \ [a_n] = A_1^{q_1} A_1^{q_2} \ ... \ A_k^{q_k}. \tag{3.51}$$

Поскольку $a_1, a_2, ..., a_k$ – числовые значения величин с независимыми размерностями, единицы каждой из них можно изменять в любое произвольное число раз. При этом, разумеется, изменятся числовые значения остальных величин (от a_{k+1} до a_n) в соответствии с их размерностями (3.51). Изменим единицы первых k величин таким образом, чтобы числовое значение каждой из них стало равным единице. Для этого (если при первоначальном, произвольном выборе единиц их числовые значения были $a_1, a_2, ..., a_k$) нам придется умножить каждое из них соответственно на $1/a_1, 1/a_2, ..., 1/a_k$. Значения остальных $n - k$ величин, согласно размерностям, станут равными

$$\Pi_{k+1}=\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_k^{p_k}},\ \dots,\ \Pi_n=\frac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\dots a_k^{q_k}},\qquad(3.52)$$

и уравнение (3.49) примет вид

$$f(1,\dots,1,\Pi_{k+1},\dots,\Pi_n)=0.\qquad(3.53)$$

Напомним, что первоначальные значения $a_1, a_2, \dots, a_k$ были произвольными. Поэтому выражение (3.53) остается справедливым при любом выборе единиц первых k величин. Легко видеть, что величины $\Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n$ оказываются безразмерными. Действительно, например, размерность величины a_{k+1}, являющейся числителем Π_{k+1}, $[a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k}$, совпадает с произведением размерностей величин, входящих в знаменатель.

Полученный результат и представляет собой П-теорему, которую можно сформулировать следующим образом: если n величин связаны функциональной зависимостью и из них k имеют независимые размерности, то из этих величин можно образовать $n - k$ безразмерных комбинаций. Чем меньше эта разность, тем более определенным будет решение задачи. При $n - k = 1$ задача становится наиболее определенной и, как правило, однозначной. Выделяя из общего числа величин ту, зависимость которой от остальных мы хотим определить, можно выразить искомую зависимость в виде явной функции.

Проиллюстрируем сказанное примерами, для чего прежде всего воспользуемся теми задачами, которые были рассмотрены в § 3.1.

В задаче 1 (возвращение в положение равновесия груза силой натяжения оттянутой пружины) связываются четыре величины: масса груза, жесткость пружины, ее удлинение и время возвращения. Согласно П-теореме при трех основных величинах – длине, массе и времени – можно из четырех величин образовать одну безразмерную комбинацию. Соответственно связь между этими величинами можно записать как функцию вида

$$\varphi(l^p, m^q, k^r, t^l) = \text{const}, \tag{3.54}$$

где аргумент функции безразмерный и стоящая справа постоянная величина также не имеет размерности. В аргументе все показатели степени можно, сохраняя его безразмерность, изменить в одинаковое число раз, в результате чего один из показателей может быть сделан равным единице. Наболее удобно это осуществить для искомой величины, в данном случае времени, так что, приравняв показатель l единице, получим

$$[l^p \cdot m^q \cdot k^r \cdot t] = 1. \tag{3.55}$$

Уравнение (3.55) равносильно уравнению (3.1) с той только разницей, что все показатели имеют обратные знаки.

В задаче 2 (вытекание жидкости из цилиндрического сосуда) мы искали связь между следующими величинами: временем вытекания t, плотностью жидкости ρ, ускорением свободного падения g, высотой уровня h, площадью сечения S_1 и S_2. Среди размерностей этих величин T, $L^{-3}M$, LT^{-2}, L, L^2 и L^2 независимыми являются три: T, $L^{-3}M$ и L. Таким образом, из перечисленных величин могут быть составлены три безразмерные комбинации:

$$h/gt^2,\ \rho^0,\ S_2/S_1. \tag{3.56}$$

Выделяя из комбинации h/gt^2 время t, можно представить его в следующем виде:

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}}\,\varphi\left(\frac{S_1}{S_2}\right), \tag{3.57}$$

как это и было получено нами раньше.

Рассмотрим еще несколько примеров. Пусть требуется найти объемный расход жидкости Q_V (т.е. объем, протекающий ежесекундно) по трубе, в которой создан продольный градиент давления dp/dl, если диаметр трубы D, а вязкость жидкости μ. Из четырех величин Q_V, dp/dl, μ и D, размерности которых

$$[Q_V] = \mathrm{L^3T^{-1}},\ [dp/dl] = \mathrm{L^{-2}MT^{-2}},$$
$$[\mu] = \mathrm{L^{-1}MT^{-1}},\ [D] = \mathrm{L}, \tag{3.58}$$

для трех можно установить независимые размерности. Таковыми могут быть размерность длины и любые две размерности из оставшихся. Можно, разумеется, составить безразмерную комбинацию и на основе обычных основных величин – длины, массы и времени. Для решения задачи примем в качестве независимых размерности длины, времени и вязкости, обозначив последнюю $[\mu] = \mathrm{N}$. Тогда размерность градиента давления будет $[dp/dl] = \mathrm{NL^{-1}T^{-1}}$. Из четырех размерностей $\mathrm{L^3T^{-1}}$, $\mathrm{NL^{-1}T^{-1}}$, N и L при наличии трех независимых можно составить единственную безразмерную комбинацию

$$\mathrm{NL^{-1}T^{-1}/N \cdot L^3T^{-1} \cdot L^{-4}}$$

и, следовательно,

$$\varphi\left(\frac{D^4 \cdot dp/dl}{\mu Q_V}\right) = \mathrm{const}, \tag{3.59}$$

откуда

$$Q_V = C\,\frac{D^4}{\mu}\,\frac{dp}{dl}\,. \tag{3.60}$$

Это известная формула Пуазейля, в которой $C = \pi/128$:

$$Q_V = \frac{\pi}{128}\,\frac{D^4}{\mu}\,\frac{dp}{dl}\,. \tag{3.61}$$

В качестве следующей задачи определим скорость v, с которой падает шарик в вязкой жидкости. Даны диаметр шарика d, его плотность ρ_1, плотность жидкости ρ_2 и ее вязкость μ. Разумеется, в число величин, определяющих процесс, входит ускорение свободного падения g. Для решения задачи мы имеем, таким образом, шесть величин при трех основных единицах, что позволяет составить три безразмерные комбинации. Как мы уже видели, задача становится тем более определенной, чем меньше разность между числом определяющих величин и числом основных единиц. В данном случае задачу можно сделать более определенной, если ввести еще хотя бы одну основную единицу. В качестве таковой представляется целесообразным принять единицу силы. Размерности входящих в задачу величин будут при этом следующие:

$$[v] = LT^{-1}, \ [d] = L, \ [\rho_1] = [\rho_2] = L^{-3}M,$$
$$[\mu] = L^{-2}TF, \ [g] = FM^{-1}.$$

Теперь мы можем составить лишь две безразмерные комбинации. В качестве одной из них, по аналогии с ранее рассмотренными примерами, напрашивается отношение ρ_2/ρ_1. Составляя уравнения для показателей степеней остальных величин, легко получить вторую комбинацию, включающую, в частности, любую из плотностей, например ρ_1:

$$v\mu/d^2\rho_1 g.$$

Отсюда для искомой скорости падения мы найдем

$$v = C(d^2\rho_1 g/\mu)\varphi(\rho_2/\rho_1). \tag{3.62}$$

Функция $\varphi(\rho_2/\rho_1)$ данными задачи не определяется. Разумеется, задача была бы еще более неопределенной, если бы мы сохранили лишь три основные единицы.

Интересно заметить, что почти такая же задача о скорости всплывания в жидкости воздушного пузырька (плотностью которого можно пренебречь) становится вполне определенной, так как число входящих величин при этом уменьшается на единицу. Очевидно, в этом случае безразмерная комбинация имеет вид

$$v\mu/d^2\rho_2 g,$$

откуда скорость всплывания пузырька

$$v = Cd^2\rho_2 g/\mu. \tag{3.63}$$

Сопоставляя (3.63) и (3.62), можно заключить, что функция $\varphi(\rho_2/\rho_1)$ имеет вид

$$\varphi(\rho_2/\rho_1) = 1 - \rho_2/\rho_1, \tag{3.64}$$

так что (3.62) превращается в

$$v = Cd^2 g(\rho_1 - \rho_2)/\mu. \tag{3.65}$$

Теоретический расчет дает для C значение 1/18.

Легко видеть, что формула (3.65) описывает все случаи движения шарика в вязкой жидкости, как при $\rho_1 > \rho_2$, так и при $\rho_1 < \rho_2$, вплоть до $\rho_1 = 0$, поскольку v может принимать как положительное, так и отрицательное значение.

Приведенные примеры еще раз показывают, что при применении анализа размерностей, наряду с достаточно очевидными приемами, приходится вооружаться интуицией не только при определении величин, существенных для данной конкретной задачи, но и при подборе основных единиц и даже записи размерностей. Так, в последней задаче было не очевидно, что размерность ускорения свободного падения следовало записать не LT^{-2}, а FM^{-1} *). При этом можно отметить, что сама по себе П-теорема ничего нового не добавляет к изложенному выше способу применения анализа размерностей. Однако в ряде

---

*) Причина этого, как нетрудно видеть, заключается в том, что в первом случае мы вынуждены были бы ввести еще одну размерную величину – инерционную постоянную. Записав размерность ускорения в виде FM^{-1}, мы сохраняем запись второго закона Ньютона $F = ma$.

случаев она позволяет проводить анализ в более удобном виде и представлять результат анализа в разных формах в зависимости от того, какие параметры нас интересуют. Основное ее значение состоит в том, что с ее помощью удобно вводить так называемые безразмерные критерии подобия. Такими критериями в принципе могут быть любые из безразмерных комбинаций величин, определяющих исследуемое явление.

Если в такой комбинации изменить значения образующих ее величин таким образом, чтобы сама комбинация не изменилась, ее числовое значение останется неизменным даже при изменении размера основных единиц. Следовательно, при сохранении остальных величин останется неизменной и искомая величина. Так, например, в задаче о времени вытекания жидкости последнее является функцией размерного отношения h/g, безразмерного отношения S_1/S_2 и, можно также сказать, безразмерной величины ρ^0, что попросту означает, что время вытекания не зависит от плотности жидкости. В качестве критерия подобия в данном случае следует считать отношение S_1/S_2. Если в одинаковое число раз изменить площади сечения сосуда S_1 и отверстия S_2, то при постоянном h (и, разумеется, постоянном g) время вытекания не изменится.

Введение критериев подобия оказывается особенно удобным и в тех случаях, когда сведения для полного описания явления недостаточны или строгое решение задачи представляет большие математические трудности.

Первый критерий, с помощью которого были получены важные теоретические результаты, относящиеся к течению реальной (вязкой) жидкости, был введен О. Рейнольдсом и носит его имя. Критерий, или число Рейнольдса Re, равен

$$\mathrm{Re} = vD\rho/\mu, \tag{3.66}$$

где v – скорость течения жидкости, D – диаметр трубы, ρ – плотность жидкости и μ – ее вязкость. Последняя имеет размерность $L^{-1}MT^{-1}$, и, следовательно, Re действительно является безразмерной величиной. При данном значении Re характер течения разных жидкостей в разных трубах с разными скоростями оказывается одинаковым: одинаково распределение давлений, скоростей и т.д. Опытным путем было найдено, что при достижении значения Re = 2200 (так называемое критическое число Рейнольдса) упорядоченное струйчатое, или ламинарное, течение жидкости становится беспорядочным – турбулентным.

Введение критериев подобия оказалось весьма плодотворным при решении разнообразных задач аэро- и гидромеханики, теплопередачи и др. Особенно важно то, что с помощью метода подобия можно исследовать различные явления на моделях. Так, например, критерий Рейнольдса (который применим не только к течению жидкостей в трубах, но и к обтеканию жидкостью погруженных в нее тел) позволяет изучать сопротивление, испытываемое телами в потоке жидкости, если заменить тела геометрически подобными моделями меньших размеров и соответственно увеличить скорость потока.

Критерии подобия в том виде, как они образованы, являются безразмерными только при определенном выборе определяющих уравнений. Если же изменить эти уравнения, то изменятся размерности единиц, входящих в выражение данного критерия, и он приобретает определенную размерность. Так, например, можно показать, что при замене инерционной единицы силы на гравитационную критерий Рейнольдса приобретает размерность

$$[\mathrm{Re}] = L^3M^{-1}T^{-2}. \qquad (3.67)$$

Критерий может быть вновь сделан безразмерным, если в него ввести инерционную постоянную, размерность которой, как мы знаем, равна $L^{-3}MT^2$.

В заключение заметим, что составление безразмерных комбинаций бывает полезным и в том случае, когда задача без больших затруднений решается обычным путем. Преобразовав решение таким образом, чтобы определяемая величина была представлена как функция от ряда величин, из которых хотя бы часть может быть собрана в безразмерные комбинации, можно получить выражение, удобное для анализа и обобщений.

Подводя итоги, можно сказать, что хотя понятие "размерность физической величины" или, точнее, "размерность единицы физической величины" само по себе ничего не говорит о сущности данной величины или о ее связи с другими величинами, применение размерностей оказывается в ряде вопросов весьма полезным.

Глава 4

ЕДИНИЦЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

§ 4.1. Введение

Для построения единиц геометрических величин из всех основных единиц требуется только единица длины: метр (в СИ) или сантиметр (в СГС). В кинематике к единице длины добавляется вторая основная единица – единица времени секунда, одинаковая для обеих систем. Наконец, в динамике вводится третья основная единица – единица массы – килограмм (в СИ) или грамм (в СГС). В существовавшей ранее системе МКГСС третьей основной единицей была единица силы – килограмм-сила. Все эти единицы были рассмотрены раньше, и на них мы останавливаться не будем.

В последующих параграфах этой главы будут представлены важнейшие геометрические и механические единицы, их образование, определения и размерности по отношению к единицам длины (L), массы (M) и времени (T). Эти единицы и размерности приводятся в приложении IV. Кроме единиц СИ и СГС рассматриваются наиболее употребительные внесистемные единицы, в том числе некоторые единицы, использующие прямо или косвенно единицы МКГСС и не вышедшие полностью из практического применения.

§ 4.2. Геометрические единицы

Длина. Кроме основных системных единиц длины метра и сантиметра, применяется ряд десятичных кратных и дольных единиц. Наиболее широко распространены из них следующие:

километр: 1 км $= 10^3$ м $= 10^5$ см;
дециметр: 1 дм $= 10^{-1}$ м $= 10$ см;
миллиметр: 1 мм $= 10^{-3}$ м $= 10^{-1}$ см;
микрометр: 1 мкм $= 10^{-6}$ м $= 10^{-4}$ см $= 10^{-3}$ мм;
нанометр: 1 нм $= 10^{-9}$ м $= 10^{-7}$ см $= 10^{-6}$ мм $=$
$= 10^{-3}$ мкм;

Микрометр ранее назывался микроном и обозначался "мк". Иногда при русском обозначении остальных единиц микрон обозначался греческой буквой "μ", входящей в совокупность международных обозначений, в которых, как правило, применяются латинские буквы. Кроме микрона греческой буквой обозначалась и единица сопротивления ом, для которой было принято обозначение "Ω". Это обозначение применялось и при русском обозначении других единиц.

Несмотря на то что решением XIII Генеральной конференции по мерам и весам название "микрон" и обозначения "мк" и "μ" отменены, их до сих пор можно встретить в литературе. В спектроскопии и атомной физике применялся ангстрем: 1 Å $= 10^{-10}$ м $= 10^{-8}$ см $=$ $= 10^{-7}$ мм $= 10^{-4}$ мкм. Размеры атомов и простейших молекул порядка нескольких ангстрем, а видимая область спектра лежит в пределах от 4000 до 7600 Å. В настоящее время ангстрем практически полностью вытеснен нанометром – единицей, в десять раз более крупной.

В рентгеновской спектроскопии и рентгеноструктурном анализе применялась единица длины икс-единица (обозначение "икс-ед."). Вначале икс-единица была введена как 10^{-3} Å (10^{-13} м), вследствие чего она отождествлялась с миллиангстремом. Икс-единица определялась с высокой точностью в рентгеновской спектроскопии. Тщательное сопоставление икс-единицы, определенной в рентгеновской спектроскопии, с миллиангстремом обнаружило некоторое расхождение. Оказалось, что 1 икс-ед. = $1{,}00208 \cdot 10^{-3}$ Å.

В технике до настоящего времени иногда применяется неметрическая единица длины дюйм:

1 дюйм = 0,0254 м = 2,54 см.

Это значение принято как не подлежащее уточнению. В дюймах измеряются диаметры труб и ряда других изделий круглого сечения, однако наличие точного соотношения между дюймом и единицами длины в СИ и СГС позволяет производить соответствующие замены.

В мореходной практике применяется морская миля (м. миля), равная длине дуги одной угловой минуты меридиана (см. ниже): 1 м. миля = 1852 м. Одна десятая морской мили (185, 2 м) называется "кабельтов" (обозначение "кб").

В астрономии используются специальные единицы длины:

парсек (пк) – расстояние, с которого полудиаметр земной орбиты виден под углом в одну угловую секунду: 1 пк = $= 3{,}086 \cdot 10^{16}$ м; наряду с парсеком применяются его кратные единицы – мегапарсек (Мпк) и килопарсек (кпк);

астрономическая единица длины (а. е.) – среднее расстояние от Земли до Солнца: 1 а.е. = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ м;

световой год (св. год) – расстояние, которое свет проходит за один год: 1 св. год = $9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м.

В литературе – как в произведениях дореволюционных писателей, так и в сохранившихся пословицах и поговорках – мы нередко встречаемся со старыми русскими мерами. Их этих единиц приведем следующие:

верста: 1,0668 км (для пересчета верст в километры пользовались раньше приближенным значением 1 верста ≈ 15/14 км);

сажень: 1/500 версты = 2,1336 м;

аршин: 1/3 сажени = 0,7112 м;

вершок: 1/16 аршина = 4,455 см;

фут: 1/7 сажени = 0,3048 м (фут делился на 12 дюймов).

Из большого числа английских единиц длины назовем только ярд и мил:

1 ярд = 0,9144 м, 1 мил = 10^{-3} дюйм = 25,4 мкм.

Площадь. Во всех системах за единицу площади принимается площадь квадрата, сторона которого равна единице длины. Из формулы

$$S = l^2 \tag{4.1}$$

получаем размерность

$$[S] = \mathrm{L}^2. \tag{4.1a}$$

Единицы площади: в СИ квадратный метр ($м^2$) и в СГС квадратный сантиметр ($см^2$):

1 $м^2$ = 10^4 $см^2$.

На основе приведенных единиц длины по формуле (4.1) строятся и другие единицы площади, из которых наиболее употребительны квадратный километр ($км^2$), квадратный дециметр ($дм^2$) и квадратный миллиметр ($мм^2$). Их соотношения с единицами СИ и СГС:

1 $км^2$ = 10^6 $м^2$ = 10^{10} $см^2$;

1 $дм^2$ = 10^{-2} $м^2$ = 100 $см^2$;

1 $мм^2$ = 10^{-6} $м^2$ = 10^{-2} $см^2$.

Единица 10^4 $м^2$ называется "гектар" (га) – общепринятая единица земельной площади: 1 га = 10^4 $м^2$ = 10^{-2} $км^2$.

В дореволюционной России мерой земельной площади была десятина: 1 десятина = 2400 кв. саженей = 1,0925 га.

Основная английская единица земельной площади – акр: 1 акр = 4046,86 $м^2$.

Объем. Единица объема во всех системах – объем куба с ребром, равным единице длины:

$$V = l^3. \tag{4.2}$$

Соответственно размерность

$$[V] = \mathrm{L}^3. \tag{4.2а}$$

Единицы объема: в СИ кубический метр ($м^3$) и в СГС кубический сантиметр ($см^3$):

$1\ м^3 = 10^6\ см^3$.

Из остальных единиц объема назовем кубический дециметр ($дм^3$): $1\ дм^3 = 10^{-3}\ м^3 = 10^3\ см^3$.

Единицей вместимости часто называют литр (л), который ранее определяли как объем, занимаемый одним килограммом воды при 4 °С. Этот объем составляет 1,000028 $дм^3$. На XII Генеральной конференции (1964 г.) литр был приравнен одному кубическому дециметру: $1\ л = 1\ дм^3$.

Плоский угол. Во всех системах единиц плоский угол определяется как отношение длины дуги к ее радиусу:

$$\varphi = l/r, \tag{4.3}$$

где l – длина дуги, а r – радиус.

Сообразно с этим определением размерность угла

$$[\varphi] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{-1} = 1. \tag{4.3а}$$

Нетрудно видеть, угол является величиной нулевой размерности относительно всех основных величин; иначе говоря, его единица не зависит от размера основных единиц. Эта универсальная единица угла называется "радиан" (рад) – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

То обстоятельство,что единица угла не имеет размерности, нередко совершенно ошибочно трактуют в том смысле, что угол является отвлеченной величиной. В действительности же угол – полноправная геометрическая величина. Его можно подвергать прямому измерению с помощью произвольной угловой меры, которую можно установить в качестве единицы угла и приписать ей собственную размерность.

Безразмерность угла в СИ и СГС означает лишь то, что при определяющем уравнении (4.3) принятая в этих системах единица угла оказывается одной и той же независимо от размера основных единиц. Это позволяет легко ввести и независимые внесистемные единицы:

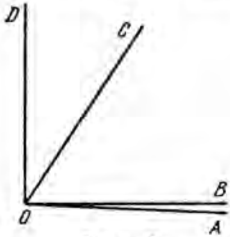


Рис. 7

полный угол или оборот (об), равный 2π радиан, и угловой градус или просто градус (°), составляющий 1/360 полного угла:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ рад} = 0{,}017453 \text{ рад}.$$

Градус делится на 60 минут и минута – на 60 секунд:

$$1^\circ = 60' = 3600'', \text{ или}$$

$$1 \text{ угл. град} = 60 \text{ угл. мин} = 3600 \text{ угл. с},$$

$$1' = 2{,}9088 \cdot 10^{-4} \text{ рад}, \; 1'' = 4{,}8481 \cdot 10^{-6} \text{ рад}.$$

Соответственно,

$$1 \text{ рад} = 57^\circ 17' 45'' = 57{,}296^\circ = (3{,}4378 \cdot 10^3)' = (2{,}0627 \cdot 10^5)''.$$

Кроме указанных единиц, применяется прямой угол (∟):

$$1^{\llcorner} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ рад} = 1{,}5708 \text{ рад}.$$

Прямой угол иногда делят на 100 гон (^{g}); один гон в свою очередь делится на 10^2 метрических минут (^{c}) и 10^4 метрических секунд (^{cc}):

$$1^g = 100^c = 10\,000^{cc} = 0{,}015708 \text{ рад.}$$

На рис. 7 изображены углы 1° ($\angle AOB$), 1 рад ($\angle AOC$) и $\pi/2$ ($\angle AOD$). Для наглядности укажем, что отрезок

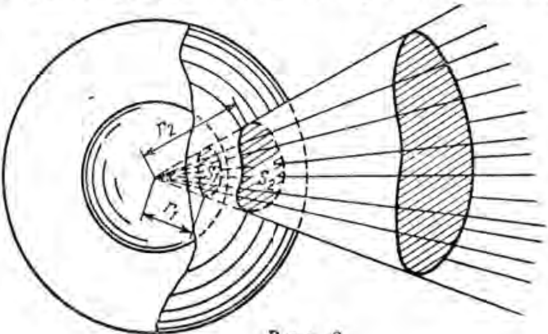


Рис. 8

длиной в 1 мм виден под углом $1'$ с расстояния 3,44 м, а под углом $1''$ – с расстояния 206 м.

Телесный угол. Прежде чем определить единицу телесного угла, остановимся несколько подробнее на самом понятии телесного угла. Представим себе сферу, на которой обрисована некоторая замкнутая линия (рис. 8). Если все точки этой линии соединить с центром, то образуется конус *), охватывающий некоторую часть пространства. Конус будет тем шире, или, как говорят, раствор (или расхождение) его будет тем больше, чем

---

*) Конусом в широком смысле этого слова называется всякая фигура, образованная движением прямой в том случае, если одна ее точка закреплена, а какая-либо другая точка движется по замкнутой линии.

большую долю поверхности сферы охватывает взятая нами замкнутая линия.

Если теперь из того же центра провести ряд сфер различного радиуса, то полученный нами конус вырежет на них участки, подобные тому, с помощью которого был построен конус. Площади этих участков будут, как это ясно из простых геометрических соображений, пропорциональны квадратам радиусов сфер, из которых эти участки вырезаны. Поэтому отношение площадей каждой из них к квадрату соответствующего радиуса будет оставаться постоянным независимо от радиуса сферы и будет тем больше, чем больше раствор конуса. Это отношение вырезанной конусом на сфере площади к квадрату радиуса сферы принимается в СИ и СГС в качестве меры телесного угла. Таким образом, телесный угол определяется формулой

$$\Omega = S_1/r_1^2 = S_2/r_2^2 = S/r^2. \tag{4.4}$$

Из определения вытекает, что телесный угол, так же как и плоский угол, является величиной, не имеющей размерности. Поэтому за единицу телесного угла во всех системах принят стерадиан (ср) – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Единица "полный телесный угол" может быть определена согласно формуле (4.4) как телесный угол полной сферы. Полный телесный угол, очевидно, равен 4π стерадиан.

Если три плоскости пересекаются между собой под прямыми углами (рис. 9), то в общей точке пересечения образуется прямой телесный угол. Так как при пересечении тремя взаимно перпендикулярными плоскостями пространство сферы делится на восемь прямых углов (рис. 10), то размер каждого прямого телесного угла будет $4\pi/8 = \pi/2$, так же как и для прямого угла на плоскости.

В астрономии применялась единица телесного угла квадратный градус ($\square^\circ$) – телесный угол, конус которого представляет собой четырехгранную пирамиду с угла-

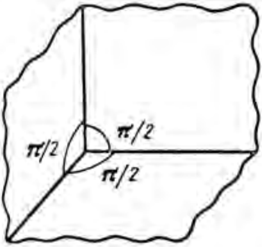


Рис. 9

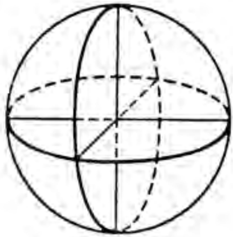


Рис. 10

ми между ребрами, равными одному угловому градусу:

$1 \square^\circ = 3{,}046 \cdot 10^{-4}$ ср =

$= 2{,}424 \cdot 10^{-5}$ полного телесного угла.

Замечание о возможности введения самостоятельной внесистемной единицы плоского угла в равной мере относится и к единице телесного угла, с той лишь разницей, что в последнем случае в качестве такой единицы практически применяется только прямой телесный угол (за исключением астрономической единицы – квадратного градуса).

В связи со сказанным представляется целесообразным сделать следующее замечание. В стандартах СТ СЭВ 1052–78, ГОСТ 8.417–81, равно как и в прежнем стандарте ГОСТ 9867–61, единицы плоского и телесного углов – радиан и стерадиан – выделены в особую группу дополнительных единиц. Нам кажется, что такое выделение совершенно необоснованно и может привести к недоразумению, в частности заставит нас считать эти единицы находящимися вне какой бы то ни было системы. В действительности же, как сказано выше, то обстоятельство, что радиан и стерадиан не имеют размерности по отношению к основным единицам системы, отнюдь не означает, что они являются внесистемными единицами. Уравнения (4.3) и (4.4), дающие определения плоского и телесного углов, представляют собой типичные определяющие соотношения, в которых коэффициент пропорциональности, как обычно, полагается равным единице и лишенным размерности. Таким образом, следует считать, что единицы плоского и телесного угла – радиан и стерадиан – являются полноправными производными единицами, с той лишь особенностью, что эти единицы оказываются одинаковыми во всех системах*).

Если считать, что безразмерные единицы следует выделять в какую-то особую группу "дополнительных единиц" – не основных и не производных, то в эту группу должны быть включены единицы таких величин, как коэффициент трения, а также единицы ряда величин, относящихся к теории колебаний: фазы, добротности и, разумеется, любых безразмерных комбинаций величин, в частности упоминавшихся критериев подобия.

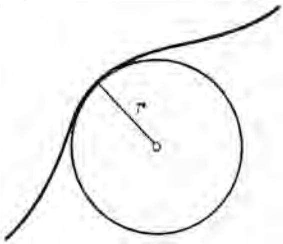


Рис. 11

*) Международный стандарт ИСО 31/0 позволяет считать плоский и телесный углы как основными, так и производными единицами.

Кривизна линии. Всякая кривая линия в каждой своей точке имеет определенную кривизну. Элемент кривой, примыкающей к данной точке, можно представить частью окружности некоторого радиуса r (рис. 11). Величина, обратная радиусу r,

$$\rho = 1/r, \tag{4.5}$$

и служит мерой кривизны линии в данной точке, а сам радиус r называется радиусом кривизны. (О единицах и размерностях см. с. 133.)

Кривизна поверхности. Когда мы имеем дело с поверхностью, понятие кривизны становится более сложным. Если в какой-либо точке поверхности провести перпендикулярно касательной плоскости T две плоскости N_1 и N_2 (рис. 12), то пересечение поверхности с этими плоскостями даст две кривые линии A_1MB_1 и A_2MB_2, которые могут быть охарактеризованы соответствующими радиусами кривизны $r_1 = O_1M$ и $r_2 = O_2M$ и кривизнами $\rho_1 = 1/r_1$ и $\rho_2 = 1/r_2$.

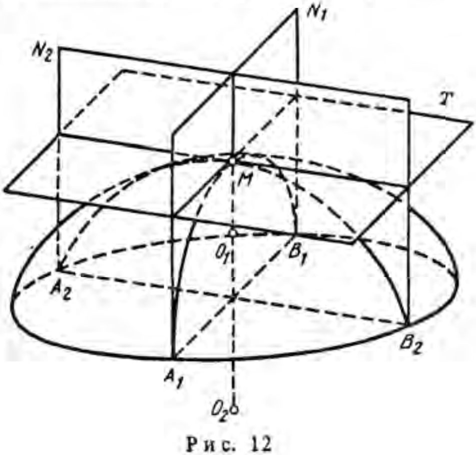


Рис. 12

В дифференциальной геометрии доказывается, что, как бы ни были проведены эти две секущие плоскости, сумма

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 1/r_1 + 1/r_2$$

будет оставаться постоянной. Эта сумма называется *средней кривизной* в данной точке поверхности. Иногда средней кривизной поверхности называют величину, вдвое меньшую:

$$\rho' = (1/2)(1/r_1 + 1/r_2). \tag{4.6}$$

Очевидно, что для сферы средняя кривизна

$$\rho = 2/r \quad \text{или} \quad \rho' = 1/r,$$

где r – радиус сферы.

Кроме средней кривизны, поверхность иногда характеризуют *гауссовой кривизной*, которая определяется выражением

$$K = 1/r_1 r_2, \tag{4.7}$$

где r_1 и r_2 имеют те же значения, что и в формуле (4.6). Для сферы

$$K = 1/r^2.$$

Размерность как кривизны линии, так и средней кривизны поверхности

$$[\rho] = [\rho'] = \mathrm{L}^{-1}. \tag{4.5a}$$

Размерность гауссовой кривизны

$$[K] = \mathrm{L}^{-2}. \tag{4.7a}$$

Единицей кривизны линии в СИ является метр в минус первой степени ($м^{-1}$) – кривизна линии, радиус кривизны которой в данной точке равен одному метру. В СГС соответственно единица кривизны – сантиметр в минус первой степени ($см^{-1}$). Иногда эти единицы называют "обратный метр" и "обратный сантиметр". (Применение этих наименований не рекомендуется.) Единицы средней кривизны поверхности те же, причем ρ равна единице для сфер радиусом два метра или для цилиндров радиусом один метр (в СИ) или соответственно для сфер радиусом два сантиметра или цилиндров радиусом один сантиметр (в СГС).

Средняя кривизна поверхности ρ', определяемая формулой (4.6), равна единице для сфер радиусом один метр или для цилиндров радиусом 0,5 метра (в СИ) или соответственно для сфер радиусом один сантиметр или для цилиндров радиусом 0,5 сантиметра (в СГС). Единицей гауссовой кривизны является гауссова кривизна для сфер радиусом один метр (в СИ) или один сантиметр (в СГС). Для цилиндра, один из радиусов кривизны которого равен бесконечности (образующая цилиндра), гауссова кривизна равна нулю. Очевидно,

$$1\ \text{м}^{-1} = 10^{-2}\ \text{см}^{-1}, \quad 1\ \text{м}^{-2} = 10^{-4}\ \text{см}^{-4}.$$

Моменты плоских фигур. В сопротивлении материалов широко используются специальные геометрические характеристики плоских фигур, представляющих собой, например, сечения различных элементов конструкций. Эти характеристики имеют и соответствующие единицы.

Момент сопротивления плоской фигуры относительно оси, лежащей в плоскости, которой принадлежит фигура, определяется согласно формуле

$$S_z = \int_S r\,dS, \qquad (4.8)$$

где dS – элемент площади, а r – расстояние этого элемента до оси, относительно которой момент определяется (рис. 13). Интегрирование производится по всей площади фигуры.

Размерность момента сопротивления

$$[S_z] = \mathrm{L}^3, \qquad (4.8\text{а})$$

а единицы в СИ и СГС – метр в третьей степени ($м^3$) и сантиметр в третьей степени ($см^3$):

$$1\ м^3 = 10^6\ см^3.$$

Размерность и единица момента сопротивления плоской фигуры совпадают с размерностью и единицей

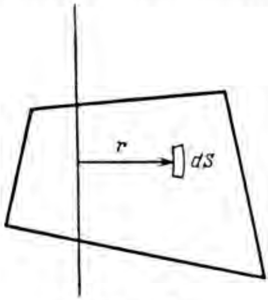


Рис. 13

объема, хотя между обеими величинами нет ничего общего. Это может служить наглядной иллюстрацией того, что совпадение размерностей отнюдь не означает совпадения физической (или в данном случае геометрической) сущности величин.

Согласно формуле (4.8) момент сопротивления прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны b равен

$$S_b = a^2 b/2. \qquad (4.9)$$

За единицу момента сопротивления можно принять момент сопротивления прямоугольника со сторонами 1 и 2 м (или 1 и 2 см) относительно стороны длиной 2 м (или 2 см).

Осевой момент инерции площади плоской фигуры определяется как

$$J_z = \int_S r^2 dS. \qquad (4.10)$$

Размерность осевого момента инерции

$$[J_z] = \mathrm{L}^4, \qquad (4.10а)$$

и единицы СИ и СГС – метр в четвертой степени (м^4) и сантиметр в четвертой степени (см^4):

$$1 \text{ м}^4 = 10^8 \text{ см}^4.$$

Для прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны b осевой момент инерции равен

$$J_b = a^3 b/3, \qquad (4.11)$$

и соответственно единицей может являться момент инерции прямоугольника со сторонами 1 и 3 м или 1 и 3 см относительно второй из этих сторон.

Полярный момент инерции площади плоской фигуры вычисляется таким же образом, как и осевой момент

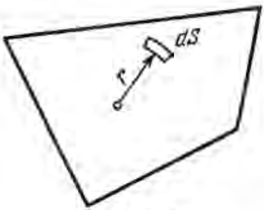


Рис. 14

инерции, с той лишь разницей, что расстояние берется не до оси, а до некоторой определенной точки (рис. 14):

$$J_p = \int_S r^2 dS. \qquad (4.12)$$

Разумеется, размерности и единицы полярного и осевого моментов инерции совпадают.

Из формулы (4.12) легко определяется полярный момент инерции круга относительно его центра:

$$J_p = \pi r^4/2. \tag{4.13}$$

В качестве единицы полярного момента инерции можно взять полярный момент инерции круга, радиус которого равен $\sqrt[4]{2/\pi} = 0{,}89$ м (или 0,89 см).

§ 4.3. Кинематические единицы

Время. Поскольку в кинематике рассматриваются процессы движения, требуется единица времени. Во всех системах такой единицей является секунда (с), определенная в § 1.5 в качестве одной из основных единиц. Более крупные внесистемные единицы времени – минута (мин) и час (ч):

$$1\ \text{мин} = 60\ \text{с}, \quad 1\ \text{ч} = 60\ \text{мин} = 3600\ \text{с}.$$

Дольные единицы времени строятся по десятичному принципу: миллисекунда (мс), микросекунда (мкс), наносекунда (нс), пикосекунда (пс), фемтосекунда (фс).

Скорость. Общее определение скорости как векторной величины дается формулой

$$\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{l}$ – перемещение материальной точки. В общем случае скорость может изменяться по модулю и по направлению. Однако для определения единицы скорости целесообразно брать такое движение, при котором скорость остается постоянной, т.е. равномерное и прямолинейное. Подобным образом и при определении других величин мы будем пользоваться такой формой определяющих соотношений, в которых определяемая величина остается постоянной во времени и в пространстве.

Для равномерного прямолинейного движения формула (4.14) приобретает вид

$$v = l/t. \qquad (4.15)$$

Согласно этой формуле за единицу скорости принимается скорость такого равномерного прямолинейного движения, при котором в единицу времени точка перемещается на единицу длины. Уравнение равномерного движения определяет и размерность скорости:

$$[v] = \mathrm{LT}^{-1}. \qquad (4.15а)$$

В СИ единица скорости – метр в секунду (м/с), в СГС – сантиметр в секунду (см/с).

Из внесистемных единиц скорости наиболее широко распространена в повседневной жизни единица скорости километр в час (км/ч): 1 км/ч = 0,278 м/с. В мореходстве применяется узел (уз): 1 уз = 1 м. миля/ч = = 1,852 км/ч = 0,514 м/с.

Ускорение. Единица ускорения устанавливается на основе формулы равноускоренного прямолинейного движения

$$a = (v_2 - v_1)/t. \qquad (4.16)$$

Здесь v_1 – начальная скорость, v_2 – конечная скорость, t – время, a – ускорение. Ускорение может быть определено как отношение приращения скорости к тому промежутку времени, в течение которого это приращение произошло. Соответственно за единицу ускорения принимается ускорение такого равноускоренного прямолинейного движения, при котором приращение скорости тела в единицу времени равно единице скорости.

Формула (4.16) дает для размерности ускорения

$$[a] = \mathrm{LT}^{-2}. \qquad (4.16а)$$

Единицей ускорения в СИ является метр на секунду в квадрате (м/с^2) – ускорение такого равноускоренного движения, при котором скорость тела в каждую секунду возрастает на один метр в секунду. В СГС единица ускорения соответственно сантиметр на секунду в квадрате (см/с^2). Эту единицу иногда (преимущественно в геофизике при измерении ускорения свободного падения) называют гал (в честь Галилея). Соотношение между единицами ускорения:

$$1\ \text{м/с}^2 = 10^2\ \text{см/с}^2.$$

Широкое применение в авиации и космонавтике приобрела единица ускорения, равная нормальному ускорению свободного падения 9,80665 м/с^2 (обозначается g). Если тело движется с ускорением, которое в определенное число раз превышает значение g, то во столько же раз увеличивается вес тела. Поэтому это отношение получило название перегрузки.

Угловая скорость. Угловая скорость при равномерном вращении равна отношению угла поворота тела к тому времени, в течение которого произошел этот поворот:

$$\omega = \varphi/t. \qquad (4.17)$$

Размерность угловой скорости

$$[\omega] = \mathrm{T}^{-1}. \qquad (4.17а)$$

За единицу угловой скорости принят радиан в секунду (рад/с) – угловая скорость равномерного вращения, при котором в единицу времени тело поворачивается на один радиан.

Понятие угловой скорости применимо не только для вращения, но и для любого криволинейного движения. В каждой данной точке траектории угловая скорость определяется по формуле

$$\omega = \lim \left.\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} = \frac{d\varphi}{dt},$$

где элемент угла $\Delta\varphi$ равен отношению элемента длины дуги вдоль траектории к радиусу кривизны в данной точке:

$$\Delta\varphi = \Delta l/r.$$

Угловое ускорение. Угловое ускорение тела определяется как отношение приращения угловой скорости при равноускоренном вращении к тому промежутку времени, в течение которого это приращение произошло:

$$\epsilon = (\omega_2 - \omega_1)/t. \tag{4.18}$$

Размерность углового ускорения

$$[\epsilon] = \mathrm{T}^{-2}. \tag{4.18a}$$

За единицу углового ускорения принят радиан на секунду в квадрате (рад/с^2) – угловое ускорение при равноускоренном вращении, при котором угловая скорость возрастает в единицу времени на один радиан в секунду. Так как во всех системах за единицу времени принята секунда, то единицы угловой скорости и углового ускорения будут одинаковы для всех систем.

Внесистемные единицы угла определяют и соответствующие единицы угловой скорости и углового ускорения:

$$^\circ/\text{с},\ '/\text{с},\ ''/\text{с};\ ^\circ/\text{с}^2,\ '/\text{с}^2,\ ''/\text{с}^2.$$

Соотношения между этими единицами такие же, как и между соответствующими единицами угла. В качестве примера укажем, что минутная стрелка часов движется с угловой скоростью $0{,}1\ ^\circ/\text{с} = 6\ '/\text{с}$.

При движении по кривой постоянного радиуса (окружность, винтовая линия) пользуются понятием частоты вращения, которую измеряют числом оборотов в единицу времени – секунду (с$^{-1}$) или минуту (мин$^{-1}$).

Период. Всякий периодический процесс слагается из ряда циклов. Под циклом мы понимаем полную совокупность повторяющихся значений периодически изменяющейся величины. Наименьший промежуток времени, необходимый для завершения одного полного цикла, называется периодом.

Размерность периода

$$[\tau] = \mathrm{T}, \qquad (4.19\,а)$$

а единица – секунда (с).

Частота периодического процесса. Число циклов, укладывающихся в единицу времени, называется частотой:

$$\nu = 1/\tau. \qquad (4.20)$$

Размерность частоты периодического процесса

$$[\nu] = \mathrm{T}^{-1}. \qquad (4.20\,а)$$

За единицу частоты во всех системах принимается герц (Гц) – частота, равная одному циклу в секунду. Иначе говоря, герц есть частота такого периодического процесса, который повторяется каждую секунду.

В радиотехнике применяются кратные единицы килогерц (кГц), мегагерц (МГц) и гигагерц (ГГц)

В случае равномерного вращения может быть установлена связь между частотой периодического процесса и угловой скоростью, которая в этом случае дается соотношением

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/\tau. \qquad (4.21)$$

Понятие угловой скорости оказывается, однако, весьма полезным и в применении к другим периодическим процессам (например, к прямолинейным гармоническим колебаниям). В этих случаях угловую скорость, или, как ее иначе называют, круговую (циклическую) частоту, определяют непосредственно с помощью уравнения (4.21).

Следует здесь заметить что иногда, вопреки принятому определению, ошибочно называют циклической частотой частоту ν.

Фаза. Мгновенное состояние всякого колебательного процесса характеризуется фазой. Фазой определяются мгновенные значения колеблющейся величины и ее скорости. Если колебательное движение описывается некоторой функцией, то фаза является аргументом этой функции. В простейшем случае гармонического колебательного движения отклонение от положения равновесия x выражается уравнением

$$x = A \sin \Phi. \tag{4.22}$$

Здесь A — амплитуда, т.е. максимальное отклонение от положения равновесия, а Φ — фаза. При круговой частоте ω в момент t от начала регистрации колебаний

$$\Phi = \omega t + \varphi_0, \tag{4.23}$$

где φ_0 — начальная фаза, т.е. фаза в начальный момент. Разумеется, фаза — величина нулевой размерности. Не следует забывать, что Φ является функцией времени. Поэтому два положения, для которых $\sin \Phi$ имеет одно и то же значение, но соответствует разным моментам времени, обязательно отличаются фазой Φ. Так, например, при одинаковом отклонении, но разных направлениях скорости значения $\sin \Phi$ будут совпадать, а значения $\cos \Phi$ будут иметь противоположные знаки.

В электротехнике фазу и разность фаз раньше иногда определяли единицей "электрический градус", которому соответствовал промежуток времени, составляющий 1/360 периода переменного тока. Поскольку частота переменного тока во всех электрических сетях СССР составляет 50 Гц, то "электрическому градусу" соответствует промежуток времени 55,6 мкс.

Объемный расход. Отношение объема жидкости или газа, протекающего через поперечное сечение, к времени протекания называется объемным расходом:

$$Q_V = dV/dt. \tag{4.24}$$

Размерность объемного расхода

$$[Q_V] = L^3T^{-1}, \qquad (4.24а)$$

единицы – кубический метр в секунду ($м^3/с$) и кубический сантиметр в секунду ($см^3/с$).

Плотность объемного расхода. Эта величина представляет собой отношение объемного расхода к площади сечения:

$$q_V = Q_V/S. \qquad (4.25)$$

Ее размерность

$$[q_V] = LT^{-1} \qquad (4.25а)$$

совпадает с размерностью скорости. Этого и следовало ожидать, так как плотность объемного расхода есть не что иное, как линейная скорость потока.

Градиент скорости. В случае, когда течение жидкости или газа происходит таким образом, что разные слои движутся с разной скоростью, вводят особую величину – градиент скорости:

$$\mathrm{grad}\, v = dv/dl. \qquad (4.26)$$

Градиент скорости представляет собой изменение скорости в направлении, перпендикулярном направлению скорости (рис. 15), рассчитанное на единицу расстояния между слоями.

Размерность градиента скорости

$$[\mathrm{grad}\, v] = [dv/dl] = T^{-1}, \qquad (4.26а)$$

а единицы – метр на секунду-метр ($м/(с \cdot м)$) и сантиметр на секунду-сантиметр ($см/(с \cdot м)$) – во всех системах совпадают и могут быть представлены как секунда в минус первой степени ($с^{-1}$). Градиент скорости является векторной величиной, направленной в сторону возрастания скорости.

О градиенте скорости можно говорить и в случае вращательного движения твердого тела. Так, например, при равномерном вращении диска линейная скорость его точек возрастает от центра к периферии. Если уголовая скорость диска равна ω, то на расстоянии r

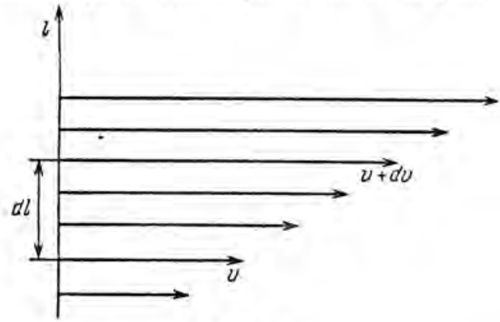


Рис. 15

от центра линейная скорость v равна ωr. Отсюда

$$\operatorname{grad} v = dv/dr = \omega.$$

Таким образом, в этом случае градиент скорости равен угловой скорости вращения диска и, следовательно, одинаков для всех точек диска.

§ 4.4. Статические и динамические единицы

Масса. Выше мы уже определяли основные единицы массы: в СИ – килограмм (кг) и в СГС – грамм (г).

Среди единиц массы, построенных из основных по десятичному принципу, наибольшее распространение получили: тонна (т), являвшаяся основной единицей в системе МТС (метр, тонна, секунда), центнер (ц), миллиграмм (мг) и микрограмм (мкг). Их соотношения с единицами СИ и СГС:

$$1\ т = 10^3\ кг = 10^6\ г;$$

$$1\ ц = 10^2\ кг = 10^5\ г;$$

$$1\ мг = 10^{-6}\ кг = 10^{-3}\ г;$$

$$1\ мкг = 10^{-9}\ кг = 10^{-6}\ г.$$

В немецкой и английской технической литературе для микрограмма иногда применяется название "гамма" (γ).

Массу драгоценных камней и жемчуга измеряют специальной единицей, носящей название "карат" (кар): 1 кар = $2 \cdot 10^{-4}$ кг = 0,2 г.

Приведем единицы массы старой русской системы мер:

1 пуд = 16,3805 кг;

1 фунт = 1/40 пуда = 409,51 г;

1 лот = 1/32 фунта = 12,797 г;

1 золотник = 1/3 лота = 4,266 г.

Сила. Напомним, что производные единицы силы в СИ и СГС, определяемые на основании второго закона Ньютона, имеют размерность

$$[F] = \mathrm{LMT}^{-2} \qquad (4.27\,а)$$

и носят названия "ньютон" (Н) и "дина" (дин). Ньютон определяется как сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы; дина – как сила, сообщающая телу массой 1 г ускорение 1 см/с^2 в направлении действия силы. Поэтому можно написать

$$1\ Н = 1\ кг \cdot м/с^2, \quad 1\ дин = 1\ г \cdot см/с^2, \quad 1\ Н = 10^5\ дин.$$

В литературе иногда встречается единица силы не применяющейся теперь системы МТС стен (сн), которая определялась как сила, сообщающая телу массой 1 т ускорение 1 м/с^2: 1 сн = 1 т · м/с^2. Очевидно, что 1 сн = = 10^3 Н.

Импульс силы. Импульс силы измеряется произведением силы на время ее действия (Ft).

Размерность импульса силы

$$[Ft] = \mathrm{LMT}^{-1}.$$

За единицу импульса силы принимается импульс силы, равной единице и действующей в течение единицы времени. Соответственно единицы импульса в СИ и СГС – ньютон-секунда (Н · с) и дина-секунда (дин · с):

$$1\ \text{Н} \cdot \text{с} = 10^5\ \text{дин} \cdot \text{с}.$$

Количество движения (импульс). Количество движения определяется как произведение массы тела на его скорость (mv).

Из формулы

$$Ft = mv_2 - mv_1 \tag{4.28}$$

(импульс силы равен изменению количества движения) следует, что размерности импульса силы и количества движения должны совпадать. Действительно,

$$[Ft] = \mathrm{LMT}^{-2} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{LMT}^{-1}, \tag{4.28 а}$$

$$[mv] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{LMT}^{-1}. \tag{4.28 б}$$

За единицу количества движения принимается количество движения тела единичной массы, скорость которого равна единице. Единицы количества движения в СИ и СГС – килограмм-метр в секунду (кг · м/с) и грамм-сантиметр в секунду (г · см/с):

$$1\ \text{кг} \cdot \text{м/с} = 10^5\ \text{г} \cdot \text{см/с}.$$

Давление. Давление при равномерно распределенной нагрузке определяется силой, приходящейся на единицу площади поверхности:

$$p = F/S. \tag{4.29}$$

Размерность давления

$$[p] = L^{-1}MT^{-2}. \tag{4.29 а}$$

За единицу давления принимается давление, вызываемое единицей силы, равномерно распределенной по поверхности единичной площади, расположенной перпендикулярно силе. Единицы давления в СИ и СГС – паскаль (Па) и дина на квадратный сантиметр (дин/см^2):

$$1\ \text{Па} = 1\ \text{Н/м}^2 = 1\ \text{кг/(м} \cdot \text{с}^2),$$

$$1\ \text{дин/см}^2 = 1\ \text{г/(см} \cdot \text{с}^2).$$

Размерность давления устанавливает соотношение между единицами давления в СИ и СГС:

$$1\ \text{Па} = 10\ \text{дин/см}^2.$$

До недавнего времени широко применялись единицы давления, основанные на МКГСС. Давление 1 кгс/м^2 с большой степенью точности равно давлению водяного столба высотой 1 мм. Действительно, слой воды площадью 1 м^2 и толщиной 1 мм занимает объем, равный 1 дм^3, а, следовательно, его сила давления с большой точностью равна 1 кгс. Поэтому в технике единицу давления килограмм-сила на квадратный метр (кгс/м^2) называли миллиметром водяного столба (мм вод. ст.). Это было особенно удобно в тех случаях, когда пользовались водяными манометрами (например, при измерении скорости газа в трубопроводах).

Более распространенной была кратная единица – килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см^2). Так как эта единица очень близка к нормальному атмосферному давлению (1,033 кгс/см^2), то ее называли технической атмосферой, с обозначением "ат" (в отличие от нормальной атмосферы "атм"). Хотя

МКГСС изъята из применения, на некоторых предприятиях до настоящего времени пользуются манометрами, проградуированными в технических атмосферах (или непосредственно в килограмм-силах на квадратный сантиметр).

Единицу давления СГС дину на квадратный сантиметр (дин/см^2) в физической литературе раньше называли бар. В метеорологии под этим названием понимается внесистемная единица, в 10^6 раз большая: 1 бар = 10^5 Па. В настоящее время название "бар" применяется только в последнем значении. Таким образом,

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па} = 10^6 \text{ дин/см}^2.$$

Наряду с указанными единицами в физике и технике широко использовались внесистемные единицы давления. Из них была весьма распространена единица "физическая (нормальная) атмосфера" (атм), определяемая как давление воздуха, уравновешивающее ртутный столб высотой 76 см при плотности ртути 13,595 г/см^3 и нормальном ускорении свободного падения 980,665 см/с^2. На каждый квадратный сантиметр площади такой столб оказывает давление, равное его весу. Точное значение:

$$1 \text{ атм} = 76 \text{ см} \cdot 13{,}595 \text{ г/см}^3 \cdot 980{,}665 \text{ см/с}^2 =$$
$$= 1{,}01325 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2 = 1{,}01325 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Так как это давление равно приблизительно 1,033 кгс/см^2, вместо него часто пользовались технической атмосферой (ат), равной точно 1 кгс/см^2:

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10^4 \text{ кгс/м}^2 = 9{,}81 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

В МТС существовала единица давления пьеза (пз), равная давлению одного стена на квадратный метр площади:

$$1 \text{ пз} = 1 \text{ сн/м}^2 = 10^3 \text{ Па} = 10^4 \text{ дин/см}^2 = 0{,}01 \text{ бар}.$$

Весьма часто давление измеряли непосредственно в миллиметрах ртутного столба (мм рт. ст.) или в торрах (Торр) – в честь Торричелли:

$$1 \text{ Торр} = 1 \text{ мм рт. ст.} =$$
$$= 10^{-3} \text{ м} \cdot 13{,}595 \cdot 10^{3} \text{ кг/м}^{3} \cdot 9{,}80665 \text{ м/с}^{2} =$$
$$= 133{,}3 \text{ Па} = 1333 \text{ дин/см}^{2}.$$

Механическое напряжение. В тех же единицах, что и давление, измеряется механическое напряжение, в том числе составляющие тензора напряжения твердого тела.

Градиент давления. Движение жидкостей и газов по каналам и трубам определяется перепадом давления на единицу длины потока. В случае постоянного сечения потока эта величина может быть представлена в виде

$$-(p_2 - p_1)/(l_2 - l_1),$$

где l – расстояние вдоль потока, отсчитываемое от его начала. При неоднородном сечении потока вместо этого выражения следует писать $-dp/dl$. Величина

$$dp/dl = \operatorname{grad} p \tag{4.30}$$

называется градиентом давления.

Размерность градиента давления

$$[\operatorname{grad} p] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{MT}^{-2}, \tag{4.30 a}$$

а единицы в СИ и СГС измеряются в единицах давления, отнесенных к единице длины: паскаль на метр (Па/м) и дина на квадратный сантиметр-сантиметр (дин/(см^2 · см)). Размерность градиента давления определяет соотношение между его единицами в СИ и СГС:

$$1 \text{ Па/м} = 0{,}1 \text{ дин/(см}^{2} \cdot \text{см)}.$$

Работа. Работа под действием постоянной силы определяется произведением силы на перемещение и на косинус угла между их направлениями (или скалярным произведением силы на перемещение):

$$A = Fl\cos(\widehat{F, l}) = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}. \tag{4.31}$$

Размерность работы находится из ее формулы:

$$[A] = [F][l] = \mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}. \tag{4.31 a}$$

За единицу работы принимается работа, совершенная единицей силы при перемещении точки приложения силы, равном единице длины, в случае, когда сила и перемещение совпадают по направлению. Единица работы в СИ джоуль (Дж) – работа, совершенная силой один ньютон при перемещении точки приложения силы на расстояние один метр в направлении действия силы: 1 Дж = 1 Н · м. Единица работы в СГС эрг (эрг) – работа, совершенная силой в одну дину при перемещении точки приложения силы на расстояние один сантиметр в направлении действия силы: 1 эрг = 1 дин · см. Соотношение между единицами работы в СИ и СГС:

1 Дж = 10^7 эрг.

В 1843 г. Д. Джоуль установил эквивалентность теплоты и механической работы: 1 ккал = 427 кгс · м. В дальнейшем для перехода от тепловых единиц к механическим был зафиксирован механический эквивалент теплоты:

1 кал = 4,1868 Дж.

Это значение было принято как не подлежащее дальнейшему уточнению, как бы ни уточнялись калориметрические измерения. Определяемая этим соотношением калория получила название международной, в отличие от термохимической, использовавшейся при определении теплового эффекта химических реакций: 1 кал (термохим.) = 4,1840 Дж.

В связи с тем что благодаря введению Международной системы единиц калория и кратные ей единицы изъяты из применения, все теплотехнические расчеты проводятся только в рамках СИ. Сюда относятся процессы теплопроводности, теплопередачи, тепловые процессы в металлургическом производстве и т.п. Учитывая, однако, что до настоящего времени довольно широко использовалась литература, в которой применялись старые единицы, представилось целесообразным дать в конце книги таблицы перевода этих единиц в единицы СИ.

Когда измерялась работа, совершаемая при различных процессах изменения состояния газа, иногда использовалась единица, определяемая по работе расширения газа,

$$A = p\,\Delta V, \tag{4.32}$$

где p – давление газа, ΔV – изменение его объема. Если p = 1 атм, а ΔV = 1 л, то соответствующую единицу работы называли литр-атмосферой (л · атм):

$$1 \text{ л} \cdot \text{атм} = 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 1{,}01325 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2 =$$

$$= 1{,}01325 \cdot 10^2 \text{ Дж}.$$

Энергия. В тех же единицах, что и работа, измеряется энергия, как потенциальная $W_п$ ("энергия покоя"), так и кинетическая $W_к$ ("энергия движения"). Сумма обеих энергий дает полную энергию системы:

$$W = W_к + W_п. \tag{4.33}$$

Размерность энергии совпадает с размерностью работы:

$$[W] = \mathrm{L^2MT^{-2}}. \tag{4.33а}$$

Объемная плотность энергии. Иногда энергия оказывается запасенной в некотором объеме. Так, например, сжатый газ обладает определенным запасом энергии, распределенной равномерно в его объеме. Отношение энергии к объему, в котором она распределена, называется объемной плотностью энергии:

$$w = W/V. \qquad (4.34)$$

Ее размерность

$$w = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}, \qquad (4.34\text{ а})$$

и единицы в СИ и СГС – джоуль на кубический метр (Дж/м^3) и эрг на кубический сантиметр (эрг/см^3). Так как размерность плотности энергии совпадает с размерностью давления, то соответственно одинаковыми будут соотношения единиц:

1 Дж/м^3 = 10 эрг/см^3.

Мощность (эффект). Эта величина определяется быстротой совершения работы. Мощность равномерно работающей системы, например машины, механизма и т.п., измеряется работой, совершаемой в единицу времени:

$$P = A/t. \qquad (4.35)$$

Размерность мощности

$$[P] = \mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-3}. \qquad (4.35\text{ а})$$

За единицу мощности принимается мощность такой равномерно работающей системы, которая в единицу времени совершает единицу работы. Соответствующие единицы мощности: в СИ – ватт (1 Вт = 1 Дж/с), в СГС – эрг в секунду (эрг/с). Так как единица времени во всех системах – секунда, то соотношения между единицами мощности такие же, как и между единицами работы:

1 Вт = 10^7 эрг/с.

Широко распространены более крупные и более мелкие десятичные кратные и дольные единицы мощности: киловатт (кВт), мегаватт (МВт), милливатт (мВт), микроватт (мкВт); реже применяется гектоватт (гВт).

Ватт и его десятичные единицы используются для образования единиц энергии, применяющихся почти исключительно для измерения электрической энергии. Эти единицы: ватт-час (Вт · ч), гектоватт-час (гВт · ч), киловатт-час (кВт · ч), мегаватт-час (МВт · ч) – представляют собой работу при соответствующей мощности в течение одного часа. Связь между этими внесистемными единицами энергии и единицей СИ следующая:

1 Вт · ч = 3600 Дж,

1 гВт · ч = $3{,}6 \cdot 10^5$ Дж = 360 кДж,

1 кВт · ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж = 3,6 МДж,

1 МВт · ч = 3600 МДж.

До введения Международной системы единиц в теплотехнике пользовались единицами мощности, основанными на тепловых единицах работы – единицах количества теплоты калории (кал) и килокалорий (ккал). Наиболее распространенным были калория в секунду (кал/с): 1 кал/с = 4,1868 Вт и килокалория в час (ккал/ч): 1 ккал/ч = 1,163 Вт. В этих единицах измерялась производительность источников теплоты, тепловые потоки и т.п. В настоящее время эти единицы изъяты из применения. Однако для удобства пользования литературой прошлых лет единицы величин (включая различные коэффициенты), связанных с тепловыми единицами мощности, приведены в гл. 5 и приложении V.

Ранее весьма распространенной была единица мощности "лошадиная сила" (л.с.): 1 л.с. = 75 кгс · м/с = = 735,5 Вт.

В Англии применяется единица "английская паровая лошадь", или "лошадиная сила Уатта", равная 745,7 Вт.

Коэффициент трения. При движении тела вдоль какой-либо поверхности возникает тормозящая сила – сила трения. Эта сила $F_{тр}$ зависит от природы соприкасающихся поверхностей и пропорциональна нормальной силе давления $F_н$, прижимающей тело к поверхности.

$$F_{тр} = \mu F_н. \qquad (4.36)$$

Коэффициент μ называется коэффициентом трения и, согласно определению, является безразмерной величиной, одинаковой во всех системах.

Коэффициент сопротивления. Если движение тела происходит в какой-либо вязкой среде (газе, жидкости), то возникает сила сопротивления, зависящая от скорости. При небольших скоростях эта сила пропорциональна скорости движения тела:

$$F = rv. \qquad (4.37)$$

Коэффициент r, называемый коэффициентом сопротивления, зависит от свойств среды, размеров и формы тела.

Его размерность

$$[r] = MT^{-1}, \qquad (4.37\,а)$$

и единицы в СИ и СГС – килограмм на секунду (кг/с) и грамм на секунду (г/с). Соотношения между этими единицами те же, что и между единицами массы:

$$1\ кг/с = 10^3\ г/с.$$

Жесткость (коэффициент упругости). Если внешняя сила приложена к упругой системе, то последняя деформируется, причем в пределах применимости закона Гука между линейной деформацией и силой существует прямая пропорциональная зависимость

$$F = -kx. \qquad (4.38)$$

Коэффициент k называется жесткостью.

Формула (4.38) определяет размерность жесткости:

$$[k] = MT^{-2}, \qquad (4.38\,а)$$

и ее единицы в СИ и СГС – ньютон на метр (Н/м = кг/с^2)

и дина на сантиметр (дин/см = г/с^2). Согласно (4.38а)

$$1 \text{ кг/с}^2 = 10^3 \text{ г/с}^2.$$

Величина, обратная жесткости, называется *гибкостью* системы.

Момент силы. Момент силы относительно некоторой точки или оси измеряется произведением силы на плечо, т.е. на расстояние между направлением силы и той точкой, относительно которой взят момент силы.

Из формулы момента силы

$$\mathcal{M} = Fh, \tag{4.39}$$

где F – сила, h – плечо, следует, что размерность момента силы

$$[\,\mathcal{M}\,] = \mathrm{L^2MT^{-2}}. \tag{4.39 а}$$

Видно, что размерность момента силы совпадает с размерностью работы и энергии. Нужно, однако, отметить, что величины эти совершенно различной природы. В то время как работа и энергия не имеют направления – являются величинами скалярными, момент силы обладает направлением, т.е. представляет собой векторную величину*).

За единицу момента силы можно взять момент силы, равной единице, при плече, равном единице длины. Единицы момента силы образуются так же, как и единицы работы, но названия "джоуль", "эрг" и т.п. по отношению к единицам момента силы не применяются. Таким образом, для момента силы в СИ и СГС мы имеем единицы: ньютон-метр (Н · м), дина-сантиметр (дин · см).

---

*) Момент силы относится к категории так называемых аксиальных векторов, положительное направление которых выбирается условно. Вектор момента силы перпендикулярен плоскости, в которой лежат сила и плечо. Направление вектора определяется обычно по правилу буравчика.

Момент инерции (динамический). В механике, в частности при рассмотрении вращательного движения тела, весьма важной является величина, называемая моментом инерции тела относительно некоторой оси. Для наглядности определим сначала момент инерции материальной точки, он равен

$$J = m r^2, \tag{4.40}$$

где m – масса материальной точки, а r – ее расстояние до оси, относительно которой определяется момент инерции.

Для системы жестко связанных материальных точек или для твердого тела момент инерции относительно некоторой оси вращения можно определить как сумму

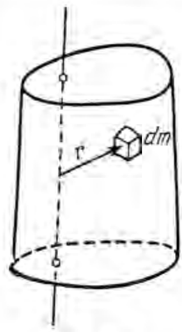


Рис. 16

произведений масс отдельных материальных точек (из которых построена система или на которые можно разбить тело) на квадраты соответствующих радиусов – расстояний от оси вращения (рис. 16):

для системы точек

$$J = \Sigma m r^2,$$

для сплошного тела

$$J = \int\limits_V r^2 dm.$$

В процессе изучения вопросов, связанных с вращением тел, выясняется сущность и роль момента инерции. Оказывается, что все формулы, описывающие вращательное движение твердого тела, имеют вид, аналогичный соответствующим формулам для поступательного движения, если в последних заменить линейные величины (скорость, ускорение) соответствующими угловыми величинами (угловая скорость, угловое ускорение), массу – моментом инерции относительно оси вращения, а силу – моментом силы.

Размерность момента инерции

$$[J] = L^2M. \qquad (4.40\,а)$$

За единицу момента инерции можно принять момент инерции материальной точки, обладающей массой, равной единице, находящейся на расстоянии от оси, равным единице длины. Эти единицы в СИ и СГС – килограмм-метр в квадрате (кг · м^2), грамм-сантиметр в квадрате (г · см^2). Соотношения между ними:

$$1\ кг \cdot м^2 = 10^7\ г \cdot см^2.$$

Импульс момента силы. Импульсом момента силы относительно некоторой оси называется произведение момента силы относительно данной оси на время действия силы:

$$\mathcal{M}t = Fht. \qquad (4.41)$$

Формула, определяющая импульс момента силы, дает для его размерности

$$[\mathcal{M}t] = L^2MT^{-1}. \qquad (4.41\,а)$$

Момент количества движения (момент импульса*)). Моментом количества движения материальной точки, вращающейся вокруг некоторой оси, называется произведение количества движения этой точки на расстояние до оси вращения:

$$\mathcal{L} = mvr. \qquad (4.42)$$

Так как линейная скорость при вращении может быть выражена через угловую скорость по формуле

$$v = \omega r,$$

то момент количества движения может быть представлен в виде

$$\mathcal{L} = J\omega. \qquad (4.43)$$

Мы видим, таким образом, что момент количества движения (момент импульса) равен произведению момента инерции вращающейся точки относительно оси вращения на угловую скорость.

Из формул (4.42) и (4.43) вытекает, что размерность момента количества движения, так же как и импульса момента силы, равна

$$[\mathcal{L}] = \mathrm{L^2MT^{-1}}. \qquad (4.43\,а)$$

Равенство размерностей импульса момента силы и момента количества движения, естественно, вытекает из закона "импульс момента силы относительно оси вращения равен приросту момента количества движения":

$$\mathcal{M}t = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1.$$

Точно так же совпадают и единицы импульса момента силы и момента количества движения. Эти единицы можно определить как импульс момента силы, равного едини-

---

*) Иногда применяются названия "кинетический момент" и "угловой момент".

це, за единицу времени или как момент количества движения тела, обладающего моментом инерции, равным единице, и вращающегося с угловой скоростью, равной единице. Эти единицы в СИ и СГС — килограмм-метр в квадрате на секунду (кг · м^2/с) и грамм-сантиметр в квадрате на секунду (г · см^2/с). Соотношения между ними такие же, как и между соответствующими единицами работы или единицами момента инерции, поскольку единица времени во всех системах одна и та же:

1 кг · м^2/с = 10^7 г · см^2/с.

Действие. В аналитической и квантовой механике и в ряде других областей физики играет существенную роль величина, называемая *действием* и имеющая размерность произведения энергии на время. Не останавливаясь на ее физической сущности, заметим, что размерность действия совпадает с размерностью момента количества движения или импульса момента силы и соответственно измеряется такими же единицами.

Массовый расход. При исследовании процесса течения жидкостей и газов, наряду с рассмотренным на с. 142 объемным расходом, применяется величина, называемая массовым расходом или расходом массы — отношение массы жидкости (газа), протекающей через поперечное сечение, к времени протекания:

$$Q_m = dm/dt. \tag{4.44}$$

Размерность массового расхода

$$[Q_m] = \mathrm{MT}^{-1}, \tag{4.44 а}$$

и соответственно единицы в СИ и СГС — килограмм в секунду (кг/с), грамм в секунду (г/с). Соотношения между ними, очевидно, те же, что и между единицами массы.

Массовая скорость потока. Аналогично плотности объемного расхода определяется и массовая скорость потока, или плотность массового расхода q_m: как отношение массового расхода к площади поперечного сечения потока.

Соответственно размерность

$$[q_m] = L^{-2} MT^{-1}, \qquad (4.45\text{ а})$$

и единицы в СИ и СГС – килограмм в секунду на квадратный метр (кг/(с · м^2)), грамм в секунду на квадратный сантиметр (г/(с · см^2)). Соотношение между единицами:

$$1 \text{ кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^2) = 0{,}1 \text{ г}/(\text{с} \cdot \text{см}^2).$$

Динамические характеристики колебательных систем. Наряду с кинематическими величинами: частотой, периодом, фазой, амплитудой – колебательная система характеризуется рядом динамических величин, среди которых – кинетическая и потенциальная энергии и их единицы, рассмотренные выше. Важное значение имеют величины, характеризующие свойства реальной колебательной системы. Система, выведенная из состояния равновесия, постепенно возвращается к нему, причем в зависимости от ее механических параметров (массы, жесткости, коэффициента, характеризующего трение или сопротивление среды) процесс возвращения может быть либо апериодическим, либо колебательным.

Если сила сопротивления пропорциональна скорости и соотношение параметров таково, что процесс затухания имеет колебательный характер, то движение системы может быть представлено в виде (рис. 17)

$$x = A \exp(-\beta t) \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (4.46)$$

Здесь x – отклонение от положения равновесия, A – первый полуразмах колебания, который был бы, если бы начальная фаза φ_0 равнялась $\pi/2$, β – *коэффициент затухания* и ω – *круговая* (или циклическая) *частота.*

Размерность коэффициента затухания

$$[\beta] = T^{-1} \qquad (4.46\text{ а})$$

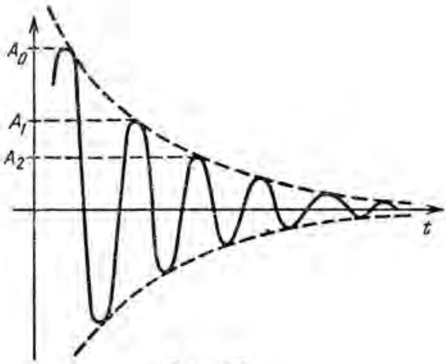


Рис. 17

определяет его единицу во всех системах – секунду в минус первой степени (c^{-1}).

Обычно затухание принято характеризовать *декрементом колебаний**) δ, который равен

$$\delta = \beta\tau, \tag{4.47}$$

где τ – период колебаний. Из определения (4.47) видно, что δ – величина безразмерная. Из формул (4.46) и (4.47) можно легко показать, что декремент колебаний равен натуральному логарифму отношения двух последовательных полуразмахов колебания.

Второй важной характеристикой колебательной системы является ее *добротность*, определяемая формулой

$$Q = 2\pi\frac{W}{W_п}. \tag{4.48}$$

Здесь W – полная энергия системы при резонансе, а $W_п$ –

---

*) В литературе применяют часто название "логарифмический декремент затухания". Слово "затухания" здесь лишнее, так как оно тождественно слову "декремент".

потеря энергии за один период. Очевидно, что Q – величина безразмерная. Можно показать, что для механической системы добротность

$$Q = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (4.49)$$

где k – жесткость системы (см. (4.38)).

§ 4.5. Единицы величин, характеризующих механические и молекулярные свойства вещества

Как в научных исследованиях, так и в повседневной практике мы пользуемся самыми разнообразными свойствами тех материалов, с которыми нам приходится иметь дело. Эти свойства, как правило, характеризуются определенными величинами и могут быть так или иначе количественно измерены. Различные материалы обладают различной механической прочностью, различной упругостью и т.д.

Кроме того, вещество обладает и рядом молекулярных характеристик, связанных либо с его строением, либо с теми процессами, в которых проявляется его молекулярная природа. В настоящем параграфе рассматриваются главным образом единицы величин, характеризующих те механические и молекулярные свойства вещества, с которыми приходится иметь дело в физике и смежных дисциплинах.

Плотность (объемная). Плотность вещества определяется как отношение массы однородного тела к его объему:

$$\rho = m/V. \qquad (4.50)$$

Размерность плотности

$$[\rho] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}. \qquad (4.50\,а)$$

За единицу плотности принимается плотность такого однородного вещества, единица объема которого содержит единицу массу вещества. В СИ единицей плотности является килограмм на кубический метр (кг/м^3), в СГС – грамм на кубический сантиметр (г/см^3). Соотношение между этими единицами:

$$1 \text{ кг/м}^3 = 10^{-3} \text{ г/см}^3.$$

Часто, в особенности когда речь идет о газе, плотность измеряют в граммах на литр (г/л). Числовое значение плотности, выраженной в граммах на литр, совпадает с числовым значением плотности в килограммах на кубический метр: 1 кг/м^3 = 1 г/л = 10^{-3} г/см^3.

Для измерения плотности жидкости широко используется ареометр, представляющий собой поплавок, в верхней части которого находится тонкая трубка с делениями. В настоящее время эти деления прямо показывают плотность жидкости. Однако ранее деления наносились на равном расстоянии друг от друга и плотность измерялась в условных градусах. Если в жидкость, плотность которой равна ρ_0, ареометр погружен до отметки, принятой за нулевую, причем объем погруженной части равен V, а при погружении в жидкость с плотностью ρ уровень изменяется на n делений и объем жидкости между двумя делениями равен v, то

$$\rho = \rho_0 \frac{V}{V \pm nv},$$

где знак плюс соответствует более легкой, а минус – более тяжелой жидкости. В разных ареометрах регламентируется определенное отношение

$$N = V/v.$$

При этом деления шкалы переводятся в относительную плотность ρ/ρ_0 по формуле

$$\rho/\rho_0 = N/(N \pm n).$$

Поверхностная и линейная плотности. Иногда нас интересует распределение массы по поверхности или по длине. Первое измеряется массой, приходящейся на единицу поверхности, второе – массой, приходящейся на единицу длины. Поверхностной плотностью характеризуются различные сорта бумаги, листовой прокат, лакокрасочные покрытия и т.п. Единицы поверхностной плотности в СИ и СГС – килограмм на квадратный метр (кг/м^2) и грамм на квадратный сантиметр (г/см^2). Соотношение между ними:

$$1\ \text{кг/м}^2 = 0{,}1\ \text{г/см}^2.$$

Линейно-протяженные предметы (рельсы, трубы, провода и т.п.) характеризуются линейной плотностью. Единицы линейной плотности в СИ и СГС – килограмм на метр (кг/м) и грамм на сантиметр (г/см). Соотношение между ними:

$$1\ \text{кг/м} = 10\ \text{г/см}.$$

Удельный объем. Величина, обратная плотности, называется удельным объемом:

$$\upsilon = 1/\rho = V/m. \tag{4.51}$$

Размерность удельного объема

$$[\upsilon] = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}. \tag{4.51 а}$$

Все единицы удельного объема являются обратными соответствующим единицам плотности.

Удельный вес. Отношение веса однородного тела к его объему называется удельным весом:

$$\gamma = F/V. \tag{4.52}$$

Так как вес тела и его масса связаны соотношением

$$F = mg, \tag{4.53}$$

где g – ускорение свободного падения, то связь между плотностью ρ и удельным весом γ имеет вид

$$\gamma = \rho g. \tag{4.54}$$

Размерность удельного веса

$$[\gamma] = L^{-2} M T^{-2} \qquad (4.54\,а)$$

За единицу удельного веса должен быть принят удельный вес такого однородного вещества, единица объема которого притягивается к Земле с силой, равной единице силы. При таком определении удельный вес зависит от географической широты. В таблицах удельный вес определяется формулой (4.54), в которой под g понимается нормальное ускорение. Единицы удельного веса в СИ и СГС – ньютон на кубический метр (Н/м^3) и дина на кубический сантиметр (дин/см^3). Соотношение между единицами:

$$1\ Н/м^3 = 0{,}1\ дин/см^3.$$

Удельный вес воды в разных системах равен 9810 Н/м^3 = = 981 дин /см^3.

Раньше применялись единицы удельного веса грамм-сила на кубический сантиметр (гс/см^3) и килограмм-сила на литр (кгс/л). Обе эти единицы совпадают и практически равны удельному весу воды при 4 °С. Числовое значение удельного веса, выраженного в гс/см^3 или кгс/л, совпадает с числовым значением плотности, выраженной в г/см^3 или кг/л.

Количество вещества (число молей). С точки зрения современной физики понятие "количество вещества" довольно расплывчато. Во времена Ньютона количество вещества отождествлялось с массой. В современной метрологии количеством вещества называется число атомов, молекул, ионов, или, как говорят, число "структурных элементов", из которых состоит вещество. Таким образом, равные количества вещества содержат, как правило, разные массы. За единицу количества вещества принимается моль (моль), определяемый как **количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.** Это число частиц, содержащееся в моле любого вещества, называется постоянной Авогадро и обозначается N_A:

$$N_A = \frac{0{,}012 \text{ кг/моль}}{m_C} = 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}, \qquad (4.55)$$

где m_C – масса атома углерода. 1000 молей образуют соответственно киломоль (кмоль). В округленных числах моль водорода содержит 2 грамма, кислорода – 32 грамма, воды – 18 граммов, и т.д.

В связи с тем что количество вещества отнесено к разряду основных величин СИ, для его единицы установлена самостоятельная размерность, обозначаемая N.

Если известно количество вещества (обозначим его ν), всегда можно определить число молекул z (атомов, ионов и др.) в этом количестве:

$$z = \nu N_A.$$

Применение термина "количество вещества" нередко встречает серьезное возражение, которое аргументируют тем, что при диссоциации многоатомных молекул вещества число "структурных элементов" увеличивается, а следовательно, увеличивается "количество вещества", что представляется мало логичным. В качестве примера приводятся пары иода, молекулы которого при низких температурах состоят из двух атомов, а при нагревании становятся одноатомными. "Количество вещества" при этом как бы удваивается.

Относительная молекулярная масса (молекулярная масса). Относительной молекулярной массой вещества M_r называется отношение массы молекулы m_0 этого вещества в 1/12 массы атома углерода m_C:

$$M_r = \frac{m_0}{{}^1/_{12}\, m_C}\,. \tag{4.56}$$

Из определения относительной молекулярной массы видно, что M_r – величина безразмерная.

Молярная масса. Масса вещества, взятого в количестве одного моля, называется молярной массой, т.е.

$$M = m_0 N_A\,. \tag{4.57}$$

Согласно (4.56) $m_0 = M_r \cdot {}^1/_{12}\, m_C$. Следовательно,

$$M = M_r \cdot {}^1/_{12}\, m_C N_A = 10^{-3} M_r\,[\text{кг/моль}] = M_r\ [\text{г/моль}]\,.$$

Итак, молярная масса вещества численно совпадает с относительной молекулярной массой, но является размерной величиной. Размерность молярной массы

$$[M] = \mathrm{MN}^{-1}\,. \tag{4.57а}$$

Массу m любого количества вещества можно найти, зная массу одной частицы m_0 и число частиц z в данном веществе или зная молярную массу M и количество вещества ν:

$$m = m_0 z = m_0 \nu N_A = M\nu.$$

Молярный объем. Объем вещества, приходящийся на один моль, называется молярным объемом.

Размерность молярного объема

$$[V_M] = \mathrm{L}^3\mathrm{N}^{-1}\,. \tag{4.58а}$$

Единица молярного объема в СИ – кубический метр на моль (м^3/моль).

Молярный объем при нормальных условиях, т.е. при 0 °С и давлении 1 атм, равен $22{,}41 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль и называется нормальным объемом.

Модуль продольной упругости (модуль Юнга). Если твердый образец подвергнуть одностороннему растяжению или сжатию, он деформируется (растягивается или сжимается), причем его деформация подчиняется (в некоторых пределах) закону Гука

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{F}{S} l. \tag{4.59}$$

В этой формуле Δl – деформация, l – первоначальная длина, F – деформирующая сила, S – площадь поперечного сечения образца. Стоящий в знаменателе коэффициент E носит название модуля продольной упругости или модуля Юнга.

Из (4.59) вытекает, что модуль Юнга обладает размерностью

$$[E] = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{MT}^{-2}, \tag{4.59a}$$

совпадающей с размерностью давления. Также совпадают с единицей давления и единицы модуля продольной упругости в СИ и СГС: паскаль (Па) и дина на квадратный сантиметр (дин/см^2). В таблицах старых изданий можно встретить единицы килограмм-сила на квадратный метр или на квадратный миллиметр (кгс/м^2, кгс/мм^2).

Уравнение (4.59) иногда записывают в виде

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = E\epsilon,$$

где ϵ – относительная деформация, а σ – механическое напряжение.

Модуль Юнга численно равен нагрузке, которую следует приложить к образцу, площадь которого равна единице, чтобы его длина увеличилась вдвое (при условии, что образец подчиняется закону Гука и при этом не разрушается).

Величина, обратная модулю Юнга, называется *коэффициентом продольной упругости*:

$$k = 1/E. \qquad (4.60)$$

Ясно, что коэффициент продольной упругости имеет размерность, обратную размерности модуля Юнга:

$$[k] = \mathrm{LM}^{-1}\mathrm{T}^{2}. \qquad (4.60\,а)$$

Модуль сдвига. Представим себе прямоугольный параллелепипед, к двум противоположным граням которого приложена пара касательных сил. Под действием этой пары сил произойдет сдвиг и параллелепипед станет косоугольным. Угол сдвига между новым и старым направлениями боковых граней определится уравнением

$$\gamma = \frac{1}{G}\,\frac{F}{S}\,. \qquad (4.61)$$

Здесь F – каждая из сил пары, S – площадь граней, к которым приложены силы, γ – угол сдвига, а G – модуль сдвига. Из формулы (4.61) видно, что размерность (а следовательно, и единицы) совпадает с размерностью модуля Юнга и давления.

Подобно (4.59) уравнение (4.61) может быть переписано в виде

$$\tau = \frac{F}{S} = G\gamma,$$

где τ – касательное напряжение.

Соотношения между единицами модуля сдвига, как и соотношения между единицами модуля Юнга, те же, что и между единицами давления.

Модуль объемного сжатия (модуль объемной упругости). Если тело подвергнуто всестороннему сжатию, то объем его уменьшается, что можно записать следующим образом:

$$dV = -\frac{1}{K} V\,dp. \tag{4.62}$$

Здесь V – объем при некотором давлении p, dV – изменение (приращение) объема при увеличении давления на dp. Коэффициент K называется модулем объемного сжатия или объемной упругости. Чаще пользуются обратной величиной

$$\beta = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}, \tag{4.63}$$

называемой *сжимаемостью* (коэффициентом сжимаемости).

Понятие модуля объемного сжатия (сжимаемости) применимо не только к твердым телам, но и к жидкостям и газам. Сжимаемость газов зависит от того обратимого процесса, по которому производится сжатие. Легко определить, что для изотермического сжатия идеального газа сжимаемость равна $\beta = p$, а для адиабатического $\beta = \gamma p$.

Всесторонее сжатие твердого тела можно осуществить, если поместить это тело в сосуд с жидкостью или газом и приложить к жидкости или газу внешнее давление.

Единицы сжимаемости обратны единицам давления: паскаль в минус первой степени ($Па^{-1}$) – СИ и квадратный сантиметр на дину ($см^2$/дин) – СГС.

Твердость. Сопротивление тел разрушению или образованию остаточной деформации при воздействии на их поверхность достаточно больших деформирующих сил характеризуется твердостью. Так как при различном характере воздействия на поверхность тела оно ведет себя различным образом, трудно указать достаточно объективную и однозначную характеристику твердости.

При разрушении твердого тела можно пытаться оценивать твердость работой разрушения, отнесенной к единице площади вновь образованной поверхности (учитывая, что при разрушении происходит увеличение поверхности тела). При таком определениии твердость должна измеряться теми же единицами, что и поверхностное натяжение, определяемое по свободной энергии, приходящейся на единицу поверхности. Следует, однако, отметить, что истинная работа разрушения значительно больше увеличения свободной энергии поверхности, так как подавляющая часть затрачиваемой работы рассеивается в виде тепла. Существенно также и то, что при различных способах обработки фактически затрачиваемая работа может быть весьма разной. Поэтому в технической практике получили распространение условные методы оценки твердости материалов.

В минералогии применяются шкалы твердости, в которых числами в возрастающем порядке обозначены материалы, расположенные таким образом, что каждый последующий способен оставлять царапину на предыдущем. Крайними в этих шкалах являются тальк и алмаз. Расположение минералов в шкалах твердости Моса и Брейтгаупта дано в приложении XII.

В технике применяются методы определения твердости, основанные на измерении размеров лунок, получаемых при вдавливании в поверхность испытуемого материала стальных шариков, алмазных конусов или призм (твердость по Бринеллю, по Роквеллу, по Виккерсу).

Для иллюстрации приведем метод определения твердости по Бринеллю, в котором определение твердости производится вдавливание закаленного стального шарика в поверхность испытуемого тела под действием определенной нагрузки. При этом измеряется диаметр образованной лунки d. Если диаметр шарика D, а нагрузка P, то мерой твердости служит величина H_B, определяемая формулой

$$H_B = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}.$$

Ударная вязкость. Наряду с твердостью сопротивление материала разрушению характеризуется ударной вязкостью, которая измеряется работой, расходуемой для ударного излома образца, отнесенной к единице площади его поперечного сечения в месте излома.

Единицы ударной вязкости в СИ и СГС – джоуль на квадратный метр и эрг на квадратный сантиметр (Дж/м^2, эрг/см^2). Соотношения между ними:

1 Дж/м^2 = 10^3 эрг/см^2.

Динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения). Если в жидкости или газе происходит ламинарное (струйчатое) течение отдельных слоев друг относительно друга, то между слоями возникает сила, направленная касательно к поверхности этих слоев. Наличие вязкости приводит также к возникновению силы, действующей на каждое тело, движущееся в жидкости или газе или же обтекаемое потоком жидкости или газа. Эта сила, называемая силой вязкости (внутреннего трения), выражается формулой

$$F = -\mu \frac{dv}{dl} S. \tag{4.64}$$

Здесь dv/dl – градиент скорости, S – площадь, на которую действует сила F, μ – динамическая вязкость; знак минус показывает, что сила направлена навстречу слою, движущемуся с большей скоростью.

Из формулы (4.64) явствует как определение, так и размерность единицы динамической вязкости. Последняя определяется силой, которую испытывает единица поверхности одного из взаимодействующих слоев со стороны другого слоя, если градиент скорости между слоями равен единице.

Размерность вязкости

$$[\mu] = L^{-1}MT^{-1} = [p] \cdot T. \tag{4.64 a}$$

В СИ единица динамической вязкости называется паскаль-секундой (Па · с). В СГС единица динамической вязкости дина-секунда на квадратный сантиметр (дин · с/см^2) имеет наименование пуаз (П). Из формулы размерности вязкости легко можно получить ее связь в СИ и СГС:

1 Па · с = 10 П.

Вязкость воды при 20,5°С довольно точно равна 0,01 или 1 сП. При понижении температуры вязкость жидкости растет. В частности, вязкость воды при 0°С составляет 1,79 сП. Отношение вязкости жидкости к вязкости воды при той же температуре называется относительной динамической вязкостью. Отношение вязкости жидкости к вязкости воды при 0°С называется удельной вязкостью. Разумеется, как относительная, так и удельная вязкости – величины нулевой размерности.

Для практического определения динамической вязкости предложено большое число разнообразных приборов, носящих общее название вискозиметров. Некоторые из них позволяют определять вязкость в любых из приведенных выше единиц. Раньше применялись также и вискозиметры, которые давали значение вязкости в условных единицах, например вискозиметр Энглера.

Величина, обратная динамической вязкости, называется *текучестью* (коэффициентом текучести):

$$\varphi = \frac{1}{\mu}. \tag{4.65}$$

Размерность текучести

$$[\varphi] = LM^{-1}T. \tag{4.65 а}$$

Текучесть численно равна скорости, которую приобретает одна из двух горизонтальных пластинок по отношению к другой, если на единицу площади первой действует касательная сила, равная единице, расстояние между пластинками равно единице длины и пространство между пластинками заполнено данной жидкостью. Единица текучести в СИ – паскаль в минус первой степени-секунда в минус первой степени ($Па^{-1} \cdot с^{-1}$), в СГС – пауз в минус первой степени ($П^{-1}$).

Кинематическая вязкость. Кроме рассмотренной динамической вязкости в гидродинамике широко используют кинематическую вязкость, которая определяется как отношение динамической вязкости к плотности жидкости:

$$\nu = \mu/\rho. \tag{4.66}$$

Размерность кинематической вязкости

$$[\nu] = L^2 T^{-1} \tag{4.66 а}$$

совпадает с размерностями коэффициентов диффузии и температуропроводности. В соответствии с размерностью единица кинематической вязкости в СИ – квадратный метр на секунду ($м^2/с$); в СГС единица вязкости квадратный сантиметр на секунду ($см^2/с$) называется стоксом (Ст):

$$1\ Ст = 10^{-4}\ м^2/с.$$

Поверхностное натяжение (коэффициент поверхностного натяжения). Поверхностное натяжение жидкости определяется отношением силы, которую испытывает каждая граница жидкой пленки, к длине этой границы. Поверхностное натяжение можно также определить отношением свободной энергии $\mathcal{F}$ *) поверхности жидкой пленки к площади поверхности:

$$\sigma = \mathcal{F}/S. \tag{4.67}$$

Из обоих этих определений вытекает размерность поверхностного натяжения

$$[\sigma] = [F]/[l] = [\mathcal{F}]/[S] = \mathrm{MT}^{-2}. \tag{4.67 a}$$

Единица поверхностного натяжения определяется как поверхностное натяжение такой жидкой пленки, каждая единица длины границы которой испытывает силу, равную единице, или же каждая единица поверхности которой обладает свободной энергией, равной единице.

Определение поверхностного натяжения и его единицы как свободной энергии единицы поверхности позволяет распространить понятие поверхностного натяжения и на твердое тело, поскольку молекулы, находящиеся в поверхностном слое тела, обладают повышенной потенциальной энергией по сравнению с молекулами, находящимися внутри тела.

Единица поверхностного натяжения в СИ – ньютон на метр (Н/м) или джоуль на квадратный метр (Дж/м^2), в СГС – дина на сантиметр (дин/см) или эрг на квадратный сантиметр (эрг/см^2).

В таблицах иногда фигурирует единица поверхностного натяжения миллиграмм-сила на миллиметр (мгс/мм): 1мгс/мм = 9,81 дин/см.

Размерность "частица". В молекулярной, атомной и ядерной физике, наряду с макроскопическими величинами (плотность, вязкость и т.п.), приходится иметь

---

*) Свободная энергия приближенно определяется как та часть энергии системы, которая может быть превращена в работу. Более строгое определение дается в курсе термодинамики.

дело с величинами, характеризующими свойства отдельных частиц – молекул, атомов, электронов, ионов и т.д. Такие величины, как энергия, масса, заряд частиц, должны выражаться единицами энергии, массы, заряда, отнесенными к отдельной частице. Хотя размерность "частица" обычно не вводится в обозначения соответствующих единиц, но в скрытом виде она присутствует в единицах ряда величин.

В связи с введением в метрологию новой величины – количества вещества – размерность "частица" стала в известной мере законной, с той лишь оговоркой, что за единицу принимается не одна частица, а число частиц (или, как сказано в определении количества вещества, число структурных элементов), содержащихся в одном моле, т.е. постоянная Авогадро.

Концентрация. Число частиц, отнесенное к единице объема, называется концентрацией.

Размерность концентрации

$$[n] = \mathrm{L}^{-3}. \tag{4.68a}$$

Соответственно единицы концентрации в СИ и СГС – метр в минус третьей степени и сантиметр в минус третьей степени ($м^{-3}$ и $см^{-3}$).

Молярная концентрация. В химии концентрацию измеряют не числом частиц, а числом молей в единице объема и называют молярной. Размерность молярной концентрации

$$[c] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{N}. \tag{4.69}$$

Соответственно единицы молярной концентрации в СИ и СГС – моль на кубический метр и моль на кубический сантиметр ($моль/м^3$ и $моль/см^3$).

Зная молярную концентрацию можно определить концентрацию частиц, если умножить молярную концентрацию на постоянную Авогадро, выраженную числом частиц в моле вещества ($моль^{-1}$): $n = cN_\mathrm{A}$. Чаще всего молярную концентрацию измеряют в молях на литр (моль/л). Концентрация 1 моль/л называется нормальной концентрацией.

Коэффициент диффузии. При неравномерной плотности жидкость, газ или растворенное вещество будут диффундировать в направлении, противоположном градиенту плотности. Масса вещества Δm, диффундирующего за время Δt, определяется формулой

$$\Delta m = -D \frac{d\rho}{dl} S\Delta t. \tag{4.70}$$

Здесь $d\rho/dl$ – градиент плотности, S – площадь поверхности, через которую происходит диффузия, D – коэффициент диффузии. Число молекул, продиффундировавших за время Δt, можно записать в виде

$$\Delta N = -D \frac{dn}{dl} S\Delta t, \tag{4.71}$$

где dn/dl – градиент концентрации.

Обе формулы идентичны, так как первую из них можно получить из второй умножением обеих частей на массу молекулы. Каждая из этих формул может служить для определения коэффициента диффузии. Он измеряется массой или числом молекул, которое продиффундирует в единицу времени через единичную площадь при градиенте плотности, равном единице. Любая из формул ((4.70) и (4.71)) дает одинаковую размерность коэффициента диффузии:

$$[D] = \frac{[m]\,[l]}{[\rho]\,[S]\,[t]} = \mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1} \tag{4.70a}$$

или же

$$[D] = \frac{[N]\,[l]}{[n]\,[S]\,[t]} = \mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}, \tag{4.71a}$$

что, как мы указывали, совпадает с размерностью кинематической вязкости (см. (4.66а)). Единицы коэффициента диффузии также совпадают с единицами кинематической вязкости: квадратный метр на секунду ($м^2/с$) – СИ, квадратный сантиметр на секунду ($см^2/с$) – СГС.

Функция распределения. Статистический характер молекулярных процессов проявляется в том, что величины, характеризующие поведение молекул, не являются одинаковыми для всех частиц, входящих в данную систему, а имеют различные значения, распределенные по тому или иному закону. В качестве примера на рис. 18 показано максвелловское распределение по скоростям молекул газа. Площадь заштрихованного участка под кривой между значениями скорости молекул v_1 и v_2 представляет собой число молекул, скорости которых больше чем v_1, и меньше чем v_2. В малом интервале между скоростями v и $v + dv$ заключено число молекул

$$dN = \mathcal{F}(v)\, dv, \tag{4.72}$$

где $\mathcal{F}(v)$ называется функцией распределения молекул

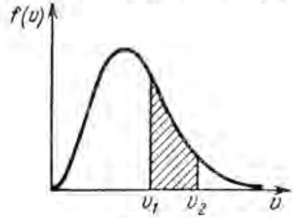


Рис. 18

по скоростям. Согласно определению $\mathcal{F}(v) = dN/dv$, и размерность функции распределения по скоростям

$$[\mathcal{F}(v)] = L^{-1}T. \tag{4.72 а}$$

Подобно функции распределения по скоростям может быть определена функция распределения по любой другой статистической характеристике – энергии, длине свободного пробега и т.д. Все эти функции распределения имеют размерность, представляющую собой отношение размерности "частица" к размерности той величины, распределение по которой характеризуется данной функцией.

В ряде случаев функцию распределения относят к общему числу частиц. Определенная таким образом функция распределения называется нормированной на единицу. Обозначая нормированную на единицу функцию распределения по скоростям $f(v)$, можно написать

$$f(v) = \frac{1}{N}\ \mathcal{F}(v), \tag{4.73}$$

где N – общее число частиц. Очевидно,

$$\int_0^\infty f(v) = 1. \tag{4.74}$$

Размерность нормированной функции распределения просто обратна размерности той величины, распределение по которой определяется данной функцией.

При функции распределения по скоростям, нормированной на единицу, площадь заштрихованного участка на рис. 18 имеет смысл вероятности того, что скорость молекулы лежит в интервале между v_1 и v_2.

Глава 5

ЕДИНИЦЫ ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

§ 5.1. Температура

Основной величиной в учении о теплоте является температура. Понятие температуры известно каждому человеку с детства. Более того, оно "знакомо" всякому живому существу и даже каждому растению. Несмотря на это, а может быть, именно поэтому, дать определение температуры оказывается весьма сложным. В элементарных учебниках температура иногда определяется как "степень нагретости тела", иногда как "причина ощущения тепла и холода". Эти определения при известной наглядности не дают количественной характеристики температуры. Такому требованию могут удовлетворить строгие определения, связывающие температуру с разными термодинамическими функциями. Однако они страдают другим недостатком: они менее наглядны и требуют предварительного знакомства с более сложными и абстрактными понятиями.

Другой подход к определению температуры возможен на основе статистической физики, в которой температура является параметром, определяющим различные функции распределения (молекул по скоростям, энергии излучения по длинам волн и т.п.) в изолированной системе, все части которой находятся во взаимном тепловом равновесии.

В связи с задачами настоящей книги мы не будем анализировать различные строгие определения температуры, а поступим следующим образом: будем считать понятие температуры качественно знакомым читателю и поставим вопрос о способах измерения температуры. Не приходится доказывать, что каждому знакомы понятия "холодное", "теплое", "горячее", знакомы и способы измерения температуры обычным жидкостным термометром.

Очевидно, что при этих измерениях нельзя поставить вопрос о том, во сколько раз одна температура больше или меньше другой. Ведь по принятой в обыденной жизни стоградусной шкале мы имеем и положительные, и отрицательные температуры, так что отношение двух температур может быть и положительным, и отрицательным, и даже равным бесконечности. Достаточно широко известна введенная У. Кельвином "абсолютная шкала температур". Как показано будет ниже, абсолютная шкала температур совпадает с термодинамической. Единица последней называется "кельвин" и обозначается К.

По абсолютной шкале все температуры положительны, и приведенное сомнение как будто отпадает*). Тем не менее остается открытым вопрос о том, в какой мере температура, измеренная по абсолютной шкале, является действительно "абсолютной" и каков критерий того, что при этом 600 К вдвое больше, чем 300 К, или что интеграл от 1000 до 1 500 К в пять раз больше, чем интер-

*) В современной квантовой электронике иногда пользуются условным понятием отрицательной температуры для описания систем, находящихся в таком неравновесном состоянии, в котором число частиц на более высоком квантовом уровне больше, чем на более низком. Физического смысла такая "отрицательная" температура не имеет. С известными оговорками возможно применение понятия отрицательной температуры в тех случаях, когда система может находиться в ограниченном числе состояний (например, в двух, отличающихся направлением ориентации спинов). С точки зрения задач настоящей книги этот вопрос не имеет существенного значения.

вал от 400 до 500 К. Дело в том, что, хотя мы обладаем способностью воспринимать температуру (термическое осязание) и качественно сравнивать температуры в доступной нам области, мы не располагаем никакими методами прямого измерения температуры. Для того же, чтобы иметь косвенный метод, нам необходимо связать температуру с другими величинами, измерение которых нам доступно.

Прежде всего здесь следует обратиться к таким свойствам окружающих нас тел, которые, по нашим наблюдениям, изменяются с изменением температуры. Естественно при этом использовать расширение тел при нагревании. Так родились термометры, измеряющие температуру по изменению объема жидкости. При более тщательном исследовании оказалось, что в этом способе скрывалась существенная неоднозначность, которую можно наглядно проиллюстрировать. Представим себе, что изготовлено несколько термометров, заполненных разными жидкостями. Отметим на них одинаковые "опорные точки", например температуры плавления каких-либо двух веществ. Разделим на всех термометрах шкалу между этими точками на одинаковое число равноотстоящих частей. Если теперь все термометры поместить в среду, обладающую какой-то промежуточной температурой, то, как обнаружит опыт, показания разных термометров будут различными. Особенно курьезно вел бы себя при этом термометр, который мы решили бы заполнить водой. При температуре несколько более высокой, чем точка плавления льда, его столбик стоял бы не выше, а ниже этой точки.

Таким образом, разные законы изменения объема разных жидкостей (вплоть до изменения знака закона) как будто лишают нас возможности дать однозначный способ измерения температуры. Положение существенно улучшилось, когда Гей-Люссаком было обнаружено, что газы при повышении температуры расширяются практически одинаково. Опытный закон Бойля – Мариотта и опытный закон одинакового расширения газов (закон Гей-Люссака) Менделееву и Клапейрону удалось объединить в общий закон, выражающий зависимость объема газа от давления и температуры. Приняв, что объем газа при постоянном давлении (или, более общо, произведение объема данной массы газа на его давление) является линейной характеристикой температуры, можно было объединенный закон представить в следующем виде:

$$pV = C(1 + \alpha t), \tag{5.1}$$

где p – давление газа, V – его объем, t – температура, отсчитываемая от любой начальной точки, α – постоянный коэффициент, зависящий от выбора начальной температурной точки и масштаба измерения температуры,

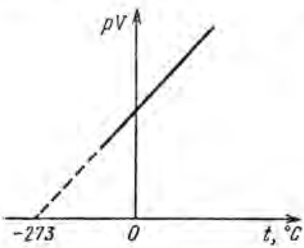


Рис. 19

C – коэффициент, зависящий от массы данного газа, единиц p и V и от масштаба измерения температуры.

Графически закон (5.1) может быть изображен прямой линией (рис. 19), пересекающей ось ординат. Представилось целесообразным экстраполировать эту линию до пересечения с осью абсцисс и выбрать точку пересечения за начало отсчета температур. Таким образом и было введено понятие об "абсолютной температуре".

Что касается масштаба измерения этой температуры, то он, разумеется, мог быть вполне произвольным. Его выбрали таким, чтобы интервал между точками таяния льда и кипения воды был разделен на 100 частей – градусов. При таком масштабе точка пересечения прямой с осью абсцисс на рис. 19 оказывается отстоящей примерно на 273 градуса от точки таяния льда. Эта точка, как известно, была названа "абсолютным нулем".

Соответственно была преобразована формула (5.1), которая приняла вид

$$pV = \frac{m}{M} RT, \tag{5.2}$$

где T – абсолютная температура, m – масса газа, M – молярная масса, R – так называемая универсальная газовая постоянная, числовое значение которой зависит от выбора единиц величин, входящих в формулу. В такой форме, наряду с законами Бойля – Мариотта и Гей-Люссака, уравнение (5.2) включает и закон Авогадро. Это уравнение, по существу, можно трактовать как определение температуры в качестве величины, пропорциональной произведению давления на объем одного моля газа.

Уравнение (5.2) позволяет производить измерение концентрации газа так называемым "приведенным давлением". Если это уравнение переписать в виде

$$\frac{m}{MV} = \frac{p}{RT}, \tag{5.3}$$

то стоящее в левой части выражение будет иметь смысл числа молей в единице объема, т.е. молярной концентрации. Очевидно, такая же концентрация будет и в том случае, если при температуре $T_0 = 273$ К давление газа будет равно

$$p_0 = \frac{p}{T}\ T_0. \tag{5.4}$$

Давление p_0 называется приведенным давлением, и оно однозначно определяет молярную концентрацию, а следовательно, и концентрацию молекул газа, находящегося при давлении p и температуре T. Соответствующая связь может быть легко найдена, если учесть, что один моль газа при нормальных условиях занимает объем $22{,}414 \cdot 10^{-3}$ м^3. Таким образом, при приведенном давлении $1{,}01325 \cdot 10^5$ Па молярная концентрация газа равна 44,615 моль/м^3.

Учитывая, что в одном моле содержится $6{,}0220 \cdot 10^{23}$ молекул, найдем, что при нормальных условиях концентрация составляет $2{,}6868 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Это число называется постоянной Лошмидта.

Значения молярной концентрации и концентрации молекул при приведенном давлении, выраженном в различных единицах, даны в приложении V.

Развитие кинетической теории идеальных газов позволило вывести уравнение (5.2) при ряде упрощающих допущений и в предположении пропорциональности температуры средней кинетической энергии поступательного движения молекул, что выражается формулой Больцмана

$$w = \frac{\overline{mv^2}}{2} = \mathscr{K}\, T, \tag{5.5}$$

где $\mathscr{K}$ – универсальная постоянная (не зависящая от газа). В общепринятой форме уравнение (5.5) записывается в виде

$$w = \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}\ k_{\text{Б}} T. \tag{5.6}$$

Постоянная $k_Б$ в этом уравнении носит название постоянной Больцмана.

Уравнение (5.5) позволяет придать температуре определенный физический смысл как величине, пропорциональной средней кинетической энергии поступательного

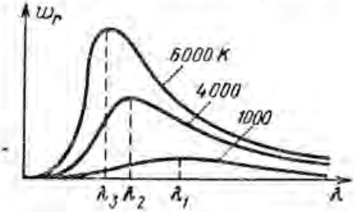


Рис. 20

движения молекул. Оказывается, однако, что таким определением не исчерпываются возможные связи температуры с другими физическими величинами. Рассмотрим некоторые из этих связей.

Представим себе замкнутую оболочку, изолированную от окружающего пространства и находящуюся при постоянной температуре, причем внутри оболочки – идеальный вакуум. Несмотря на это, она не будет совершенно "пустой". Ограниченная оболочкой полость будет заполнена электромагнитным излучением, объемная плотность энергии которого w_r, согласно закону Стефана – Больцмана, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры оболочки:

$$w_r = \sigma T^4, \tag{5.7}$$

где σ – постоянная, зависящая от выбора единиц. Излучение внутри полости имеет распределение по длинам волн, представленное на рис. 20 для трех разных температур. Как установил Вин, максимум энергии в этом распределении приходится на длину волны λ_{max}, обратно пропорциональную температуре:

$$\lambda_{max} = b/T, \qquad (5.8)$$

где b — постоянная, также зависящая от выбора единиц.

Обе формулы ((5.7) и (5.8)) могут быть использованы для измерения и определения температуры в такой же мере, как и (5.2) и (5.5). Такое опеределение температуры по формулам излучения является даже более общим, поскольку оно пригодно как для пространства, заполненного веществом, так и для вакуума. Поэтому распространенное определение температуры в качестве величины, пропорциональной средней кинетической энергии поступательного движения молекул, следует рассматривать как частное определение температуры, а именно температуры газа, приближающегося по своим свойствам к свойствам идеального газа. Уже для твердого тела это определение оказывается неудовлетворительным, поскольку движение молекул в нем имеет колебательный характер. Квантовая механика делает это определение совершенно непригодным при низких температурах. В то же время формула (5.7) оказывается справедливой при любых условиях.

Согласно второму началу термодинамики никакая, даже идеальная тепловая машина, работающая без трения и потерь теплоты наружу, не может иметь коэффициента полезного действия (КПД), равного единице, так как часть теплоты обязательно должна переходить от источника тепла (нагревателя) к холодильнику. Напомним, что коэффициент полезного действия η — отношение полезной работы ко всей энергии, полученной системой. Если машина получает от нагревателя количество теплоты Q_1 и отдает холодильнику количество теплоты Q_2, то полезная работа не может быть больше, чем разность $Q_1 - Q_2$. Следовательно, коэффициент полезного действия будет

$$\eta \leqslant (Q_1 - Q_2)/Q_1. \qquad (5.9)$$

В термодинамике доказывается, что если температура нагревателя равна T_1, а температура холодильника T_2, то максимальный КПД машины (практически, разумеется, недостижимый) равен

$$\eta_{max} = (T_1 - T_2)/T_1. \tag{5.10}$$

Таким коэффициентом полезного действия может обладать машина, которая не только не имеет потерь теплоты, но, кроме того, обладает свойством обратимости, т.е. может как превращать часть теплоты в работу, так и (за счет работы извне) передавать теплоту от холодильника нагревателю согласно уравнению

$$A = Q_1 - Q_2. \tag{5.11}$$

При этом в обоих направлениях при одинаковой работе A должны быть одинаковы количества теплоты Q_1 и Q_2.

Весьма важно то, что коэффициент полезного действия, определяемый формулой (5.10), не зависит от природы рабочего тела или устройства машины, а целиком определяется температурами T_1 и T_2.

Определяя абсолютный нуль как такую температуру, которой должен был бы обладать холодильник*), чтобы идеальный КПД равнялся единице, мы можем, правда теоретически, использовать формулу (5.9) для установления температурной шкалы.

В термодинамике доказывается, что приведенные выше формулы (5.2), (5.6), (5.7) и (5.8) определяют одну и ту же температуру, которая поэтому получила название *термодинамической температуры*. Любой из стоящих в этих формулах коэффициентов R, $k_Б$, σ и b можно было бы при желании сделать равным единице, что определило бы разные размерности температуры: L^2MT^{-2}, $L^{-1/2}M^{1/4}T^{-1/2}$, L^{-1}. Более того, можно было

---

*) Заметим, что абсолютный нуль принципиально недостижим, но к нему можно подойти весьма близко.

бы даже изменить само определение температуры, сделав ее пропорциональной не средней кинетической энергии поступательного движения молекул, а плотности энергии излучения в замкнутой оболочке. Соответственно изменились бы все формулы, в которые входит температура. При этом, например, произведение объема на давление газа и средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул были бы пропорциональны корню четвертой степени из определенной таким образом температуры. Разумеется, такой шаг создал бы весьма существенные неудобства. Неудобно также заменять температуру какой-либо пропорциональной ей величиной, например произведением pV одного моля идеального газа или кинетической энергией одной молекулы и т.д.

Исключительно важное место, которое занимает температура в современной физике и технике, определяя в макроскопической системе (т.е. системе, содержащей большое число молекул и других частиц) большинство ее свойств и протекающих в ней явлений (плотность, электропроводность, скорости химических реакций, фазовые превращения и т.д.), делает целесообразным выделение температуры в разряд величин с собственной размерностью единиц и соответственно включение единицы температуры в число основных. Обозначение размерности температуры: Θ.

Согласно Международной системе единиц абсолютная температура определяется как термодинамическая температура, причем градус этой температуры устанавливается таким образом, чтобы тройная точка воды имела температуру точно 273,16 К. Тройной точкой называется такая точка, при которой находятся в равновесии все три фазы воды: лед, вода (жидкая) и насыщенный пар. В то время как равновесие между двумя фазами (вода – пар, лед – вода, лед – пар) может быть при разных тем-

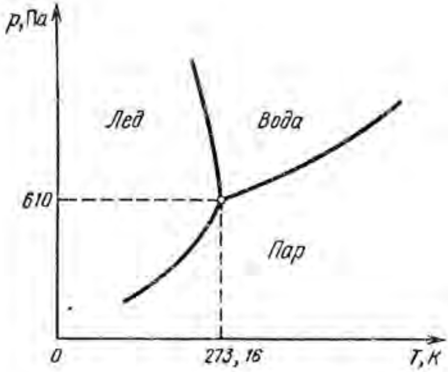


Рис. 21

пературах (рис. 21), равновесие всех трех фаз возможно лишь при вполне определенной температуре (и определенном давлении), которая и называется тройной точкой. По стоградусной шкале тройная точка воды довольно точно равна +0,01 °С, так что нулевая точка этой шкалы, соответствующая температуре таяния льда при давлении $1{,}01325 \cdot 10^5$ Па, равна 273,15 К.

§ 5.2. Температурные шкалы

Термодинамическая шкала температур применяется в научных исследованиях при установлении связи между температурой и другими физическими величинами. В обиходе, в технической и даже в лабораторной практике пользуются стоградусной шкалой, называемой шкалой Цельсия. Температура, измеренная по шкале Цельсия, обозначается t. Для температурных интервалов, измеренных в градусах Цельсия или кельвинах, в комбинированных наименованиях производных единиц применяются обозначения °С и К.

В некоторых странах сохранилась шкала Реомюра (°R), в которой интервал между точкой таяния льда и точкой кипения воды при давлении $1{,}01325 \cdot 10^5$ Па разделен на 80 частей. В шкале Фаренгейта (°F), применяемой в Великобритании и США, точке таяния льда присвоена температура 32 °F, а точке кипения воды 212 °F, так что этот температурный интервал делится на 180 частей*).

Мы можем теперь легко установить связь между различными температурными шкалами. Действительно, обозначив температурный интервал между точками таяния льда и кипения воды через θ, получим для одного градуса Цельсия (°C), Реомюра (°R) или Фаренгейта (°F) следующие значения:

$$1\ ^\circ\mathrm{C} = \frac{\theta}{100}, \quad 1\ ^\circ\mathrm{R} = \frac{\theta}{80}, \quad 1\ ^\circ\mathrm{F} = \frac{\theta}{180},$$

а, следовательно, любой другой интервал Δt будет выражаться числами (размеры градуса Цельсия и кельвина одинаковы):

$$\Delta T\ \mathrm{K} = \Delta t\ ^\circ\mathrm{C} = \frac{\Delta t}{\theta} 100, \tag{5.12}$$

$$\Delta t\ ^\circ\mathrm{R} = \frac{\Delta t}{\theta} 80, \quad \Delta t\ ^\circ\mathrm{F} = \frac{\Delta t}{\theta} 180,$$

откуда

$$\frac{\Delta T\ \mathrm{K}}{100} = \frac{\Delta t\ ^\circ\mathrm{C}}{100} = \frac{\Delta t\ ^\circ\mathrm{R}}{80} = \frac{\Delta t\ ^\circ\mathrm{F}}{180}, \tag{5.13}$$

---

*) Шкала, в которой размер градуса равен градусу Фаренгейта, но отсчет ведется от абсолютного нуля, называется шкалой Ренкина. По этой шкале нуль Фаренгейта соответствует температуре 459,67°, точка замерзания воды 491,67° и точка кипения воды 671,67°.

или же, после сокращения,

$$\frac{\Delta T\,\mathrm{K}}{5} = \frac{\Delta t\,{}^\circ\mathrm{C}}{5} = \frac{\Delta t\,{}^\circ\mathrm{R}}{4} = \frac{\Delta t\,{}^\circ\mathrm{F}}{9}.$$

Подчеркиваем, что символы ΔT K, Δt °C, Δt °R и Δt °F представляют собой числа, выражающие один и тот же температурный интервал в различных температурных единицах. Эти числа можно представить как разность между температурами границ выбранного интервала, измеренную по соответствующей шкале, иначе говоря,

$$\Delta T\,\mathrm{K} = T\,\mathrm{K} - T_0\,\mathrm{K},$$

$$\Delta t\,{}^\circ\mathrm{C} = t\,{}^\circ\mathrm{C} - t_0\,{}^\circ\mathrm{C},$$

$$\Delta t\,{}^\circ\mathrm{R} = t\,{}^\circ\mathrm{R} - t_0\,{}^\circ\mathrm{R},$$

$$\Delta t\,{}^\circ\mathrm{F} = t\,{}^\circ\mathrm{F} - t_0\,{}^\circ\mathrm{F}.$$

Приняв t_0 °C = 0 °C, а следовательно, T_0 K = 273 K*), t_0 °R = 0° R, t_0 °F = 32° F, получим

$$\frac{(T-273)\,\mathrm{K}}{5} = \frac{t\,{}^\circ\mathrm{C}}{5} = \frac{t\,{}^\circ\mathrm{R}}{4} = \frac{(t-32)\,{}^\circ\mathrm{F}}{9}. \quad (5.14)$$

Последнее выражение позволяет весьма просто переводить температуру из одной шкалы в другую.

§ 5.3. Опорные температурные точки

Термодинамическая шкала температур определяет температуру как измеряемую физическую величину и устанавливает ее единицу, которая на XIII Генеральной конференции по мерам и весам (1967 г.) была принята в качестве основной единицы (см. § 1.6).

---

*) Здесь 0 °C приближенно приравнивается 273 K.

На практике непосредственные измерения в термодинамической шкале оказываются слишком сложными, вследствие чего желательно иметь возможность сравнивать различные приборы, служащие для измерения температур в относительно узких температурных интервалах, сохраняя при этом достаточно высокую точность. Для этой цели можно было бы применить газовый термометр, предпочтительно водородный или гелиевый, поскольку эти газы по сравнению с другими в наибольшей степени подчиняются законам идеальных газов.

Однако пользование газовым термометром представляет большие практически неудобства, поэтому было выбрано несколько постоянных опорных точек, воспроизведение которых в лабораторных условиях не составляет большого труда. Одна из этих точек задается самим определением термодинамической шкалы – это тройная точка воды, которой приписана неизменная температура 273,16 К. Остальные точки установлены на основании как можно более тщательных измерений. Все эти точки представляют собой температуры фазовых переходов различных веществ. На основе измерения температур этих точек в 1968 г. установлена Международная практическая температурная шкала*). Поскольку измерения по этой шкале не могут гарантировать абсолютно точного совпадения с термодинамической шкалой, температурам по шкалам Кельвина и Цельсия присвоены символы T_{68} и t_{68}. В числе опорных точек имеются тройные точки водорода (T_{68} = 13,81 К) и воды (T_{68} = 273,16 К) и ряд точек равновесия двух фаз различных веществ. Значения опорных постоянных точек Международной практической температурной шкалы приведены в приложении XII.

---

*) Международной практической температурной шкале присвоен символ МПТШ – 1968.

§ 5.4. Прочие тепловые единицы *)

Количество теплоты. Согласно первому началу термодинамики теплота, подводимая к системе, может идти на увеличение внутренней энергии системы и на совершение работы A по преодолению внешних сил ("внешняя работа"):

$$Q = \Delta U + A. \tag{5.15}$$

Величина Q измеряет количество теплоты, подведенной к системе. ΔU может включать в себя изменение различных видов энергии: и увеличение кинетической энергии разного характера движения молекул (поступательного, вращательного, колебательного), и увеличение энергии связи между молекулами. Сюда же могут входить и энергия диссоциации, и энергия изменения квантового состояния системы.

В зависимости от характера процесса соотношение между ΔU и A может быть различным. Так, при изотермическом (т.е. при постоянной температуре) расширении идеального газа все подводимое количество теплоты расходуется на совершение работы, а при изохорическом (при постоянном объеме) его нагревании, наоборот, работа равна нулю и подведенная теплота идет только на увеличение внутренней энергии. При фазовых превращениях, происходящих при постоянной температуре, значительная часть количества теплоты идет также на увеличение внутренней энергии, а работа при этом в отдельных случаях может даже иметь отрицательный знак (плавление льда).

Разделяя физические величины на функции состояния и так называемые "переходные", т.е. характеризующие процесс перехода из одного состояния в другое, мы

---

*) Все величины, относящиеся к единице массы, называются удельными, а к одному молю молярными (см. приложение II).

должны количество теплоты, как и работу, отнести к последним. При этом в зависимости от направления процесса количество теплоты Q может быть как положительным, так и отрицательным.

Уравнение (5.15) показывает, что количество теплоты может измеряться в тех же единицах, в которых измеряется любая энергия и любой вид работы, в частности механической. Поэтому размерность количества теплоты

$$[Q] = L^2MT^{-2} \tag{5.15 a}$$

та же, что и размерность работы, и такими же, как и для измерения работы, должны быть и единицы количества теплоты. Соответственно в СИ количество теплоты измеряется единицей работы и энергии – джоулем. Джоуль равен количеству теплоты, эквивалентному работе один джоуль.

Сохраняющееся до настоящего времени применение калории (в качестве единицы количества теплоты) и связанных с ней величин следует рассматривать как временное, которое должно уступить применению общих единиц работы. Поскольку, однако, эти единицы еще не полностью вышли из употребления и встречаются в литературе, в частности в таблицах различных тепловых свойств вещества, они также приводятся в приложении V.

В заключение укажем, что в холодильной технике раньше пользовались понятием "количество холода", которое представляет собой, по существу, количество теплоты, могущее быть отнятым холодильной установкой от окружающей среды. Единица "количества холода" – фригория, численно равна одной килокалории, но по смыслу имеет обратный знак. Можно говорить, что одна фригория равна минус одной килокалории.

Температурный градиент. Аналогично введенным ранее градиенту давления и градиенту скорости, можно ввести температурный градиент:

$$\operatorname{grad} T = dT/dl, \tag{5.16}$$

который в случае равномерного распределения температуры может быть представлен в виде

$$\operatorname{grad} T = (T_2 - T_1)/(l_2 - l_1).$$

Размерность градиента температуры

$$[\operatorname{grad} T] = \mathrm{L}^{-1}\Theta, \tag{5.16a}$$

а его единицы — кельвин на метр (К/м), кельвин на сантиметр (К/см), градус Цельсия на метр и градус Цельсия на сантиметр (°С/м, °С/см). Разумеется, 1 К/м = = 1 °С/м и 1 К/см = 1 °С/см.

Тепловой поток. Количество теплоты, проходящее в единицу времени в направлении падения температуры, называется тепловым потоком:

$$\Phi = dQ/dt. \tag{5.17}$$

Размерность теплового потока

$$[\Phi] = [dQ/dt] = \mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-3} \tag{5.17a}$$

совпадает с размерностью мощности. Тепловой поток измеряется в ваттах, киловаттах и т.п.; ранее он измерялся в калориях и килокалориях в секунду, минуту или час. Соотношение между этими единицами приведено в приложении V.

Поверхностная плотность теплового потока. Отношение теплового потока к площади поперечного сечения потока, т.е. поток, приходящийся на единицу площади сечения, перпендикулярного к направлению потока, называется поверхностной плотностью теплового потока:

$$q = d\Phi/dS. \tag{5.18}$$

Его размерность

$$[q] = \mathrm{M}\mathrm{T}^{-3}. \tag{5.18a}$$

Соответственно единицы поверхностной плотности теплового потока равны единицам потока, отнесенным к квадратному метру (Вт/м^2) – СИ или квадратному сантиметру (Вт/см^2) – СГС.

Энтропия. В термодинамике процессы разделяют на обратимые и необратимые. К числу обратимых относятся изотермические и адиабатические изменения состояния идеального газа. Однако идеально обратимые процессы на практике неосуществимы. Все процессы, сопровождающиеся трением, теплообменом, диффузией и т.п. не могут быть полностью проведены в обратном направлении. Статистическая физика связывает эту необратимость с переходом системы от менее вероятного к более вероятному распределению элементов, образующих систему. В качестве примера можно рассмотреть процесс смешения двух газов, разделенных вначале в некотором сосуде перегородкой, после того как перегородка будет удалена. Другим примером может служить выравнивание температур нескольких соприкасающихся тел, имевших вначале различные температуры.

Установлена количественная мера, позволяющая судить о степени необратимости того или иного процесса. Эта величина носит название энтропии и обозначается S. Если система переходит из состояния, которое мы отметим индексом "1", в состояние, отмеченное индексом "2", то, согласно определению энтропии, ее изменение при этом процессе равно

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} . \quad (5.19)$$

В термодинамике доказывается, что величина

$$dS = dQ/T \quad (5.20)$$

представляет собой полный дифференциал, так что интеграл от dS по замкнутому контуру равен нулю. Это значит, что энтропия является функцией состояния. Для частной неизолированной системы изменение энтропии может иметь любое как положительное, так и отрицательное значение и, в частности, равняться нулю. Однако, как следует из второго начала термодинамики, в замкнутой системе

$$\Delta S \geqslant 0. \tag{5.21}$$

Величина ΔS характеризует при этом степень необратимости протекающих в этой системе процессов.

Согласно теореме Больцмана энтропия связывается с так называемой вероятностью микросостояния. Под последней понимается число способов, которым может осуществиться данное состояние системы. Если это число равно w, то энтропия системы

$$S = k_{\text{Б}} \ln w, \tag{5.22}$$

где $k_{\text{Б}}$ – постоянная Больцмана. Формула (5.22) показывает, в частности, что при абсолютном нуле (одна возможность осуществления состояния: $w = 1$) энтропия равна нулю.

Уравнение (5.19) определяет размерность энтропии

$$[S] = \mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}\,\Theta^{-1}, \tag{5.19a}$$

и ее единицы в СИ и СГС – джоуль на кельвин (Дж/К), эрг на кельвин (эрг/К) *).

Энтальпия. В теплотехнике важное место занимает специальная термодинамическая величина – энтальпия, задаваемая уравнением

$$H = U + pV, \tag{5.23}$$

где U – внутренняя энергия системы, p и V – давление и объем. Изменение энтальпии определяется характером процесса изменения состояния системы. При постоянном давлении приращение энтальпии

$$\Delta H = \Delta U + p(V_2 - V_1) \tag{5.24}$$

---

*) Разумеется, в знаменателе обозначений этих и других единиц вместо "К" может быть "°С".

и, следовательно, равно количеству теплоты, переданному системе. В связи с этим энтальпию иногда называли теплосодержанием. Как из формулы (5.23), так и из формулы (5.24) вытекает, что размерность и единицы энтальпии совпадают с размерностью и единицами количества теплоты и работы:

$$[H] = \mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}. \tag{5.23а}$$

Единицы энтальпии в СИ и СГС – джоуль (Дж) и эрг (эрг).

§ 5.5. Единицы величин, характеризующих тепловые свойства вещества

Теплоемкость. Теплоемкость измеряется количеством теплоты, которое надо сообщить телу для того, чтобы нагреть его на один градус – это теплоемкость системы. Кроме нее различают удельную теплоемкость, измеряемую количеством теплоты, необходимым для нагревания одного килограмма (или грамма), и молярную теплоемкость, измеряемую количеством теплоты, необходимым для нагревания одного моля. Удельная теплоемкость определяется формулой

$$c_{\text{уд}} = \frac{1}{m}\ \frac{dQ}{dT}, \tag{5.25}$$

где m – масса тела, Q – количество теплоты, T - температура.

Размерность удельной теплоемкости

$$[c_{\text{уд}}] = \frac{[Q]}{[m]\,[T]} = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\Theta^{-1}. \tag{5.25а}$$

Единицы удельной теплоемкости в СИ – джоуль на килограмм-кельвин (Дж/(кг · К)), в СГС – эрг на грамм-кельвин (эрг/(г · К)). Соотношение между ними:

1 Дж/(кг · К) = 10^4 эрг/(г · К).

Связь между удельной и молярной теплоемкостями определяется простым соотношением

$$c_{\text{мол}} = c_{\text{уд}} M, \qquad (5.26)$$

где M – молярная масса вещества.

Размерность молярной теплоемкости

$$[c_{\text{мол}}] = \mathrm{L}^2 \mathrm{M} \mathrm{T}^{-2} \Theta^{-1} \mathrm{N}^{-1}. \qquad (5.26\,\text{а})$$

Единицы молярной теплоемкости в СИ – джоуль на моль-кельвин (Дж/(моль · К)), в СГС – эрг на моль-кельвин (эрг/(моль · К)). Соотношение между этими единицами то же, что и между соответствующими единицами удельной теплоемкости.

Часто применяется понятие объемной теплоемкости, определяемой количеством теплоты, необходимым для нагревания единицы объема данного вещества на один градус. Объемная и удельная теплоемкости связаны формулой

$$c_{\text{об}} = c_{\text{уд}} \rho, \qquad (5.27)$$

где ρ – плотность вещества.

Размерность объемной теплоемкости

$$[c_{\text{об}}] = \mathrm{L}^{-1} \mathrm{M} \mathrm{T}^{-2} \Theta^{-1}. \qquad (5.27\,\text{а})$$

Единицы объемной теплоемкости в СИ – джоуль на кубический метр-кельвин (Дж/(м^3 · К)) и в СГС – эрг на кубический сантиметр-кельвин (эрг/(см^3 · К)). Соотношение между ними:

$$1\ \text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}) = 10\ \text{эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{К}).$$

Теплота фазового превращения. При переходе вещества из одного агрегатного состояния в другое требуется при неизменной температуре затратить некоторое количество теплоты, называемое теплотой фазового превращения. Теплоту фазового превращения, как и теплоемкость, можно относить либо к единице массы, либо к молю, либо к единице объема. Соответствующие размерности отличаются от размерностей теплоемкости отсутствием символа размерности температуры. Точно так же единицы теплоты фазового превращения отличаются от единиц теплоемкости отсутствием в знаменателе символа единицы температурного интервала – К (или °С).

Теплота сгорания топлива. Всякое топливо характеризуется теплотой сгорания, измеряемой тем количеством теплоты, которое при сгорании может дать определенное количество данного вещества. Теплоту сгорания топлива можно относить, как теплоемкость и теплоту фазового превращения, к единице массы, к молю или же к единице объема. Объемная теплота сгорания применяется исключительно для горючих газов, причем ее при этом обычно относят к объему газов, взятому при нормальных условиях ($t = 0\ °C$ и $p = 1{,}01325 \cdot 10^6$ Па). Единицы теплоты сгорания топлива те же, что и теплоты фазового превращения.

Теплопроводность (коэффициент теплопроводности). При наличии разности температур в некоторой среде от слоя с более высокой температурой к слою с более низкой температурой устанавливается тепловой поток, который можно для стационарного одномерного случая выразить формулой

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \frac{dT}{dl} S, \tag{5.28}$$

где dT/dl – температурный градиент, S – площадь поперечного сечения потока, λ – теплопроводность среды.

За единицу теплопроводности следует принять теплопроводность такой среды, в которой сквозь единицу поверхности, перпендикулярной направлению потока, при температурном градиенте, равном единице температуры на единицу длины, устанавливается тепловой поток, равный единице количества теплоты в единицу времени.

Это определение и формула (5.28) дают размерность теплопроводности

$$[\lambda] = \mathrm{LMT}^{-3}\,\Theta^{-1}. \tag{5.28 a}$$

Единицы теплопроводности в СИ и СГС ватт на метр-кельвин (Вт/(м · К)), эрг в секунду на сантиметр-кельвин (эрг/(с · см · К)). Соотношение между ними:

$$1\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)} = 10^5\ \text{эрг/(с}\cdot\text{см}\cdot\text{К)}.$$

Коэффициент теплопередачи. При наличии температурного скачка ΔT на границе раздела двух тел сквозь эту границу установится тепловой поток, определяемый формулой

$$dQ/dt = \alpha \Delta T S. \tag{5.29}$$

Коэффициент α называется коэффициентом теплопередачи. Он зависит от условий на границе раздела, в частности на границе соприкосновения твердого тела с жидкостью (или газом), от скорости потока жидкости. Коэффициент теплопередачи можно численно определить как тепловой поток через единицу площади границы при температурном скачке, равном единице температуры.

Размерность

$$[\alpha] = \mathrm{MT}^{-3}\Theta^{-1}. \tag{5.29 a}$$

Единицы коэффициента теплопередачи в СИ и СГС – ватт на квадратный метр-кельвин (Вт/(м^2 · К)), эрг в секунду на квадратный сантиметр-кельвин (эрг/(с · см^2 · К)). Соотношение между ними:

$$1\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К)} = 10^3\ \text{эрг/(с}\cdot\text{см}^2\cdot\text{К)}.$$

Температуропроводность (коэффициент температуропроводности). Представим себе однородный стержень, боковые стенки которого идеально теплоизолированы, т.е. не обмениваются теплом с окружающей средой. Пусть вначале все точки стержня обладают одинаковой температурой T_0. Если теперь один из концов стержня привести в соприкосновение со средой, имеющей температуру T_1 (пусть для определенности $T_1 > T_0$), то вдоль стержня установится тепловой поток, причем температура всех точек стержня начнет повышаться так, что распределение в разные моменты времени $(t_0, t_1, \ldots, t_\infty)$ будет изображаться кривыми, представленными на рис. 22. Часть теплового потока, проходящего сквозь стержень, будет расходоваться на повышение температуры

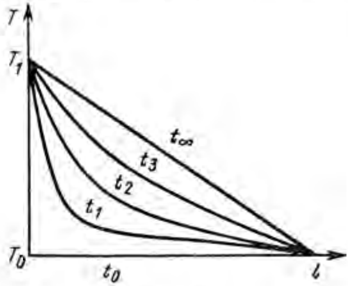


Рис. 22

различных точек стержня, и вдоль последнего начнет устанавливаться температурный градиент. Этот процесс установления температурного градиента и носит название температуропроводности. Очевидно, процесс температуропроводности является нестационарным, ибо при стационарном тепловом потоке сквозь стержень температурный градиент во всех точках стержня должен быть постоянным, не меняющимся во времени.

Быстрота изменения температуры в каждой точке стержня в описанном случае (который носит название линейного или одномерного случая) определяется уравнением

$$\partial T/\partial t = a \ \partial^2 T/\partial l^2, \tag{5.30}$$

или, что то же самое,

$$\partial T/\partial t = a\ \partial\,\mathrm{grad}\ T/\partial l, \tag{5.31}$$

так как

$$\partial^2 T/\partial l^2 = \partial\,\mathrm{grad}\ T/\partial l,$$

т.е. производная градиента по оси представляет собой изменение градиента на единицу длины стержня. Коэффициент a носит название температуропроводности и, как показывает теория, связан с теплоемкостями $c_{уд}$ и $c_{об}$, теплопроводностью λ и плотностью ρ соотношением

$$a = \frac{\lambda}{c_{уд}\,\rho} = \frac{\lambda}{c_{об}} \tag{5.32}$$

Согласно формуле (5.31) температуропроводность равна повышению температуры в единицу времени в случае, если изменение температурного градиента на единицу длины равно единице температуры. Более простое определение дает формула (5.32), согласно которой температуропроводность равна тому повышению температуры, которое произойдет в единице объема данного вещества, если ему сообщить количество теплоты, численно равное его теплопроводности.

Размерность температуропроводности

$$[a] = \frac{[\lambda]}{[c_{уд}]\,[\rho]} = \frac{\mathrm{LMT^{-3}\Theta^{-1}}}{\mathrm{L^2T^{-2}\Theta^{-1}\cdot L^{-3}M}} = \mathrm{L^2T^{-1}} \tag{5.32 а}$$

совпадает с размерностью коэффициента диффузии (см. (4.70 а)). То же можно сказать и о единицах температуропроводности – м^2/с и см^2/с. Это совпадение не случайно. Для газа даже числовые значения обоих коэффициентов довольно близки. Это можно понять, если учесть, что кинетическая теория газов дает следующую приближенную связь между теплопроводностью и коэффициентом диффузии:

$$\lambda = Dc_V\,\rho, \tag{5.33}$$

где c_V – теплоемкость при постоянном объеме и

$$D = \lambda / c_V \rho,$$

т.е., по существу, формулу (5.32). Более строгая теория дает в формуле (5.33) коэффициент, несколько отличный от единицы.

Температурные коэффициенты. Большинство физических свойств вещества зависит от температуры. Здесь можно назвать: плотность, коэффициенты явлений переноса (диффузии, вязкости, теплопроводности), удельное электрическое сопротивление и др. Если при некоторой температуре T_0 величина, характеризующая данное свойство, имеет значение A_0, то при некоторой температуре T эта величина будет иметь значение $A = f(T)$, что можно представить в виде ряда

$$A = A_0(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \ldots), \tag{5.34}$$

где t – разность температур: $t = T - T_0$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ зависят от начальной температуры T_0. Они могут быть как положительными, так и отрицательными. Их абсолютные значения часто удовлетворяют условию

$$\alpha_1 t > \alpha_2 t^2 > \alpha_3 t^3 \ldots$$

В ряде случаев произведение $\alpha_1 t, \alpha_2 t^2 \ldots$ в интересующем нас интервале температур таковы, что

$$\alpha_1 t \geqslant \alpha_2 t^2 \gg \alpha_3 t^3 \ldots$$

Тогда вместо (5.34) можно написать

$$A = A_0(1 + \alpha t). \tag{5.35}$$

В частности, для объема идеального газа это дает уравнение Гей-Люссака, причем если $T_0 = 273$ К, то, как известно, $\alpha = 1/273$.

Так как произведения, стоящие в скобках уравнения (5.34), должны быть безразмерными, то коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ обладают размерностями $\Theta^{-1}, \Theta^{-2}, \Theta^{-3}$

и т.д., а их единицы равны соответственно $K^{-1}, K^{-2}, K^{-3} \ldots$

Коэффициенты уравнения Ван-дер-Ваальса. Уравнение состояния реального газа по Ван-дер-Ваальсу имеет вид

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \frac{m}{M} RT. \tag{5.36}$$

Здесь p – давление газа, V – занимаемый им объем (вместимость сосуда), m – масса, T – термодинамическая температура, M – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная (§ 5.1). Величины a и b, постоянные для данной массы данного газа, введены для учета сил сцепления между молекулами и объема самих молекул. Величина

$$a/V^2 = p_i, \tag{5.37}$$

обусловленная силами молекулярного сцепления, имеет размерность давления, поэтому ее часто (хотя и неудачно) называют внутренним давлением.

Единицами давления и объема определяются единицы a. Так как $V = m/\rho$, а при $\rho = \text{const}$ $p_i = \text{const}$, то

$$a = V^2 p_i = \frac{p_i}{\rho^2} m^2, \tag{5.38}$$

т.е. a пропорциональна квадрату массы. Если постоянную для моля (или киломоля) обозначить через a_0, то можно написать

$$a = a_0 (m/M)^2. \tag{5.39}$$

Постоянная b, пропорциональная полному объему всех молекул, должна быть пропорциональна массе газа, т.е.

$$b = b_0 (m/M), \tag{5.40}$$

где b_0 – значение постоянной для одного моля (или киломоля).

Размерность a из формулы (5.38)

$$[a] = \mathrm{L}^5 \mathrm{M} \mathrm{T}^{-2}. \tag{5.41}$$

Размерность b равна, разумеется, размерности объема:

$$[b] = \mathrm{L}^{-3}. \tag{5.42}$$

Размерности a,, a_0, b и b_0 определяют их единицы. В СИ постоянную a измеряют в мПа · м^6/моль^2, постоянную b – в л/моль, иногда a измеряют в атмосферах на литр в квадрате (атм/л^2), а b – в литрах (л).

Глава 6

ЕДИНИЦЫ АКУСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН*)

§ 6.1. Объективные характеристики механических волновых процессов

Механические деформации в средах, обладающих упругостью, распространяются со скоростью, зависящей от упругих свойств и плотности среды. Если деформация является периодической, то в среде распространяются волны, длина которых связана с частотой колебаний ν и скоростью распространения c соотношением

$$\lambda = c/\nu = cT. \qquad (6.1)$$

Согласно сказанному в § 4.3, частота колебаний измеряется в герцах (Гц), а длина волны – в метрах, сантиметрах и т.п.

Колебания, частоты которых лежат в пределах от 16 Гц до 15 – 20 кГц, воспринимаются слуховым аппаратом человека и называются звуковыми или акустическими колебаниями. Колебания меньших частот называются инфразвуковыми или инфраакустическими, а больших частот – ультразвуковыми или ультраакустическими.

Характеристики колебания, связанные с особенностью их психофизиологического восприятия, описаны в § 6.2;

*) В связи с тем что в области акустических измерений в настоящее время применяется только СИ, все единицы даны в этой системе.

здесь же рассмотрим те величины, которые имеют объективный характер и определяются уже известными нам соответствующими общемеханическими величинами.

Звуковая энергия. Любой объем среды, в которой распространяются волны, обладает энергией, складывающейся из кинетической энергии колеблющихся частиц и потенциальной энергии упругой деформации. Звуковая энергия, как и любая другая энергия, имеет размерность, выражаемую формулой (4.33а) и измеряется в джоулях (Дж).

Плотность звуковой энергии. Звуковая энергия, отнесенная к единице объема среды, называется плотностью звуковой энергии, имеет размерность, выражаемую формулой (4.34а), и измеряется в джоулях на кубический метр (Дж/м^3).

Поток звуковой энергии (звуковая мощность). Волны, распространяющиеся в среде, переносят с собой энергию. Энергия, переносимая в единицу времени через данную площадку, перпендикулярную направлению распространения, определяет величину, называемую потоком звуковой энергии (или звуковой мощностью). Очевидно, размерность и единицы потока звуковой энергии совпадают с размерностью и единицами мощности (см. (4.35а)).

Звуковое давление. Возникновение звуковых колебаний в газе или жидкости сопровождается колебаниями давления среды. Таким образом, давление в данной точке в каждый данный момент можно представить как сумму давления в невозмущенной среде, т.е. в отсутствие колебаний, и переменного дополнительного давления, которое носит название звукового или акустического давления. Звуковое давление в течение периода колебаний изменяет свою величину и знак между положительными и отрицательными амплитудными значениями. Звуковое давление, как и всякое другое, имеет размерность, выражаемую формулой (4.29а), и измеряется в паскалях (Па).

Объемная скорость. В звуковой волне частицы среды совершают колебания со скоростью, зависящей от амплитуды колебаний, частоты и фазы. Представим себе распространяющуюся вдоль оси x плоскую продольную волну (именно продольными и являются звуковые волны) (рис. 23). Пусть в некоторой плоскости M частицы

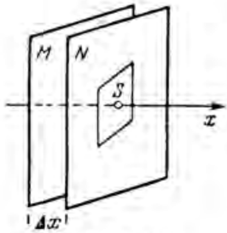


Рис. 23

среды в данный момент имеют скорость v. Проведем на малом расстоянии Δx от M плоскость N. За время $\Delta t = \Delta x/v$ все частицы, заключенные между M и N, пройдут сквозь N. Если на плоскости N выбрать площадку размером S, то сквозь нее за время Δt пройдут все частицы, заключенные в объеме $\Delta x S = v \Delta t S$, а за единицу времени – все частицы, заключенные в объеме vS. Эта величина и носит название объемной скорости. Легко видеть, что ее размерность и единицы те же, что и для объемного расхода, т.е. кубический метр в секунду и кубический сантиметр в секунду ($м^3/с$, $см^3/с$).

Интенсивность звука (сила звука). Средняя по времени энергия, переносимая за единицу времени звуковой волной через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, называется интенсивностью (силой) звука:

$$\mathcal{I} = W/tS. \qquad (6.2)$$

Размерность интенсивности звука

$$[\mathcal{I}] = \frac{[W]}{[T]\,[S]} = \frac{L^2MT^{-2}}{L^2T} = MT^{-3}. \qquad (6.2a)$$

Соответствующая единица СИ – ватт на квадратный метр (Вт/м^2).

Акустическое сопротивление. Амплитуда колебаний, а соответствено и скорость колеблющихся точек, зависит от механического напряжения, возникающего в среде, а в случае волн в газе или жидкости – от акустического давления. Мгновенное значение скорости определяется соотношением

$$v = \frac{p_а}{\rho c}, \qquad (6.3)$$

где $p_а$ – акустическое давление, ρ – плотность среды. Если левую и правую части уравнения (6.3) помножить на площадь потока (например, на сечение трубы), то можно написать

$$vS = \frac{p_а}{\rho c/S} = \frac{p_а}{R_а}. \qquad (6.4)$$

Стоящая слева величина представляет собой объемную скорость колебаний. Величина, стоящая справа в знаменателе, называется акустическим сопротивлением, поскольку (6.4) внешне напоминает закон Ома, если звуковое давление уподобить разности потенциалов, а объемную скорость – силе тока.

В общем случае переменное звуковое давление и переменная объемная скорость могут по фазе не совпадать, поэтому по аналогии с полным сопротивлением переменному току (импедансом) вводят понятие комплексного акустического сопротивления, или акустического импеданса.

Согласно определению акустического сопротивления его размерность

$$[R_а] = \frac{[\rho c]}{[S]} = L^{-4}MT^{-1}. \qquad (6.4\,а)$$

Единица акустического сопротивления – паскаль-секунда на кубический метр (Па · с/м^3).

Акустическое сопротивление единицы поверхности называется *удельным акустическим сопротивлением* и является характеристикой данной среды. Из формулы (6.4) вытекает, что удельное акустическое сопротивление равно произведению плотности среды на скорость распространения колебаний:

$$\eta = \rho c. \qquad (6.5)$$

Размерность удельного акустического сопротивления

$$[\eta] = L^{-2}MT^{-1}. \qquad (6.5\,а)$$

Единица удельного акустического сопротивления – паскаль-секунда на метр (Па · с/м).

Удельные акустические сопротивления некоторых сред приведены в приложении XII.

Механическое сопротивление. Кроме акустического сопротивления, в акустике приходится иметь дело с так называемыми механическим сопротивлением, которое определяется как отношение периодической силы к скорости колебаний.

Согласно определению

$$R_М = p_а S/v, \qquad (6.6)$$

размерность

$$[R_М] = \frac{[F] \cdot [S]}{[S] \cdot [v]} = \frac{FT}{L} = MT^{-1}. \qquad (6.6\,а)$$

Единица механического сопротивления – ньютон-секунда на метр (Н · с/м).

Уровни интенсивности звука и звукового давления. Для характеристики величин, определяющих восприятие звука, существенными являются не столько абсолютные значения интенсивности звука и звукового давления, сколько их отношения к некоторым пороговым значениям. Поэтому введены понятия относительных уровней интенсивности и звукового давления. Если интенсивности двух звуковых волн равны $\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_1$, то разностью уровней этих интенсивностей называется логарифм отношения $\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1$:

$$L_{\mathcal{J}} = \lg(\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1). \tag{6.7}$$

За единицу разности уровней принимается бел (Б), определяемый как разность уровней двух интенсивностей, отношение которых равно десяти, и соответственно десятичный логарифм отношения равен единице. Десятая часть бела, соответствующая логарифму отношения, равному 0,1, называется децибел (дБ). При разности уровней 1 дБ отношение

$$\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1 = 10^{0,1} = 1,259. \tag{6.8}$$

Измеренная в децибелах разность уровней интенсивности определяется формулой

$$L_{\mathcal{J}} = 10\lg(\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1). \tag{6.9}$$

Так же как и разность уровней интенсивностей, может измеряться и разность уровней потока звуковой энергии (звуковой мощности).

Между интенсивностью звука и звуковым давлением существует соотношение

$$\mathcal{J} = \frac{p_{\text{а}}^2}{\rho c} = \frac{p_{\text{а}}^2}{\eta}. \tag{6.10}$$

Поэтому

$$\lg(\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1) = 2\lg(p_{\text{а}2}/p_{\text{а}1}).$$

Способ измерения разности уровней звуковых давлений устанавливается таким образом, чтобы эта разность совпадала с разностью уровней интенсивностей тех же колебаний. Соответственно измеренную в децибелах разность уровней звуковых давлений можно определить по формуле

$$L_p = 20 \lg(p_{a2}/p_{a1}). \tag{6.11}$$

Наряду с измерением разности уровней в белах и децибелах применяется измерение разности уровней интенсивности или звуковой мощности в неперах (Нп). Разность уровней интенсивности в один непер соответствует отношению интенсивностей, равному основанию натуральных логарифмов. Из этого определения вытекает, что

$$1 \text{ Б} = 2{,}303 \text{ Нп}. \tag{6.12}$$

Иногда в неперах измеряют не разность уровней интенсивности, а разность уровней давления. В этом случае в соответствии с формулой (6.11)

$$1 \text{ дБ} = \frac{0{,}2303}{2} \text{ Нп} = 0{,}1151 \text{ Нп}.$$

Часто уровень интенсивности звука и звукового давления относят к условному порогу, соответствующему звуковому давлению $2 \cdot 10^{-5}$ Па*).

§ 6.2. Субъективные характеристики звука

Субъективное восприятие звука характеризуется рядом величин, которые могут быть в той или иной степени сопоставлены с некоторыми из объективных величин, рассмотренных выше.

---

*) Подробнее о логарифмических единицах см. гл. 10.

Высота звука. Основная качественная характеристика звука определяется его частотой ν. Разные звуки воспринимаются нами как равноотстоящие по высоте, если равны отношения их частот. Таким образом, мы вводим понятие интервала высоты, определяемого отношением крайних частот соответствующих звуков. Так, например, интервал, ограниченный частотами 200 и 500 Гц, равен интервалу с граничными частотами 100 и 250 Гц.

Для измерения интервала высоты применяется ряд единиц, построенных по логарифмическому принципу. В музыке основным является интервал, ограниченный частотами, отношение которых равно двум, – октава (окт). Октаву делят на 1000 миллиоктав: 1 окт = 10^3мокт.

Кроме миллиоктав, ранее применялась единица савар, определяемая как интервал, для которого десятичный логарифм отношения крайних частот равен 0,001. Интервал, измеренный в саварах, выражается формулой

$$\Delta = 1000 \lg (\nu_2/\nu_1). \tag{6.13}$$

Соотношения между интервалами высоты и соответствующие этим интервалам отношения крайних частот приведены в приложении VI.

Последовательность тонов, из которых первый и последний образуют интервал в одну октаву, называется гаммой. Для получения гармонических музыкальных созвучий требуется, чтобы отдельные промежуточные ступени гаммы (тоны) обладали частотами, относящимися друг к другу, как последовательные небольшие целые числа. Гамма, тоны которой удовлетворяют этому условию, называется *чистой* или *натуральной гаммой.*

Однако для перехода из одной тональности в другую необходимо, чтобы, начиная с любого тона, можно было образовать новую гамму с такими же отношениями частот последовательных ступеней, как и в основной гамме. Согласовать оба требования в рамках обычных музыкальных инструментов и обычной нотной записи представляется совершенно невозможным. Поэтому была установлена *темперированная гамма*, в которой интервал в одну октаву разделен на 12 полутонов с равными интервалами между ними.

На с. 292 приведены музыкальные интервалы, образующие чистую и темперированную гаммы. На рис. 24

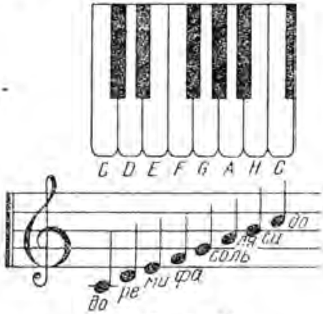


Рис. 24

представлена часть клавиатуры рояля, охватывающая одну октаву, с обозначениями промежуточных ступеней.

Тембр звука. Различные звуки даже одной высоты отличаются друг от друга окраской, или тембром. Тембр звука зависит от относительной интенсивности дополнительных колебаний обычно более высоких частот, чем основная частота, определяющая высоту звука. Непосредственных количественных параметров, которые служили бы однозначной характеристикой тембра, не существует. При анализе музыкальных звуков измеряют относительную интенсивность отдельных составляющих. Иначе можно сказать, что тембр определяется видом функции распределения интенсивности звука по частотам.

Громкость звука. Хотя восприятие звука зависит от его интенсивности, однако связь эта не является прос-

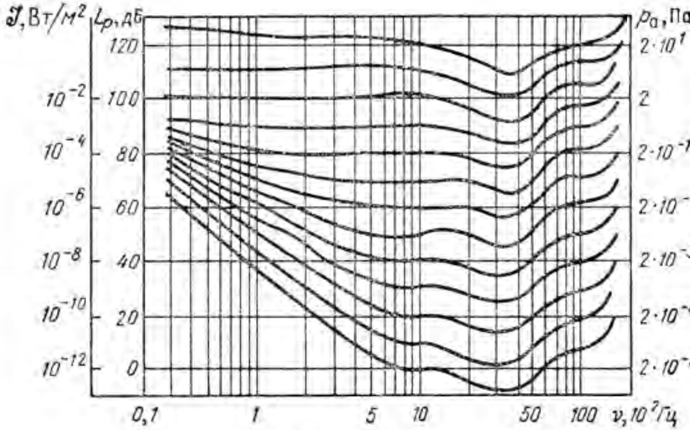


Рис. 25

той и однозначной. Прежде всего здесь следует указать на то, что чувствительность человеческого уха к звукам разной частоты различна. На рис. 25 нижняя кривая изображает так называемый порог слышимости — ту минимальную интенсивность звуков разной частоты, которую нормальный слух способен воспринимать. Шкалы на этом рисунке как по оси абсцисс, так и по оси ординат даны в логарифмическом масштабе. На шкале ординат слева указаны интенсивности в ваттах на квадратный метр и уровни интенсивности в децибелах, причем за нулевой принят уровень звука минимальной воспринимаемой интенсивности при частоте 1000 Гц. На правой шкале указаны соответствующие звуковые давления в паскалях.

Верхняя кривая соответствует возникновению механического осязания, переходящего в болевое ощущение. При увеличении интенсивности звука данной определенной частоты ощущение громкости звука возрастает.

Кривые, представленные на рис. 25, построены таким образом, что каждой кривой соответствует одинаковая громкость воспринимаемых звуков разной высоты. Таким образом, звукам одинаковой громкости, но отличающимся по частоте, соответствуют разные уровни интенсивности. Кривые на рис. 25 проведены таким образом, что при частоте 1000 Гц они сдвинуты друг относительно друга на 10 дБ. При других частотах разность уровней соседних кривых различна.

Звуки считаются равноотстоящими по громкости, если разности уровней звуков таких же громкостей, но обладающих частотой 1000 Гц равны 10 дБ. Поскольку равным интервалам уровня громкости соответствуют разные интервалы уровня интенсивности, для характеристики уровня громкости введена специальная единица – фон. Фон определяется как разность уровней громкости двух звуков данной частоты, равногромкие которым звуки с частотой 1000 Гц отличаются по интенсивности на 10 дБ. Принимая уровень, соответствующий пределу слышимости, за нулевой, мы можем непосредственно измерять уровень громкости звука в фонах как разность между уровнем громкости данного звука и нулевым.

Все приведенные выше единицы, построенные на логарифмической основе, являются, разумеется, безразмерными.

§ 6.3. Некоторые величины, связанные с акустикой помещений

При падении звуковой волны на какую-либо поверхность часть звуковой энергии отражается и часть поглощается. Соответственно вводят акустические коэффициенты отражения и поглощения. *Акустический коэффициент отражения* ρ есть отношение звуковой энергии, отраженной в сторону падения, к звуковой энергии, падающей на поверхность за тот же промежуток времени. *Акустический коэффициент поглощения* α равен разности между единицей и акустическим коэффициентом отражения:

$$\alpha = 1 - \rho. \tag{6.14}$$

Акустическая проницаемость перегородки d есть отношение звуковой энергии, проходящей через перегородку, к звуковой энергии, падающей на нее за тот же промежуток времени.

Все три величины ρ, α, d, являются величинами безразмерными. Акустическая проницаемость перегородки определяется наложением процессов поглощения в веществе, из которого изготовлена перегородка, и многократного отражения от передней и задней ее поверхности. При этом приходится учитывать и явления интерференции волн, налагающихся друг на друга в различных фазах. Чистое поглощение наблюдается в том случае, если толщина слоя настолько велика, что интенсивностью волны, отраженной от задней стенки, можно пренебречь. Если при этом на слой падает плоская волна, интенсивность которой после вхождения в слой равна $\mathfrak{I}_0$, то на некотором расстоянии от границы слоя интенсивность будет

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 \exp(-\delta x). \tag{6.15}$$

Коэффициент δ называется *линейным показателем поглощения.* Размерность его

$$[\delta] = \mathrm{L}^{-1}, \tag{6.15 a}$$

единицы – метр в минус первой степени (м^{-1}), сантиметр в минус первой степени (см^{-1}).

Для характеристики поглощающей способности отдельных тел вводится понятие общего звукового поглощения тела, которое определяется произведением площади тела на его коэффициент поглощения. Общее поглощение измеряется площадью абсолютно поглощающего тела, имеющего такое же поглощение, как и данное. За единицу общего поглощения принимают квадратный метр открытого окна, так как отверстие в стене практически не отражает звука.

Время реверберации. При производстве звука в помещении возбужденные волны многократно отражаются от стен, пола, потолка и всех предметов, заполняющих помещение. При каждом отражении часть звуковой энергии поглощается, так что после прекращения колебаний источником плотность звуковой энергии во всех точках постепенно убывает. Если в момент прекращения колебаний плотность звуковой энергии равна w_0, то спустя промежуток времени t она становится равной

$$w = w_0 \exp(-t/\tau). \qquad (6.16)$$

Процесс воспроизведения звука с последующим его затуханием называется реверберацией. Характерная *постоянная времени реверберации* τ, как показал Сэбин, равна

$$\tau = \frac{4V}{c\Sigma\alpha S}, \qquad (6.17)$$

где V – объем помещения, $\Sigma\alpha S$ – сумма общих звуковых поглощений всех тел, находящихся в помещении (включая стены, пол, потолок, мебель, людей и т.д.), c – скорость звука.

Время t представляет собой то время, в течение которого плотность звуковой энергии падает в e раз. На практике применяют другую величину T, называемую *временем стандартной реверберации* и определяемую как время, в течение которого плотность звуковой энергии уменьшается на 60 дБ, т.е. в 10^6 раз. Написав

$$10^{-6} = \exp\left(-\frac{c\Sigma\alpha S}{4V}T\right)$$

и считая скорость звука приблизительно равной $c \approx \approx 340$ м/с, получим

$$T = 2{,}3 \cdot 6\tau = 55{,}2 \, \frac{V}{c\,\Sigma\,\alpha S} \approx 0{,}162 \, \frac{V}{\Sigma\alpha S} \,. \qquad (6.18)$$

Разумеется, размерность и единицы времени реверберации те же, что и для любого времени. Отношение 10^6 выбрано по той причине, что нормальная речь в помещении среднего размера (жилая комната, небольшая аудитория) воспринимается как звук, интенсивность которого по отношению к порогу слышимости составляет приблизительно 60 дБ.

Время реверберации определяет акустические свойства помещения. Если это время слишком мало, звуки получаются глухим, "тусклыми". При слишком большом времени реверберации звуки налагаются друг на друга и речь становится неразборчивой. Оптимальные времена стандартной реверберации зависят от назначения помещений и лежат в пределах от нескольких десятых секунды до 1 – 3 с.

Глава 7

ЕДИНИЦЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 7.1. Введение

Системы электрических и магнитных единиц прошли сложный и до некоторой степени противоречивый путь своего образования, обусловленный особенностями развития наших знаний об электрических и магнитных явлениях. До открытия Х. Эрстедом в 1820 г. магнитного действия электрического тока электрические и магнитные явления изучались независимо друг от друга, хотя ими занимались одновременно одни и те же ученые (У. Гильберт, Ш. Кулон). Существенную роль в истории развития наших знаний о магнитных явлениях сыграло то обстоятельство, что человек впервые познакомился с ними еще в глубокой древности благодаря открытию магнитных свойств железа.

Когда наступила пора количественного изучения электрических и магнитных явлений, то, используя внешнее сходство между взаимодействием постоянных магнитов и взаимодействием электрических зарядов, для описания этих взаимодействий стали применять одинаковую терминологию, которая сохранилась и до настоящего времени, хотя она и не соответствует нашим современным представлениям. Немало ученых, основываясь на указанном сходстве, безуспешно пытались найти общую природу электрических и магнитных явлений.

После открытия Эрстеда и последующих исследований, в особенности после формулировки Максвеллом общих законов электромагнетизма, было установлено, что взаимная связь электрических и магнитных явлений имеет совсем иной характер, чем это ранее предполагалось. Наконец, специальная теория относительности Эйнштейна показала полное единство электромагнитного поля, которое проявляется как электрическое или магнитное в зависимости от относительного движения систем отсчета. Тем не менее вплоть до сравнительно недавнего времени математическое описание электрических и магнитных явлений и их рассмотрение в общем курсе физики сохранялись прежними.

Раздел электричества и магнетизма начинался с электростатики, изложение которой основывалось на законе Кулона для взаимодействия точечных зарядов

$$F_э = \mathcal{K}_1 \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r^2}, \qquad (7.1)$$

где Q_1 и Q_2 – модули зарядов, r – расстояние между ними, ϵ – диэлектрическая проницаемость, характеризующая влияние среды на взаимодействие. По смыслу ее определения ϵ в вакууме равна единице; $\mathcal{K}_1$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц. Единицы длины и силы СГС при $\mathcal{K}_1 = 1$ определяли СГС-единицу заряда.

С помощью уравнений электростатики устанавливались единицы других электростатических величин – напряженности электрического поля, электрического потенциала, электрической емкости, а также единицы величин, относящихся к процессу прохождения постоянного электрического тока, в первую очередь силы тока, определяемой уравнением

$$I = dQ/dt. \qquad (7.2)$$

Это уравнение с самого начала записывается без коэффициента пропорциональности, поскольку во всех системах он принимается равным единице*).

Вслед за электростатикой и независимо от нее излагалось учение о магнетизме (магнитостатика). Здесь за основу принимался закон взаимодействия полюсов постоянных магнитов, также сформулированный Кулоном:

$$F_{\text{м}} = \mathcal{K}_2 \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}, \tag{7.3}$$

где m_1 и m_2 – "магнитные массы", или "количества магнетизма", взаимодействующих полюсов, r – расстояние между полюсами, μ – магнитная проницаемость, аналогично диэлектрической проницаемости характеризующая влияние среды на взаимодействие. Далее вводились другие величины для описания магнитного поля постоянных магнитов и для них определялись единицы в рамках СГС при $\mathcal{K}_2 = 1$.

Несмотря на внешнее сходство формул (7.1) и (7.3), между взаимодействием электрических зарядов и взаимодействием магнитных полюсов существует принципиальное различие. В то время как не составляет труда иметь изолированные одноименные или разноименные электрические заряды и даже, взяв заряженные тела, достаточно малые по размеру (по сравнению с расстоянием между ними), смоделировать с нужной точностью "точечные" заряды, получить изолированные магнитные полюсы невозможно, так как любой магнит обладает обоими полюсами – "северным" и "южным". Практически эта трудность преодолевалась тем, что исследова-

---

*) М. Абрагам предлагал ввести в (7.2) коэффициент пропорциональности, отличный от единицы, не связывая, таким образом, единицу силы тока с единицей заряда. Это предложение не получило, однако, поддержки и распространения.

лось взаимодействие полюсов двух магнитов, длина которых значительно больше расстояния между ними.

Имелась также некоторая неопределенность в местоположении самих полюсов. Его нельзя было отождествлять с концами магнитов – иначе из формулы (7.3) следовало бы ожидать бесконечно большой силы при соприкосновении полюсов. Эту трудность также оказалось возможным преодолеть, рассматривая магнит аналогично электрическому диполю – системе двух разноименных зарядов, удаленных друг от друга на некоторое расстояние l.

Электрический диполь характеризуется моментом

$$p_э = Ql. \tag{7.4}$$

В электростатике вычисляется поведение диполя в различных точках окружающей среды в однородном и неоднородном полях. Перенесение соответствующих формул на магнитный диполь позволило описать взаимодействие реальных магнитов, пользуясь понятием магнитного диполя, момент которого формально можно было определить как произведение "магнитной массы" на расстояние между полюсами:

$$p_м = ml. \tag{7.5}$$

Для дальнейшего полезно отметить, что электрический диполь в однородном электрическом поле напряженностью E и магнитный диполь (постоянный магнит) в однородном магнитном поле напряженностью H испытывают вращающие моменты

$$\mathcal{M}_э = \mathbf{p}_э \times \mathbf{E}. \tag{7.6}$$

$$\mathcal{M}_м = \mathbf{p}_м \times \mathbf{H}. \tag{7.7}$$

Как было сказано выше, электростатика и магнитостатика излагались независимо друг от друга. За ними обычно в общем курсе физики рассматривались законы постоянного тока и лишь в конце излагались магнитное действие тока (обычно в виде действия на магнитную стрелку), электромагнитная индукция и т.д. Такой порядок изложения создавал трудности для понимания существа явлений, приводил к путанице основных понятий. В особенности это проявлялось в вопросе о системах единиц. Построенные независимо друг от друга, единицы электрических и магнитных величин образовывали две группы, обе находящиеся в рамках СГС. Эти группы не вступали бы друг с другом в противоречие, если бы не существовало магнитного поля тока. Благодаря наличию последнего сила тока входила не только в определяющее уравнение (7.2), но и в выражения для действия тока на магнитную стрелку или для взаимодействия токов. Поскольку в этих выражениях для всех остальных величин существовали ранее установленные единицы СГС, то определялась единица силы тока, отличная от единицы, основанной на формуле (7.2), при измерении заряда электростатическими единицами. Таким образом возникли две системы СГС электрических и магнитных величин – электростатическая (СГСЭ) и электромагнитная (СГСМ), о построении которых будет сказано ниже.

В настоящее время в большинстве курсов физики принят другой порядок изложения основ электричества и магнетизма, в котором в качестве основного магнитного явления принимается магнитное действие тока. Имеется достаточно физических оснований для выбора именно такого порядка. Взаимодействие токов с полным правом можно отнести к числу фундаментальных явлений природы, таких как всемирное тяготение, взаимодействие электрических зарядов. В то же время магнитные свойства железа и других ферромагнитных материалов присущи только этим веществам и отражают особенности их структуры. Ферромагнетизм принадлежит к числу наиболее сложных явлений, и его объяснение стало возможно только на основе квантовомеханического рассмотрения взаимодействия электронов.

Магнитные свойства электрического тока могут быть по-разному использованы при изложении электромагнетизма, и в этом направлении нет единого общепризнанного метода, да, пожалуй, вряд ли представляется возможным указать такой метод. В § 7.2 будут рассмотрены некоторые варианты и показано, как на основе совокупности выражений, описывающих электрические и электромагнитные взаимодействия, могут быть построены различные системы единиц.

§ 7.2. Возможные способы построения систем единиц электрических и магнитных величин

В зависимости от того, какие взаимодействия и в каком виде принимаются для определения физических величин, служащих для описания электрических и магнитных явлений, устанавливается совокупность определяющих уравнений, с помощью которых вводятся соответствующие производные единицы. Что касается электростатических взаимодействий, то не возникает сомнений в том, что наиболее естественно основываться на законе Кулона (7.1).

Значительно сложнее обстоит дело с выбором уравнения для описания взаимодействия токов – явления, которое должно быть основным в электромагнетизме. Дело в том, что невозможно создать никакого аналога точечному заряду. Это связано с тем, что мы всегда имеем замкнутый контур с током, из которого нельзя "вырезать" отдельные куски. Правда, Ампер предложил формулу, описывающую взаимодействие элементов тока, но эта формула не может быть смоделирована, даже приближенно, ни в каком эксперименте, противоречит третьему закону Ньютона, использует громоздкое математическое выражение (двойное векторное произведение) и не объясняет, почему сила взаимодействия направлена не по линии, соединяющей элементы тока.

Для того чтобы преодолеть эту трудность, можно предложить несколько путей. Некоторые из них основываются на том, что замкнутый контур с током обладает свойствами диполя, т.е. сам создает поле, аналогичное полю диполя, и во внешнем поле на него действуют такие же силы, как на диполь, в частности, в однородном электрическом поле он испытывает вращающий момент. Можно рассматривать взаимодействие двух контуров, линейные размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними.

При расчете взаимодействия электрических диполей доказывается, что если оси диполей лежат на одной прямой и расстояние между диполями велико по сравнению с длиной диполей, то сила взаимодействия между диполями пропорциональна произведению их электрических моментов и обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними:

$$F_э = -\mathscr{K}_1 \frac{6p_{э1}p_{э2}}{\epsilon r^4} . \qquad (7.8)$$

Знак минус показывает, что если моменты диполей направлены в одну сторону, то между ними возникает сила притяжения.

Эксперимент, который может быть проведен с малыми контурами (линейные размеры контуров малы по сравнению с расстоянием между ними), покажет, что в том случае, когда оси контуров лежат на одной прямой, между ними возникает сила взаимодействия

$$F_м = -\mathscr{K}_3 \mu \frac{I_1 I_2 S_1 S_2 N_1 N_2}{r^4} , \qquad (7.9)$$

где I_1 и I_2 – токи, текущие по контурам, S_1 и S_2 –

площади контуров, N_1 и N_2 – числа витков в каждом контуре. Обращает на себя внимание тот факт, что магнитная проницаемость стоит не в знаменателе, а в числителе. Как показывает анализ этого вопроса, "магнитные массы" полюсов при изменении среды сами изменяются так, что если обозначить "магнитную массу" в вакууме m_0, то в среде с магнитной проницаемостью μ "магнитная масса" будет m_0/μ, так что вместо (7.3) можно написать

$$F_{\text{м}} = \mathcal{K}_2 \mu \frac{(m_{01}/\mu)(m_{02}/\mu)}{r^2}. \tag{7.10}$$

Используя (7.9), можно, в принципе, вывести все законы электромагнетизма, построить разные системы единиц и установить соотношения между единицами разных систем.

Вместо взаимодействия малых контуров можно использовать взаимодействие каких-либо других контуров, например весьма длинных прямолинейных параллельных проводников (теоретически, бесконечно длинных), установив экспериментально силу взаимодействия, приходящуюся на отрезок определенной длины каждого проводника. Опыт показывает, что эта сила

$$F_{\text{м}} = \mathcal{K}_4 \mu \frac{I_1 I_2 l}{a}, \tag{7.11}$$

где a – расстояние между проводниками, а l – длина выбранного отрезка.

Наиболее принятый в общем курсе физики путь состоит в том, что вся задача о взаимодействии токов разбивается на два этапа. Вначале рассматривается поведение прямолинейного проводника или контура с током I_1 во внешнем магнитном поле, созданном другим контуром с током I_2, параметры которого временно остаются в стороне. Удобно взять контур, о котором мы уже знаем, что он обладает свойствами диполя. Опыт покажет, что в однородном поле он испытывает вращающий момент

$$\mathcal{M} = \mathcal{K}_5 B I_1 S N \sin\alpha, \tag{7.12}$$

где α – угол между положительным направлением нормали к плоскости контура*) в данном положении и в том положении, в котором момент равен нулю. Входящая в (7.12) величина B называется магнитной индукцией или индукцией магнитного поля. Подобно напряженности электрического поля, включающей в себя диэлектрическую проницаемость, магнитная индукция включает в себя магнитную проницаемость, так что (7.12) учитывает влияние среды. Очевидно, в однородной изотропной среде индукция пропорциональна μ.

В случае неоднородного поля контур, кроме вращающего момента, будет испытывать и силу, но для нашей цели достаточно рассматривать ту часть воздействия на контур, которая определяется моментом.

Второй этап решения задачи состоит в определении индукции, создаваемой в произвольной точке произвольным контуром, по которому протекает ток I_2. Основываясь на опытах Био и Савара, Лаплас построил формулу (закон Био, Савара и Лапласа)

$$B = \mathcal{K}_6 \mu \oint \frac{I_2\, dl \sin\varphi}{r^2} . \tag{7.13}$$

В формуле (7.13) dl – элемент контура, r – радиус-вектор, определяющий расстояние от этого элемента до точки, в которой определяется поле, φ – угол между r и dl (рис. 26).

---

*) Положительное направление нормали к контуру определяется по правилу буравчика.

Формулы (7.12) и (7.13) можно объединить в общую формулу:

$$\mathcal{M} = \mathcal{K}_5\ \mathcal{K}_6 \mu \oint \frac{I_2\, dl \sin\varphi}{r^2} I_1 NS \sin\alpha. \tag{7.14}$$

Произведение коэффициентов $\mathcal{K}_5 \mathcal{K}_6$ отличается от $\mathcal{K}_3$ и $\mathcal{K}_4$ лишь числовым множителем. Формула (7.14) по

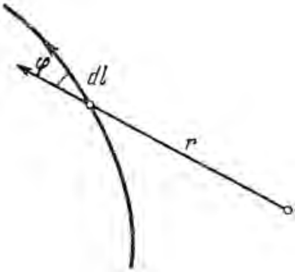


Рис. 26

смыслу аналогична формуле (7.1), с той лишь разницей, что (7.1) описывает взаимодействие точечных зарядов, а (7.14) – взаимодействие произвольного контура с малым "пробным" плоским контуром. Хотя формула (7.14) может быть непосредственно использована для установления единиц, удобнее взять раздельно (7.12) и (7.13).

Составим следующую совокупность уравнений:

$$F_э = Q_1 E, \tag{7.15}$$

$$E = \mathcal{K}_1 \frac{Q_2}{\epsilon r^2}, \tag{7.16}$$

$$D = \mathcal{K}_7 \epsilon E, \tag{7.17}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{K}_5 B I_1 S N \sin\alpha, \tag{7.18}$$

$$B = \mathcal{K}_6 \mu \oint \frac{I_2\, dl \sin\varphi}{r^2}, \tag{7.19}$$

$$H = \mathcal{K}_8 \frac{B}{\mu}. \tag{7.20}$$

Уравнения (7.17) и (7.20) связывают напряженность электрического поля E и индукцию магнитного поля B с вспомогательными величинами – электрическим смещением D и напряженностью магнитного поля H. Порядок выписанных уравнений не случаен. Левая группа описывает электростатические взаимодействия и поля, правая – электромагнитные. Таким образом, можно установить некоторую аналогию между следующими парами величин:

E и B, D и H, ϵ и $1/\mu$.

Эта аналогия показывает неудачность наименований характеристик магнитного поля. Происхождение этих наименований, как мы говорили, обусловлено тем, что для определения магнитных величин основным служил закон Кулона для взаимодействия полюсов постоянных магнитов (7.3).

К шести уравнениям (7.15)–(7.20) следует добавить седьмое – (7.2), связывающее заряд и ток и являющееся как бы мостом между левой и правой группами уравнений. В этих семи уравнениях присутствуют шесть величин: Q, E, D, I, B, H, для которых единицы должны быть установлены соответствующим выбором коэффициентов пропорциональности. В уравнениях (7.2) и (7.15) коэффициенты во всех системах приняты равными единице. Поэтому для установления единиц шести величин мы располагаем только пятью уравнениями с подлежащими выбору коэффициентами пропорциональности. Очевидно, непротиворечивым образом можно распоряжаться четырьмя коэффициентами, поскольку одно из уравнений должно выражать результат определенного электростатического или электромагнитного эксперимента. Из всех возможных вариантов выбора коэффициентов и, следовательно, способа построения систем единиц электрических и магнитных величин мы рассмотрим только те, которые реализуются на практике.

В первую очередь остановимся на способах построения системы, основные единицы которой – сантиметр, грамм, секунда.

Электростатическая система единиц (СГСЭ):

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_7 = 1, \quad \mathcal{K}_6 = 1/\mathcal{K}_8.$$

Коэффициент $\mathcal{K}_6$ принято обозначать μ_0. Ранее в физике и электротехнике объединяли μ_0 и μ в один коэффициент $\mu_0\mu$ с обозначением μ_a и называли абсолютной магнитной проницаемостью, а безразмерную магнитную проницаемость, равную в вакууме единице, обозначали μ_r и называли относительной магнитной проницаемостью.

Равенство единице коэффициента $\mathcal{K}_1$ определяет электростатическую единицу количества электричества и, следовательно, электростатическую единицу силы тока. Таким образом, в уравнении (7.14) имеются единицы для всех входящих в него величин. Поэтому значение коэффициента μ_0 должно быть определено либо экспериментально, либо теоретически. Развитая Максвеллом электромагнитная теория света показала, что коэффициент μ_0 должен равняться $1/c^2$, где c – скорость света в вакууме. Эксперимент блестяще подтвердил этот вывод.

Электромагнитная система единиц (СГСМ):

$$\mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_6 = \mathcal{K}_8 = 1, \quad \mathcal{K}_7 = 1/\mathcal{K}_1.$$

Коэффициент $\mathcal{K}_7$ обозначается ϵ_0. Обращаясь к уравнению (7.14) или аналогичным ему (7.9) и (7.11), видим, что при таком выборе произойдет увеличение единицы силы тока в c раз, где под c следует понимать число, равное скорости света в вакууме, измеренной в сантиметрах в секунду. Иногда для того, чтобы подчеркнуть, что речь идет о числовом коэффициенте, вводят вместо c специальное обозначение ζ, где $\zeta = 3 \cdot 10^{10}$. Соответственно и единица заряда СГСМ оказывается в $3 \cdot 10^{10}$ раз больше единицы заряда СГСЭ. Подставляя соответствующие величины в закон Кулона (7.1), найдем, что $\epsilon_0 = 1/c^2$. Подобно произведению $\mu_0\mu$, произведение $\epsilon_0\epsilon$ называлось абсолютной диэлектрической проницаемостью с обозначением ϵ_a, а безразмерная диэлектрическая проницаемость обозначалась ϵ_r и называлась относительной диэлектрической проницаемостью.

Симметричная система единиц, или система Гаусса (СГС):

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_7 = \mathcal{K}_8 = 1, \quad \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_6.$$

В этой системе единицы заряда и силы тока совпадают с соответствующими единицами СГСЭ. Поскольку при этом произведение коэффициентов $\mathcal{K}_5 \mathcal{K}_6 = 1/c^2$, а сами коэффициенты равны друг другу, то каждый из них равен $1/c$. Никаких дополнительных обозначений не вводится. Поэтому в уравнения (7.18) и (7.19) в явном виде входит скорость света и соответственно эти уравнения приобретают вид

$$\mathcal{M} = \frac{1}{c} B I_1 S N \sin\alpha, \qquad B = \frac{1}{c}\,\mu \oint \frac{I_2\, dl \sin\varphi}{r^2}.$$

В дальнейшем из перечисленных трех систем мы рассмотрим подробно только СГС (симметричную), обращаясь к СГСЭ и СГСМ лишь в той мере, в какой это будет необходимо в отдельных частных случаях.

Международная система единиц (СИ). Перейдем теперь к построению электрических и магнитных единиц Международной системы единиц (СИ). В создании этой системы главную роль сыграло то обстоятельство, что в электротехнике, радиотехнике и физике давно широко пользовались так называемыми практическими единицами: кулоном, вольтом, ампером, джоулем и т.д. Поэтому возникла задача ввести в систему такие коэффициенты, которые позволили бы применять ее во всех областях учения об электричестве и магнетизме, и, объединив с механическими, тепловыми и другими единицами, создать систему, охватывающую все области физики и техники.

Для того чтобы была возможность связать практические единицы электрических и магнитных величин с механическими единицами, имея уже готовую единицу работы и энергии – джоуль, при одновременном требовании, чтобы единицы длины и массы были десятичными кратными или дольными единиц СГС, необходимо выполнить следующее условие:

$$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг} = 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2} =$$
$$= 10^a \text{ г} \cdot (10^b)^2 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-2},$$

где a и b – целые числа. Отсюда получаем

$$a + 2b = 7. \qquad (7.21)$$

Были предложены системы с различными комбинациями показателей a и b: 10^7 г и 1 см (система Блонделя), 10^{-11} г и 10^9 см (система Максвелла, в которой коэффициент μ_0 равен единице) и др. Наибольшее внимание привлекла система Джорджи: $a = 3$, $b = 2$, т.е. 1 кг и 1 м. Обе эти единицы удобны для практики и непосредственно представлены международными эталонами. Поскольку система при этом образована так, что в нее была введена одна новая единица (любая из электрических или магнитных единиц, например ампер, вольт, ом), в выражениях для закона Кулона и электромагнитного взаимодействия неизбежно должны были появиться два новых коэффициента вместо одного в каждой из систем СГСЭ, СГСМ и СГС.

Что касается размерностей соответствующих единиц, то здесь существовали три возможности. Можно было, считая один из коэффициентов (в законе Кулона или законе взаимодействия токов) числовым множителем, лишенным размерности, построить систему размерностей так же, как в одной из двух систем – СГСЭ или СГСМ, либо же считать одну из электрических или магнитных единиц основной и соответствующим образом строить систему размерностей не на трех, а на четырех основных единицах*). Именно этот последний путь и был принят при построении системы размерностей СИ. Одним из ее преимуществ является более простой вид, который приобретают размерности.

Как мы уже знаем, в качестве четвертой величины, размерность единицы которой включается в число основных, была принята единица силы тока ампер. При этом в формуле (7.11), на основе которой определяется ампер, постоянная $\mathscr{K}_4$ считается размерной, хотя числовое ее значение зафиксировано. Если бы было принято считать эту постоянную безразмерной (размерности l и a сокращаются), то размерность единицы силы тока была бы

$$[I] = \mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}, \tag{7.11 а}$$

откуда размерность единицы заряда

$$[Q] = \mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}. \tag{7.11 б}$$

Эта размерность отличается от размерности заряда в СГС (см. (7.35а)) множителем, размерность которого обратна размерности скорости. Очевидно, такими же размерностями обладают единицы силы тока и количества электричества в СГСМ.

В электротехнической и радиотехнической литературе получила широкое распространение так называемая ра-

---

*) Здесь мы, разумеется, не учитываем размерности температуры и силы света, которые не входят ни в одну из электрических или магнитных единиц.

ционализованная форма записи уравнений электромагнетизма, предложенная впервые Хевисайдом. При рационализованной форме в знаменатели законов Кулона (7.1) и Био, Савара и Лапласа (7.13) ставится коэффициент 4π. В результате этого в ряде уравнений, относительно часто встречающихся на практике, этот коэффициент исчезает и уравнения приобретают более симметричный вид. В первую очередь это относится к уравнениям Максвелла.

Рационализованная форма записи принята при построении Международной системы единиц, что соответственно отражается на установлении коэффициентов в системе уравнений (7.15) – (7.20). Вместо коэффициентов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_6$ вводятся коэффициенты

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \mathcal{K}_1}, \tag{7.22}$$

$$\mu_0 = 4\pi \mathcal{K}_6, \tag{7.23}$$

так что уравнения (7.16) и (7.19) записываются в виде

$$E = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}, \tag{7.24}$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \oint \frac{I_2 dl \sin\varphi}{r^2}. \tag{7.25}$$

Остальные коэффициенты устанавливаются следующим образом:

$$\mathcal{K}_5 = 1, \quad \mathcal{K}_7 = \epsilon_0, \quad \mathcal{K}_8 = 1/\mu_0. \tag{7.26}$$

Коэффициент μ_0 выбирается так, чтобы при взаимодействии двух проводников с токами I_1 и I_2, измеренными в амперах, расстояниями и длинами отрезков проводников, измеренными в метрах, сила взаимодействия измерялась бы в ньютонах.

Для удобства вычисления числового значения μ_0 определим силу взаимодействия двух бесконечно длинных прямолинейных проводников с равными токами: $I_1 = I_2$. Это целесообразно по тем соображениям, что определение ампера в СИ основывается на таком взаимодействии. Для этого с помощью формулы (7.25) определим магнитную индукцию бесконечно длинного прямолинейного проводника с током I. Соответствующее вычисление дает

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a}, \tag{7.27}$$

где a – расстояние от проводника до точки, в которой вычисляется индукция.

Согласно формуле Ампера сила, которую испытывает прямолинейный проводник длиной l с током I в магнитном поле с индукцией B (если угол между направлениями индукции и тока α), равна

$$F_{\text{м}} = BIl \sin\alpha. \tag{7.28}$$

Если проводники параллельны, то с учетом введенных обозначений и влияния среды получим формулу, соответствующую (7.11), в виде

$$F_{\text{м}} = \frac{\mu_0 \mu I^2 l}{2\pi a}. \tag{7.29}$$

Если бы эта же сила была записана в СГСМ (при нерационализованной форме записи уравнений), мы имели бы формулу

$$F_{\text{м}} = \frac{2\mu I^2 l}{a}. \tag{7.30}$$

При первоначальном введении практических единиц ампер был определен как 0,1 СГСМ-единицы силы тока.

Принимая $l = a$ и $I_1 = I_2 = 1$ А = 0,1 СГСМ, получим силу взаимодействия в вакууме

$$F_{\text{м}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ дин} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Международная система единиц устанавливает это значение для определения ампера, уже не связывая его с единицей СГСМ. Точная формулировка ампера дана в § 1.6 на с. 55.

Подставляя значение силы взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н в формулу (7.29), найдем, что числовое значение постоянной $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$. Если, как это принимается условно в СИ, считать ампер основной единицей, то размерность μ_0 будет

$$[\mu_0] = \mathrm{LMT^{-2}I^{-2}}, \qquad (7.29\,\text{а})$$

где I – символ размерности силы тока. Коэффициент μ_0 получил название магнитной постоянной. Хотя из формулы (7.29) вытекает для μ_0 обозначение единицы магнитной постоянной Н/А^2, обычно применяют обозначение Гн/м, где Гн – обозначение единицы индуктивности "генри", которая будет определена ниже. Заметим, что, согласно определению, число $4\pi \cdot 10^{-7}$ принимается как точное, которое не подлежит изменению при уточнении измерений.

Постоянная ϵ_0 может быть определена различными способами. Воспользуемся для этого законом Кулона (7.1). Единица заряда в Международной системе единиц (кулон), как и единица силы тока, составляет 0,1 СГСМ-единицы заряда, а последняя в c раз больше единицы заряда СГСЭ. Поэтому единица заряда СИ составляет $c/10$ СГСЭ-единицы заряда. Подставив это значение заряда и расстояние 1 м = 100 см в (7.1) и положив $\mathscr{K}_1 = 1$, можно написать

$$F_{\text{э}} = \frac{(c/10)^2}{100^2} = \frac{c^2}{10^6} \text{ дин} = c^2 \cdot 10^{-11} \text{ Н}. \qquad (7.31)$$

Тот же закон Кулона (7.1) в СИ может быть записан как

$$F_э = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} . \qquad (7.32)$$

Подставляя соответствующие значения, можем написать для вакуума

$$c^2 \cdot 10^{-11} = \frac{1^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 1^2} .$$

Отсюда

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \cdot 10^{-11}} . \qquad (7.33)$$

Так как $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с, то

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{20} \cdot 10^{-11}} \approx 8{,}8542 \cdot 10^{-12}.$$

Размерность ϵ_0 (см. (7.24))

$$[\epsilon_0] = L^{-3} M^{-1} T^4 I^2 . \qquad (7.24\,a)$$

Коэффициент ϵ_0 называется электрической постоянной. Из формулы (7.32) для электрической постоянной вытекает обозначение единицы $А^2 \cdot с^2 / (м^2 \cdot Н)$. Однако обычно это обозначение записывают в виде Ф/м, где Ф – обозначение единицы электрической емкости – фарад. Следовательно,

$$\epsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

Для определения ϵ_0 можно было бы воспользоваться и вытекающим из теории Максвелла выражением для скорости света в вакууме

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} , \qquad (7.34)$$

из которого, как легко убедиться, мы получим то же значение, что и написанное выше (разумеется, при измерении скорости света в метрах в секунду).

§ 7.3. Электрические и магнитные единицы СГС

Подробный разбор единиц электрических и магнитных величин мы начнем с СГС (симметричной гауссовой системы). Такой порядок оправдывается, во-первых, историческими соображениями, поскольку в качестве стройной системы она сложилась раньше других, а во-вторых, тем, что ее построение проще, чем построение СИ, подробное изложение которой будет дано в § 7.4. Там же мы приведем и соотношения, связывающие единицы обеих систем.

Электрический заряд (количество электричества). Согласно закону Кулона единица количества электричества СГС*) есть такой заряд, который взаимодействует в вакууме с равным ему зарядом на расстоянии один сантиметр с силой в одну дину.

Из определения вытекает размерность

$$[Q] = \mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}. \qquad (7.35\,\text{а})$$

Пространственная (объемная) плотность электрического заряда. Иногда заряд распределен в некотором объеме (приэлектродные области при электролизе и в газовом разряде, у границы между двумя полупроводниками с разным характером проводимости и т.п.). В этих случаях распределение заряда характеризуется пространственной (объемной) плотностью, которая при равномерном распределении заряда равна заряду, приходящемуся на единицу объема:

$$\rho = Q/V. \qquad (7.36)$$

---

*) В дальнейшем в § 7.3 в определениях будем опускать аббревиатуру "СГС".

Размерность пространственной плотности заряда

$$[\rho] = L^{-3/2} M^{1/2} T^{-1}. \tag{7.36 а}$$

Поверхностная плотность электрического заряда. Поверхностная плотность заряда есть отношение заряда к площади поверхности, на которой он распределен. Согласно формуле

$$\sigma = Q/S \tag{7.37}$$

поверхностную плотность заряда, равную единице, мы будем иметь при таком равномерном распределении заряда на поверхности проводника, при котором на каждый квадратный сантиметр приходится единица заряда.

Размерность поверхностной плотности заряда

$$[\sigma] = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}. \tag{7.37 а}$$

Линейная плотность электрического заряда. Распределение заряда на протяженном проводнике характеризуется линейной плотностью заряда, которая при равномерном распределении равна заряду, приходящемуся на единицу длины проводника:

$$\tau = Q/l. \tag{7.38}$$

Размерность линейной плотности заряда

$$[\tau] = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}. \tag{7.38 а}$$

Электрический потенциал (разность электрических потенциалов (электрическое напряжение), электродвижущая сила). Потенциал измеряется потенциальной энергией, которой обладает единица заряда, помещенного в данной точке поля:

$$U = W_{\text{п}}/Q. \tag{7.39}$$

Учитывая размерность потенциальной энергии и электрического заряда, находим размерность потенциала:

$$[U] = \frac{L^2 M T^{-2}}{L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}} = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}. \tag{7.39 а}$$

Единицей потенциала является потенциал такой точки электрического поля, в которой единичный положительный заряд обладает потенциальной энергией, равной одному эргу.

Единица потенциала может служить, разумеется, и для измерения разности потенциалов, часто называемой напряжением. В этом случае единица напряжения может быть определена как разность потенциалов между такими двумя точками, перенесение единичного заряда между которыми сопровождается совершением работы, равной одному эргу. Единицей потенциала измеряется и электродвижущая сила источника тока.

Напряженность электрического поля. Из формулы напряженности поля

$$E = F_э/Q \tag{7.40}$$

вытекает размерность

$$[E] = \mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}. \tag{7.40 а}$$

Здесь $F_э$ – сила, действующая на заряд Q. За единицу напряженности электрического поля (сила поля, электрический градиент *)) принимается напряженность в такой точке электрического поля, в которой на единичный положительный заряд действует сила, равная одной дине. Указание на знак заряда требуется делать, поскольку напряженность поля является величиной векторной и необходимо в определении указать ее направление.

Электрическое смещение (электрическая индукция). Если взаимодействие происходит не в вакууме, а в некоторой среде, то сила взаимодействия уменьшается в ϵ раз, где, как и выше, ϵ представляет собой диэлектри-

---

*) Название "электрический градиент" основано на выражении связи между напряженностью и потенциалом (см. ниже формулу (7.76)).

ческую проницаемость среды. Произведение ϵE называется электрическим смещением (электрической индукцией) и обозначается D. Поскольку ϵ не имеет размерности, то размерности E и D совпадают.

Поток электрического смещения (электрический поток). Поток смещения $d\Psi_D$ через элемент поверхности dS представляет собой произведение смещения на площадь элемента и на косинус угла между направлением

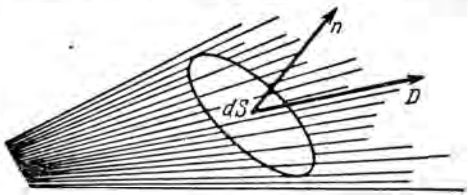


Рис. 27

вектора смещения и нормалью к поверхности (рис. 27):

$$d\Psi_D = DdS\cos(\widehat{D, n}).$$

Согласно этому определению за единицу потока электрического смещения принимается поток через один квадратный сантиметр поверхности, расположенной перпендикулярно вектору смещения, при смещении, равном единице.

Так как по теореме Гаусса поток смещения через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряд Q, равен

$$\Psi_D = 4\pi Q, \tag{7.41}$$

то очевидно, что единица потока смещения равна потоку, исходящему из заряда, равного единице, сквозь телесный угол, равный одному стерадиану. Как из выражения теоремы Гаусса, так и непосредственно из определения потока смещения следует, что размерность потока смещения совпадает с размерностью заряда (см. (7.35а)):

$$[\Psi_D] = [Q] = \mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}. \tag{7.41 а}$$

Электрический момент диполя. Из формулы для электрического момента диполя (7.4)

$$p_э = Ql$$

получаем его размерность:

$$[p_э] = \mathrm{L}^{5/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}. \tag{7.4 а}$$

Единицу момента диполя можно также определить как момент такого диполя, который в однородном электрическом поле с напряженностью, равной единице, будучи расположен перпендикулярно полю, испытывает механический момент, равный единице. Из формулы для механического момента, испытываемого диполем,

$$\mathcal{M} = p_э E \sin(\widehat{E, p_э})$$

получим, естественно, ту же размерность (7.4а).

Электрическая емкость. Отношение заряда проводника к его потенциалу определяет емкость проводника

$$C = Q/U. \tag{7.42}$$

Размерность емкости находим, учитывая (7.35а) и (7.39а):

$$[C] = \frac{\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{L}. \tag{7.42 а}$$

За единицу емкости принимается емкость проводника, при сообщении которому единицы заряда потенциал повышается на единицу. Так как емкость шара в вакууме численно равна его радиусу, то за единицу емкости может быть принята емкость шара с радиусом в один сантиметр. Поэтому единица емкости в СГС часто называется сантиметром емкости или, кратко, сантиметром (см).

Поляризованность (интенсивность поляризации). Диэлектрик, находящийся в электрическом поле, поляризуется, причем каждый элемент его объема представляет собой диполь, обладающий определенным электрическим моментом. Под поляризованностью диэлектрика P понимают электрический момент, которым обладает единица объема поляризованного диэлектрика. Если объем обладает моментом $p_э$, то

$$P = p_э/V. \tag{7.43}$$

Учитывая (7.4а) и зная размерность объема, получим

$$[P] = \mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}. \tag{7.43 a}$$

Таким образом, размерность поляризованности совпадает с размерностью напряженности поля и смещения.

Свойства диэлектрика характеризуются двумя связанными друг с другом безразмерными величинами — *диэлектрической проницаемостью* ϵ и *диэлектрической восприимчивостью* $\chi_э$. О первой было достаточно сказано в § 7.2. Что касается второй, то она определяется как отношение поляризованности диэлектрика к напряженности электрического поля:

$$\chi_э = P/E. \tag{7.44}$$

Из формулы (7.44) видно, что $\chi_э$ является величиной безразмерной. Соотношение между ϵ и $\chi_э$ дается формулой

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_э. \tag{7.45}$$

Сила электрического тока (сила тока). При движении зарядов по проводнику мы имеем дело с силой тока, аналогичной расходу жидкости или газа или тепловому потоку и измеряющейся количеством электричества, протекающим сквозь поперечное сечение проводника в единицу времени.

Размерность силы тока находится с учетом (7.53 а):

$$[I] = \mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-2}. \qquad (7.45\text{ а})$$

Единицей силы тока является сила постоянного тока, при которой сквозь поперечное сечение проводника в одну секунду проходит единица заряда.

Плотность электрического тока. Отношение силы тока к площади поперечного сечения проводника называется плотностью тока:

$$j = I/S. \qquad (7.46)$$

Размерность плотности тока

$$[j] = [I]/[S] = \mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-2}. \qquad (7.46\text{ а})$$

Соответствующая единица – единица силы тока на квадратный сантиметр.

Электрическое сопротивление. Согласно закону Ома сила тока пропорциональна разности потенциалов на концах проводника и обратно пропорциональна его сопротивлению:

$$I = U/R. \qquad (7.47)$$

Из формулы закона Ома получаем размерность сопротивления

$$[R] = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}. \qquad (7.47\text{ а})$$

Единицей сопротивления является сопротивление проводника, по которому течет ток, равный единице силы тока, при разности потенциалов на концах этого проводника, равной единице потенциала.

Электрическое сопротивление активное, реактивное и полное (*комплексное*). В цепи переменного тока различают активное и реактивное сопротивления. Первым обладает участок цепи, в котором отсутствует индуктивность или емкость. Реактивное сопротивление может быть индуктивным, равным $L\omega$ (где L – индуктивность, а ω – круговая частота переменного тока), либо емкостным, равным $1/C\omega$ (где C – емкость). Полное (или комплексное) сопротивление, включающее как активное, так и реактивное сопротивления, равно

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}. \tag{7.48}$$

Разумеется, размерности и единицы активного, реактивного и комплексного сопротивлений совпадают.

Электрическая проводимость. Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью:

$$G = 1/R. \tag{7.49}$$

Размерность и единица проводимости определяются этим выражением:

$$[G] = \mathrm{LT}^{-1}. \tag{7.49 a}$$

Удельное электрическое сопротивление. Сопротивление однородного проводника постоянного поперечного сечения выражается формулой

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{7.50}$$

где l – длина проводника и S – его поперечное сечение. Коэффициент ρ, характеризующий свойства проводника, называется удельным сопротивлением.

Размерность удельного сопротивления

$$[\rho] = \mathrm{T}. \tag{7.50 a}$$

Единицей удельного сопротивления является удельное сопротивление такого проводящего материала, каждый сантиметр которого при поперечном сечении один квадратный сантиметр обладает сопротивлением, равным единице.

Удельная электрическая проводимость (электропроводность). Аналогично определению проводимости удельная проводимость (или электропроводность) σ представляет собой величину, обратную удельному сопротивлению.

Согласно этому определению размерность удельной проводимости

$$[\sigma] = T^{-1}, \tag{7.51 a}$$

а единица – секунда в минус первой степени ($с^{-1}$).

Магнитная индукция. Основная характеристика магнитного поля – магнитная индукция B – наиболее наглядно может быть определена по механическому действию, которое испытывает электрический ток в магнитном поле. Воспользуемся для этой цели формулой (7.12), в которой положим $\alpha = \pi/2$, $S = 1$ см^2. Напомним, кроме этого, что коэффициент $\mathcal{K}_5 = 1/c$. При этих условиях за единицу магнитной индукции можно принять индукцию такого поля, в котором максимальный момент, испытываемый контуром площадью один квадратный сантиметр, обтекаемым током, числовое значение которого равно c (т.е скорости света в вакууме, измеренной в см/с), составляет одну дину-сантиметр. Эта единица индукции называется гаусс (Гс). Иначе можно определить гаусс как индукцию такого поля, в котором каждый сантиметр прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно полю и по которому протекает ток c единиц, испытывает силу в одну дину. Размерность индукции, согласно любому из определений,

$$[B] = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}. \tag{7.52 a}$$

Магнитный поток (поток магнитной индукции). Если изобразить магнитное поле силовыми линиями, густота которых пропорциональна индукции в данной точке поля, то общее число силовых линий, пронизывающих данную поверхность, можно охарактеризовать магнитным потоком. Магнитный поток (или поток магнитной индукции) определяется произведением индукции в данной точке на элемент площади и на косинус угла между направлением вектора индукции и нормалью к площади:

$$d\Phi = B\,dS \cos(\widehat{B, n}). \qquad (7.53)$$

Размерность магнитного потока

$$[\Phi] = \mathrm{L}^{3/2}\,\mathrm{M}^{1/2}\,\mathrm{T}^{-1}. \qquad (7.53\,а)$$

Единица магнитного потока максвелл (Мкс) представляет собой поток сквозь площадку, равную одному квадратному сантиметру, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией один гаусс.

Если магнитный поток пронизывает контур, содержащий некоторое число последовательно соединенных витков N, то в ряде случаев приходится пользоваться понятием *потокосцепления* Ψ, которое определяется как произведение потока магнитной индукции на число витков:

$$\Psi = \Phi N.$$

Разумеется, размерность и единица потокосцепления те же, что и магнитного потока.

Напряженность магнитного поля. Формально напряженность магнитного поля может быть определена из формулы (7.20), в которой коэффициент $\mathscr{K}_8$ принят равным единице. В этом случае

$$H = B/\mu. \qquad (7.54)$$

За единицу напряженности магнитного поля при таком определении принимается напряженность поля в вакууме при индукции, равной одному гауссу. Эта единица называется эрстед (Э). Поскольку магнитная проницаемость – величина безразмерная, размерность напряженности поля совпадает с размерностью индукции.

Магнитный момент. В формулу (7.18), выражающую вращающий момент, испытываемый контуром в магнитном поле, входит произведение силы тока на площадь контура и на число витков. Это произведение, характеризующее данный контур и не зависящее ни от внешнего магнитного поля, ни от ориентации контура, вместе с размерным коэффициентом, равным значению, обратному скорости света, определяет магнитный момент контура. Согласно этому определению

$$p_{\text{м}} = \mathscr{M}/B = (1/c)IS, \qquad (7.55)$$

или

$$p_{\text{м}} = (1/c)ISN. \qquad (7.56)$$

Магнитный момент равен максимальному механическому моменту, который испытывает данный контур, будучи помещен в магнитное поле с индукцией один гаусс. Магнитный момент является векторной величиной. Направление этого вектора выбирается совпадающим с нормалью к площади контура в том случае, если, глядя вдоль этой нормали, видеть ток, обтекающий контур по часовой стрелке. Вводя угол между вектором индукции и вектором магнитного момента, можно (7.18) написать в виде

$$\mathscr{M} = Bp_{\text{м}} \sin(\widehat{B, p_{\text{м}}}). \qquad (7.57)$$

Размерность магнитного момента

$$[p_{\text{м}}] = \text{L}^{5/2}\,\text{M}^{1/2}\,\text{T}^{-1}. \qquad (7.57\text{ a})$$

Согласно определению магнитного момента его единицей является магнитный момент контура, который в магнитном поле с индукцией один гаусс испытывает механический момент, равный одной дине-сантиметр.

Напомним, что понятие магнитного момента применимо и к постоянному магниту. В гл. 9, посвященной единицам атомной физики, мы познакомимся также и с магнитными моментами элементарных частиц.

Магнитодвижущая сила (циркуляции напряженности магнитного поля). Согласно закону полного тока интеграл по замкнутому контуру скалярного произведения $\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}$, где $d\boldsymbol{l}$ – элемент контура, пропорционален алгебраической сумме всех токов, охватываемых контуром:

$$\oint H \cdot dl \cos(\widehat{H, dl}) = \frac{1}{c} 4\pi \Sigma I. \qquad (7.58)$$

Стоящий слева интеграл представляет собой циркуляцию напряженности магнитного поля. Ее называют магнитодвижущей силой и обозначают $\mathscr{F}$. Название это связано с упомянутой выше ошибочной аналогией между напряженностью электрического поля и напряженностью магнитного поля. Циркуляция по замкнутому контуру напряженности электрического поля, обусловленная действием сторонних сил неэлектрического происхождения, представляет собой электродвижущую силу в данном контуре. Она равна работе перемещения по контуру единицы заряда. Циркуляция напряженности магнитного поля ни с каким перемещением и ни с какой работой не связана, так что название "магнитодвижущая сила" является таким же анахронизмом, как и некоторые другие сохранившиеся названия (живая сила, лошадиная сила и т.п.).

Формула (7.58) справедлива как в однородной, так и в неоднородной среде. Что касается знаков токов, то за положительное направление выбирается такое, которое образуется с положительным направлением нормали к выбранному контуру угол меньше $\pi/2$.

Из (7.58) вытекает размерность магнитодвижущей силы:

$$[\mathscr{F}] = \mathrm{L}^{1/2}\,\mathrm{M}^{1/2}\,\mathrm{T}^{-1}. \qquad (7.58\text{a})$$

Единица магнитодвижущей силы гильберт (Гб) определяется как магнитодвижущая сила при однократном обходе проводника, по которому течет ток, равный $c/4\pi$ СГС-единицы силы тока.

Понятие магнитодвижущей силы находит применение при расчете магнитных цепей. Если представить себе тороид (замкнутый соленоид) с площадью сечения S, содержащий N витков, то магнитодвижущая сила вдоль осевой линии тороида будет равна $(1/c)\,4\pi IN$, где I – ток, протекающий по виткам тороида. В то же время циркуляция напряженности магнитного поля равна Hl, где l – длина осевой линии. Отсюда напряженность поля

$$H = \frac{1}{c}\,\frac{4\pi IN}{l}.$$

Переходя от напряженности поля к индукции, можно определить поток, пронизывающий тороид:

$$\Phi = \frac{1}{c}\,\frac{4\pi IN}{(1/\mu)(l/S)} = \frac{\mathcal{F}}{R_\text{м}}, \tag{7.59}$$

где μ – *магнитная проницаемость* среды, заполняющей тороид. Стоящая в знаменателе величина

$$R_\text{м} = \frac{1}{\mu}\,\frac{l}{S} \tag{7.60}$$

называется *магнитным сопротивлением*, так как формула (7.59) внешне напоминает закон Ома.

Размерность магнитного сопротивления

$$[R_\text{м}] = \mathrm{L}^{-1}. \tag{7.60 а}$$

Единицей магнитного сопротивления является магнитное сопротивление цепи, в которой магнитодвижущая сила в один гильберт создает поток в один максвелл. Величина, обратная магнитному сопротивлению, называется *магнитной проводимостью*.

Индуктивность и взаимная индуктивность. При изменении магнитного потока, сцепленного с данным контуром, в последнем возникает электродвижущая сила (ЭДС) индукции, определяемая законом Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Psi}{dt}. \tag{7.61}$$

Если мы имеем дело с тороидом или, что то же, с соленоидом, длина которого весьма велика по сравнению с его диаметром, то, используя (7.59), можно написать для потокосцепления

$$\Psi = \frac{1}{c}\ \frac{4\pi I N^2}{(1/\mu)(l/S)}\ . \tag{7.62}$$

Полагая, что тороид заполнен средой, магнитная проницаемость которой не зависит от напряженности поля, можно вместо (7.61) написать

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c^2}\ \frac{4\pi N^2}{(1/\mu)(l/S)}\ \frac{dI}{dt}\ . \tag{7.63}$$

Формулы (7.62) и (7.63) представляют собой частный случай, когда поток, изменения которого порождают ЭДС индукции, создан в тороиде или длинном соленоиде. В более общем случае контура любой формы с любым числом произвольно расположенных витков можно, основываясь на законе Био, Савара и Лапласа, выразить потокосцепление с этим контуром в виде

$$\Psi = \frac{1}{c} L I, \tag{7.64}$$

где коэффициент L не зависит от конфигурации и размеров проводников, образующих контур, и от заполняющей его среды. Этот коэффициент называется индуктивностью контура (прежнее название – коэффициент самоиндукции). Подставляя Ψ из (7.64) в (7.61), можно написать

$$\mathcal{E}_{si} = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}\ . \tag{7.65}$$

В более общем виде, если индуктивность не остается постоянной, следует написать

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c^2}\left(L\ \frac{dI}{dt}\ + I\ \frac{dL}{dt}\right). \tag{7.66}$$

Из (7.63) и (7.65) вытекает, что индуктивность тороида или длинного соленоида равна

$$L = \mu \frac{4\pi N^2}{l} S. \tag{7.67}$$

Любая из формул, в которую входит индуктивность, может быть использована для определения ее размерности и единицы:

$$[L] = \mathrm{L}. \tag{7.67a}$$

Единицу индуктивности можно определить как индуктивность такого контура, который сцеплен с потоком в один максвелл, при протекании по нему тока, равного c единиц. Согласно другому определению единицей индуктивности является индуктивность такого контура, в котором возникает ЭДС индукции, равная единице, при изменении тока в контуре на c^2 единиц в секунду. В соответствии с размерностью иногда указанную единицу индуктивности называют сантиметром индуктивности.

Если мы имеем два контура, более или менее близко расположенных друг относительно друга, то при протекании тока по одному из контуров часть потока или весь поток оказывается сцепленным со вторым контуром. Изменение тока в первом из контуров вызывает возникновение ЭДС индукции во втором контуре. Потокосцепление в одном контуре в зависимости от тока в другом имеет вид, аналогичный (7.64):

$$\Psi_2 = \frac{1}{c} M I_1, \tag{7.68}$$

где M, в отличие от L, называется взаимной индуктивностью. При протекании тока во втором контуре потокосцепление в первом выражается соответственно формулой

$$\Psi_1 = \frac{1}{c} M I_2, \tag{7.69}$$

причем взаимная индуктивность в обоих случаях одна и та же. Из сказанного ясно, что физический смысл индуктивности и взаимной индуктивности один и тот же и соответственно одни и те же размерности и единицы.

Намагниченность (интенсивность намагничивания). При помещении какого-либо тела в магнитное поле каждый элемент объема этого тела приобретает магнитный

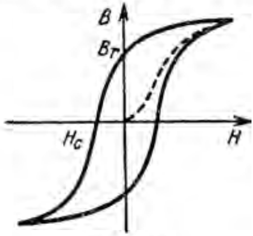


Рис. 28

момент. Если тело обладает ферромагнитными свойствами, то намагниченность может остаться и после устранения внешнего источника магнитного поля. Магнитный момент, приходящийся на единицу объема, измеряет намагниченность (или интенсивность намагничивания):

$$J = p_{\text{м}}/V. \qquad (7.70)$$

Ее размерность находится из (7.57 а) и размерности объема:

$$[J] = \mathrm{L}^{-1/2}\,\mathrm{M}^{1/2}\,\mathrm{T}^{-1}. \qquad (7.70\,\text{а})$$

Магнитные свойства вещества характеризуются магнитной проницаемостью, которая определена выше и является по самому определению безразмерной величиной. Для описания гистерезисных свойств ферромагнитных материалов служит *остаточная индукция* B_r и *коэрцитивная сила* H_c, смысл которых ясен из рис. 28. Измеряются они, разумеется, в гауссах (B_r) и эрстедах (H_c).

С магнитной проницаемостью связана другая характеристика магнитных свойств вещества – *магнитная восприимчивость*, которая определяется как отношение намагниченности к напряженности магнитного поля:

$$\chi_{\text{м}} = J/H. \tag{7.71}$$

Легко убедиться, что $\chi_{\text{м}}$ – величина безразмерная. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость связаны соотношением

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_{\text{м}}. \tag{7.72}$$

§ 7.4. Электрические и магнитные единицы СИ

Ранее (§ 1.6, 7.2) было показано, что построение системы единиц, в которую входили бы практические единицы силы тока, потенциала, заряда, работы, мощности и т.д., возможно благодаря введению еще какой-либо одной основной единицы. При разработке такой системы, которую назвали "абсолютной системой практических единиц", предполагалось вначале в качестве такой основной единицы установить единицу магнитной проницаемости. Тем самым в размерностях должен был появиться четвертый элемент – размерность магнитной проницаемости, для которой ввели символ μ_0. В этой системе, обозначавшейся МКСМ, размерности всех единиц включали в себя соответственно размерности длины (L), массы (М), времени (Т) и магнитной проницаемости (μ_0).

Включение четвертого элемента в размерности не было новшеством, поскольку ранее в рамках СГС (СГСЭ и СГСМ) иногда также вводился четвертый элемент: ϵ_0 в СГСЭ и μ_0 в СГСМ. Соответственно эти системы обозначались СГСϵ_0 и СГСμ_0. Легко видеть, что по существу эти системы ничем, кроме записи размерности, не отличались от СГСЭ и СГСМ. Очевидно, что размерности в МКСМ полностью совпадали с размерностями в СГСμ_0.

В приложении VII, в котором собраны единицы всех наиболее употребительных электрических и магнитных величин в разных системах, даны также размерности соответствующих единиц, причем для СГС эти размерности представлены в трех видах: СГСϵ_0, СГС (гауссовой) и СГСμ_0. Размерности в СГСЭ и СГСМ могут быть получены из первой и из третьей, если опустить символы ϵ_0 и соответственно μ_0.

При установлении Международной системы единиц, как мы знаем, в качестве четвертой основной единицы была выбрана единица силы тока ампер. Соответственно четвертым элементом в размерностях является символ размерности силы тока I. Поэтому размерности в СИ имеют другой вид, чем в МКСМ. Различие между обеими системами только в этом и заключается, поскольку все единицы в них одни и те же. Что касается перевода размерностей из одной системы в другую, то он без труда может быть произведен путем замены в соответствующих формулах основной единицы данной системы ее выражением в другой. Для иллюстрации ниже приведена размерность единицы силы тока (являющейся в СИ основной) в МКСМ:

$$\mathrm{I} = [\mathrm{I}] = \mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}\mu_0^{-1/2}. \tag{7.73}$$

Если во всех последующих размерностях единиц СИ заменить I приведенным в (7.73) выражением, то получатся размерности в МКСМ.

Связь между ампером и единицей силы тока СГС можно установить следующим образом. Два параллельных тока силой 1 А каждый действуют друг на друга с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый отрезок, равный расстоянию между проводниками. Записанная в СГС, эта сила взаимодействия имеет вид

$$F = \frac{1}{c^2}\frac{2I_1I_2l}{a}. \tag{7.74}$$

Подставляя $I_1 = I_2$ и $l = a$ и выражая силу взаимодействия в динах (1 дин = 10^{-5} Н) при $I_1 = I_2 = 1$ А, получим

$$2 \cdot 10^{-2} \text{ дин} = \frac{1}{c^2} \cdot 2 \cdot (1 \text{ А})^2.$$

Отсюда 1 А = $0{,}1c$ СГС. Следовательно, приближенно,

$$1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГС}.$$

Электрический заряд. Единица заряда – кулон (Кл) определяется, согласно формуле (7.2), как количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в одну секунду при постоянном токе силой в один ампер.

Размерность заряда в СИ

$$[Q] = \mathrm{TI}. \tag{7.2 б}$$

Связь между кулоном и СГС-единицей заряда, очевидно, та же, что и между соответствующими единицами силы тока.

Укажем, что для измерения электрического заряда аккумуляторов (неудачное, но весьма распространенное название "емкость аккумуляторов") применяется единица ампер-час: 1 А · ч = 3600 Кл.

Электрический потенциал. Воспользуемся формулой мощности тока

$$P = UI. \tag{7.75}$$

Размерность

$$[U] = \mathrm{L^2MT^{-3}I^{-1}}. \tag{7.75 а}$$

Согласно (7.75) единица разности потенциалов вольт определяется как разность потенциалов на концах проводника, в котором при протекании постоянного тока силой один ампер выделяется мощность один ватт. Подставляя в (7.75) мощность 1 Вт = 10^7 эрг/с и 1 А = = $0{,}1c$ СГС, получим соотношение между единицами электрического напряжения СИ и СГС:

$$1\ \text{В} = \frac{10^7}{0{,}1\,c} \approx \frac{1}{300}\ \text{СГС}.$$

В электротехнике для измерения полной мощности электрической цепи, определяемой произведением действующих значений напряжения и силы тока $U_{эф}$, $I_{эф}$, не применяют единицу мощности ватт (которой измеряется только активная составляющая мощности), а пользуются единицей вольт-ампер (В · А). Для измерения реактивной мощности применяют единицу вар, которую определяют как реактивную мощность цепи с синусоидальным переменным током при действующих значениях напряжения 1 В и тока 1 А, если сдвиг фазы между током и напряжением $\pi/2$.

Напряженность электрического поля. Единица напряженности поля может быть определена либо из формулы (7.40), либо из выражения для напряженности поля точечного заряда, либо, наконец, из связи между напряженностью поля и потенциалом:

$$E = -\operatorname{grad} U. \tag{7.76}$$

Любое из определений дает для единицы напряженности поля размерность

$$[E] = \mathrm{LMT^{-3}I^{-1}}. \tag{7.76а}$$

Эту единицу можно назвать либо ньютон на кулон (Н/Кл), либо вольт на метр (В/м). Общепринятым является второе наименование. Широко применяются внесистемные единицы вольт на сантиметр (В/см), киловольт на сантиметр (кВ/см). Соотношение между единицами напряженности электрического поля СИ и СГС:

$$1\ \text{В/м} \approx \frac{1}{300 \cdot 100} = \frac{1}{3 \cdot 10^4}\ \text{СГС}.$$

Электрическое смещение. Электрическое смещение D по-разному определяется в СГС и СИ. В § 7.3. мы видели, что в СГС связь между D и E имеет вид $E = D/\epsilon$, и, следовательно, размерности обеих величин совпадают. Иначе обстоит дело в СИ. Здесь E и D связаны соотношением

$$E = D/\epsilon_0 \epsilon, \tag{7.77}$$

и соответственно (см. (7.76 а) и (7.24 а))

$$[D] = [E]\,[\epsilon_0] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{TI}. \tag{7.77 а}$$

Разная размерность двух величин в рамках одной и той же системы единиц предполагает наличие различного физического смысла этих величин. Напомним, что, вообще говоря, разные величины могут иметь одинаковые размерности в пределах как одной, так и разных систем.

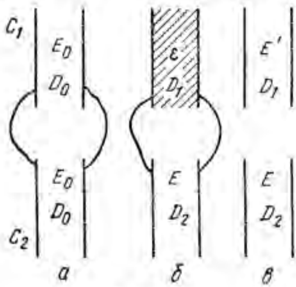


Рис. 29

Разные размерности у величин одной физической природы возможны лишь в разных системах. Поэтому физические определения величины D в СГС и СИ должны иметь различный характер, поскольку размерности D и E в СГС совпадают, а в СИ различны.

Мы рассмотрим эти определения на следующем примере (рис. 29). Представим себе два одинаковых плоских конденсатора C_1 и C_2, соединенных параллельно, заряженных и отключенных от источника напряжения (рис. 29,*а*). Напряженности поля в обоих конденсаторах будут, разумеется, одинаковы, и одинаковы будут смещения. Запомним пространство между пластинами одного из конденсаторов диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис. 29,*б*). (Для дальнейшего рассуждения удобно, чтобы этот диэлектрик был жидким.) Разность потенциалов между пластинами конденсаторов при этом уменьшится, но останется одинаковой для обоих конденсаторов, поскольку они соединены вместе. Одинаковой будет поэтому и напряженность поля в обоих конденсаторах. Однако заряды на обкладках конденсаторов теперь будут различными и соответственно будут различными и значения смещения D. Пусть до введения диэлектрика напряженности поля в них были E_0, а смещения – D_0. После введения диэлектрика напряженность поля станет E. Смещения в конденсаторах станут $D_1 = \epsilon E$ и $D_2 = E$ в СГС и $D_1 = \epsilon_0 \epsilon E$ и $D_2 = \epsilon_0 E$ в СИ.

Если теперь отсоединить конденсаторы друг от друга, а затем удалить из конденсатора C_1 диэлектрик, то напряженность поля в нем возрастает в ϵ раз (рис. 29,*в*), а смещение не изменится. Если новую напряженность в этом конденсаторе обозначить E', то можно написать

$$E' = D_1 \text{ (СГС)}, \tag{7.78}$$

$$E' = D_1/\epsilon_0 \text{ (СИ)}. \tag{7.79}$$

Напряженность поля E в конденсаторе C_1 до удаления диэлектрика можно было считать складывающейся из напряженностей двух полей – поля заряда на пластинах (которое, очевидно, равно E') и поля связанных зарядов диэлектрика. После удаления диэлектрика остается только поле свободных зарядов на пластинах конденсатора.

Будем рассматривать оба конденсатора до разъединения как одну электростатическую систему. Мы можем теперь в рамках СГС определить смещение как напряженность поля свободных зарядов (т.е. без учета поля связанных зарядов на проводниках, которое обусловлено присутствием диэлектрика). Действительно, согласно (7.78) смещение представляет собой поле смещенных зарядов, перераспределение которых между конденсаторами было вызвано введением диэлектрика в конденсатор.

Для определения смещения D в СИ поместим внутрь диэлектрика так называемые листочки Ми – два малых размеров плоских весьма тонких проводника, сложенных вначале вместе. На эти листочки наведется заряд, плотность которого будет зависеть от значения D в данной точке и от ориентации листочков. Максимальная плотность заряда будет, очевидно, в том случае, когда плоскости листочков перпендикулярны направлению вектора $\boldsymbol{D}$. В рассматриваемом случае плоскости листочков будут параллельны пластинам конденсатора, а плотность наведенного заряда будет равна плотности заряда на пластинах, поскольку при рационализованной форме записи уравнения смещение в плоском конденсаторе равно плотности заряда на его пластинах:

$$D = \sigma. \tag{7.80}$$

Заряд, наведенный на листочках Ми, может быть измерен, если их слегка развести, а затем удалить из диэлектрика. В общем случае неоднородного поля плотность этого заряда, конечно, не будет равна плотности заряда на проводниках, однако, независимо от распределения поля, будет равна D. Таким образом, в СИ смещение можно определить как максимальную плотность заряда, наведенного на листочках Ми в данной точке поля. То, что плотность наведенного заряда зависит от ориентации листочков Ми (для чего и требуется указание на максимальную плотность), отражает векторный характер смещения $\boldsymbol{D}$.

Различный характер определения электрического смещения D создает ряд неудобств при изложении курса физики и смежных дисциплин. Против такого разделения понятий возражали многие ученые. Не останавливаясь на приводимой ими серьезной аргументации, укажем лишь, что однородность величин E и D могла бы быть осуществлена и в СИ, если бы сохранялась связь между E и D в форме $D = \epsilon E$, а коэффициент ϵ_0 вводился в выражения для вычисления D по данному распределению зарядов. Так, например, для точечного заряда вместо $D = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{r^2}$ следовало бы писать $D = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$.

Единицу электрического смещения в СИ и ее связь с единицей СГС можно получить, используя любое выражение для D, например (7.80). Согласно этой формуле единицей электрического смещения является смещение в плоском конденсаторе при плотности заряда на пластинах один кулон на квадратный метр (Кл/м^2). В СГС при этом

$D = 12\pi \cdot 10^5$ СГС.

При пересчете мы использовали единицу поверхностной плотности заряда в СИ кулон на квадратный метр:

1 Кл/м^2 = 3 $\cdot$ 10^5 СГС.

Поток электрического смещения. Эта величина, определяемая произведением смещения на площадь и на косинус угла между направлением вектора $\boldsymbol{D}$ и нормалью к площади (рис. 27), имеет размерность, совпадающую с размерностью заряда:

$$[\Psi_D] = \mathrm{TI}. \qquad (7.81)$$

Соответственно совпадают и их единицы.

Диэлектрическая проницаемость определяется так же, как и в СГС. Здесь, однако, необходимо сделать следующее замечание. В электротехнической литературе диэлектрическую проницаемость ϵ иногда называют *относительной диэлектрической проницаемостью* и, кроме того, пользуются понятием *абсолютной диэлектрической* *проницаемости* ϵ_a, которую определяют выражением

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon. \qquad (7.82)$$

Размерность абсолютной диэлектрической проницаемости, разумеется совпадает с размерностью электрической постоянной ϵ_0, и ее единица также обозначается Ф/м:

$$[\epsilon_a] = L^{-3} M^{-1} T^4 I^2. \qquad (7.82\,а)$$

Электрический момент диполя. Формула (7.4)

$$p_э = Ql$$

определяет размерность электрического момента диполя

$$[p_э] = LTI \qquad (7.83)$$

и единицу кулон-метр (Кл · м). При этом

$$1 \text{ Кл} \cdot \text{м} = 3 \cdot 10^{11} \text{ СГС}.$$

Поляризованность (интенсивность поляризации) – электрический момент единицы объема поляризованного диэлектрика:

$$P = p_э/V. \qquad (7.84)$$

Размерность

$$[P] = L^{-2} TI, \qquad (7.84\,а)$$

и единица – кулон на квадратный метр (Кл/м^2). Соотношение между единицами поляризованности СИ и СГС

$$1 \text{ Кл/м}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ СГС}.$$

Диэлектрическая восприимчивость. В стандартах СЭВ и СССР определения диэлектрической восприимчивости и ее единицы отсутствуют. В литературе встречаются два различных способа определения диэлектрической восприимчивости в зависимости от того, как устанавливается связь между поляризованностью и напряженностью поля. Если ее записывать в СИ в той же форме, что и в СГС (см. (7.44)):

$$\chi_э = P/E, \tag{7.85}$$

то связь между ϵ и $\chi_э$ определится из следующих соотношений:

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \chi_э E = \epsilon_0 \epsilon E, \tag{7.86}$$

и, следовательно,

$$\epsilon_0(\epsilon - 1) = \chi_э, \tag{7.87}$$

или

$$\epsilon = 1 + \chi_э/\epsilon_0. \tag{7.88}$$

Так как отношение $\chi_э/\epsilon_0$ не имеет размерности, то размерность $\chi_э$ совпадает с размерностью электрической постоянной ϵ_0, и ее единицу также принято обозначать Ф/м (фарад на метр).

Сопоставляя выражение (7.88) с аналогичным выражением (7.45) в СГС

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_э,$$

найдем, что

$$1\ \text{Ф/м} = 9 \cdot 10^9\ \text{СГС}.$$

В ряде книг вместо (7.44) пишут

$$\chi_э = P/\epsilon_0 E, \tag{7.89}$$

откуда очевидно, что связь между ϵ и $\chi_э$ приобретает вид

$$\epsilon = 1 + \chi_э, \tag{7.90}$$

и, следовательно, $\chi_э$ оказывается величиной безразмерной. Именно такое определение $\chi_э$ рекомендует ИСО (Международная организация стандартизации).

Электрическая емкость. Так как

$$C = Q/U, \tag{7.91}$$

размерность электрической емкости (см. (7.2 б) и (7.75 а))

$$[C] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{4}\mathrm{I}^{2}. \tag{7.91 а}$$

Единица емкости фарад (Ф) – емкость такого проводника, потенциал которого увеличивается на один вольт при сообщении ему заряда в один кулон. Соотношение между единицами СИ и СГС:

$$1\ \Phi = \frac{0{,}1\ c}{1/300} = 30\ c = 9 \cdot 10^{11}\ \text{СГС}.$$

На практике обычно пользуются дольными единицами – микрофарадом (мкФ) и пикофарадом (пФ).

Плотность электрического тока. Единицей плотности тока является такая плотность тока, при которой через каждый квадратный метр поперечного сечения проводника протекает ток один ампер. По определению размерность

$$[j] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{I}.$$

Соотношение между единицами СИ и СГС

$$1\ \text{А/м}^2 = 3 \cdot 10^5\ \text{СГС}.$$

Электрическое сопротивление. Закон Ома определяет размерность электрического сопротивления (см. (7.75 а)):

$$[R] = \mathrm{L}^{2}\mathrm{M}\mathrm{T}^{-3}\mathrm{I}^{-2}. \tag{7.92 а}$$

Единица сопротивления ом (Ом) – сопротивление проводника, между концами которого возникает напряжение один вольт при силе постоянного тока один ампер. Легко получить, что

$$1\ \text{Ом} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}\ \text{СГС}.$$

Наиболее часто употребляют кратные единицы: килоом (кОм) и мегаом (МОм). Последнюю на "техническом жаргоне" называют мегом.

Заметим, что произведение RC имеет в обеих системах размерность времени. В контуре, содержащем емкость и сопротивление, произведение RC характеризует постоянную времени затухания разряда.

Электрическая проводимость. Размерность проводимости, очевидно, обратна размерности сопротивления:

$$[G] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{3}\mathrm{I}^{2}. \tag{7.93 a}$$

Единицей проводимости, величины, обратной сопротивлению, является проводимость проводника, сопротивление которого равно одному ому. Эта единица называется сименс (См). В литературе иногда применяется название мо, а также обозначение Ом^{-1}, которые не рекомендуются.

Удельное электрическое сопротивление. Размерность удельного электрического сопротивления вытекает из (7.50) и (7.92 а):

$$[\rho] = \mathrm{L}^{3}\mathrm{M}\mathrm{T}^{-3}\mathrm{I}^{-2}, \tag{7.94 a}$$

единица – ом-метр (Ом · м). Связь между единицами СИ и СГС:

$$1\ \text{Ом}\cdot\text{м} = \frac{1}{9\cdot 10^{9}}\ \text{СГС}.$$

Удельная электрическая проводимость. Величина, обратная удельному сопротивлению, – удельная электрическая проводимость.

Размерность удельной электрической проводимости в СИ

$$[\sigma] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{3}\mathrm{I}^{2}.$$

Эта величина измеряется единицей, которую можно назвать сименс на метр (См/м).

Магнитная индукция. Единица магнитной индукции тесла (Тл) – индукция такого поля, в котором каждый метр проводника с током один ампер, расположенного перпендикулярно направлению вектора индукции, испытывает силу один ньютон. Из этого определения вытекает размерность индукции

$$[B] = \mathrm{MT^{-2}I^{-1}} \tag{7.95 а}$$

Подставляя в выражение для индукции, связанное с этим определением, но записанное в СГС, указанные единицы, получим

$$B = \frac{F_{\text{м}} c}{l I} = \frac{10^5 \text{ дин} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}}{100 \text{ см} \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ СГС}} = 10^4 \text{ Гс}.$$

Таким образом,

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}.$$

Магнитный поток. Единица магнитного потока вебер (Вб) определяется как поток при индукции одна тесла через площадку один квадратный метр, расположенную перпендикулярно направлению индукции. Из этого определения вытекают размерность

$$[\Phi] = \mathrm{L^2MT^{-2}I^{-1}} \tag{7.96 а}$$

и соотношение между единицами СИ и СГС

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ Гс} \cdot 10^4 \text{ см}^2 = 10^8 \text{ Мкс}.$$

Напряженность магнитного поля. Для определения единицы напряженности магнитного поля удобно воспользоваться любым из следствий закона Био, Савара и Лапласа, дающих выражение напряженности магнитного поля тока для конкретных контуров. Возьмем для этой цели формулу напряженности магнитного поля в центре кругового тока

$$H = I/2R. \tag{7.97}$$

Размерность напряженности магнитного поля

$$[H] = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{I}. \tag{7.97 а}$$

Согласно (7.97) напряженность поля будет равняться единице, если по кольцу радиусом один метр будет протекать ток силой два ампера или, что, разумеется, то же, ток силой один ампер – по кольцу радиусом 0,5 м. Специального наименования эта единица не имеет. Согласно размерности в СИ ее называют ампер на метр (А/м). Имеется предположение назвать эту единицу ленц (в честь Э.Х. Ленца). Для установления связи между единицами ампер на метр и эрстед перепишем уравнение (7.97) в СГС:

$$H = \frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R}, \tag{7.98}$$

и подставим соответствующие значения, переведя их в единицы СГС:

$$1\ \text{А/м} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{9}\ \text{СГС}}{3 \cdot 10^{10}\ \text{см/с} \cdot 100\ \text{см}} =$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-3}\ \text{Э} \approx 1{,}26 \cdot 10^{-2}\ \text{Э}.$$

При измерениях магнитного поля Земли, небесных тел и межпланетного пространства применялась единица напряженности магнитного поля гамма (γ): $1\gamma = 10^{-5}$ Э. Соответственно 1 А/м $= 1{,}26 \cdot 10^{3}\,\gamma$.

Уместно здесь отметить, что, в то время как в СГС размерности величин B и H совпадают, в СИ они оказываются различными. Подобную ситуацию мы имели и в электростатике при рассмотрении величин E и D. Возражения, которые приводились против неоднородности величин E и D, имеющей место в рамках СИ, в равной мере относятся и к величинам B и H. Устранить эту неоднородность можно было бы без труда, если бы магнитную постоянную μ_0 ввели в уравнения для напряженности магнитного поля. В этом случае закон Био, Савара и Лапласа для напряженности поля имел бы вид

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I dl \sin\varphi}{r^2}$$

и связь между B и H была бы такой же, как и в СГС, т.е.

$$B = \mu H.$$

Магнитный момент. Единицу магнитного момента можно определить двояким образом, используя либо выражение для механического момента, испытываемого контуром с током в магнитном поле, либо непосредственное выражение для магнитного момента контура. Согласно первому определению единицей магнитного момента является момент контура, который в поле с индукцией один тесла испытывает максимальный вращающий момент, равный одному ньютон-метру, а согласно второму – момент плоского контура с площадью один квадратный метр, обтекаемого током один ампер.

Оба определения приводят к одной и той же размерности

$$[p_{\text{м}}] = \mathrm{L}^2\mathrm{I}. \qquad (7.99\text{ a})$$

Единица магнитного момента не имеет специального наименования и называется ампер-квадратный метр ($\text{А} \cdot \text{м}^2$). Записав равнозначное ей обозначение $\text{Н} \cdot \text{м}/\text{Тл}$ (ньютон-метр на тесла), легко получить связь между единицами СИ и СГС:

$$1\ \text{А} \cdot \text{м}^2 = 1\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Тл}} = \frac{10^5\ \text{дин} \cdot 10^2\ \text{см}}{10^4\ \text{Гс}} = 10^3 \frac{\text{дин} \cdot \text{см}}{\text{Гс}}.$$

Магнитодвижущая сила. Циркуляция напряженности магнитного поля записывается в СИ в виде

$$\mathscr{F} = \frac{1}{4\pi} \oint H dl \cos(\widehat{H, dl}) = \Sigma I. \qquad (7.100)$$

Единицей магнитодвижущей силы является циркуляция напряженности магнитного поля при однократном обходе тока силой один ампер. Размерность магнитодвижущей силы совпадает с размерностью силы тока, и единица ее также называется ампер. Поскольку при расчете магнитных цепей полная магнитодвижущая сила равна силе тока в каждом проводнике, умноженной на число витков, часто выражают магнитодвижущую силу в ампер-витках (А · в). Связь между единицами СИ и СГС:

$$1\ \text{А} = \frac{4\pi}{3 \cdot 10^{10}\ \text{см/с}} \cdot 3 \cdot 10^9\ \text{СГС} = 1{,}26\ \text{Гб}.$$

Магнитное сопротивление. Единица магнитного сопротивления определяется из закона магнитной цепи (7.59) как магнитное сопротивление магнитопровода, в котором магнитодвижущая сила один ампер создает поток один вебер. Формула (7.96 а) определяет размерность.

$$[R_{\text{м}}] = \text{L}^{-2}\text{M}^{-1}\text{T}^{2}\text{I}^{2}. \qquad (7.101\ \text{а})$$

Соотношение между единицами СИ и СГС

$$1\ \text{Гн}^{-1} = \frac{1{,}26\ \text{Гб}}{10^8\ \text{Мкс}} = 1{,}26 \cdot 10^{-8}\ \text{Гб/Мкс}.$$

Индуктивность и взаимная индуктивность. Для определения единицы и размерности индуктивности можно воспользоваться либо выражением для связи тока в контуре сцепленного с ним потока

$$\Psi = LI, \qquad (7.102)$$

либо выражением для электродвижущей силы самоиндукции

$$\mathcal{E}_{si} = -L\,dI/dt. \qquad (7.103)$$

Уравнение (7.103) написано в предположении постоянства индуктивности. Согласно (7.102) единица индуктивности генри (Гн) определяется как индуктивность такого контура, который при протекании по нему тока один ампер оказывается сцепленным с потоком один вебер. Согласно (7.103) генри есть индуктивность такого контура, в котором возникает ЭДС самоиндукции, равная одному вольту при равномерном изменении протекающего по нему тока на один ампер в секунду.

Оба определения дают размерность

$$[L] = \mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}\mathrm{I}^{-2} = 1/[R_{\text{м}}]. \tag{7.104 a}$$

Сопоставление с формулами (7.64) и (7.65), записанными в СГС, легко дает соотношение

$$1\ \text{Гн} = 10^9\ \text{СГС}.$$

Этими же единицами измеряется, разумеется, и взаимная индуктивность контуров.

Намагниченность (интенсивность намагничивания). Согласно формуле (7.70) единицей намагниченности будет такая намагниченность, при которой каждый кубический метр обладает магнитным моментом один ампер-квадратный метр. Название этой единицы ампер на метр (А/м) совпадает с названием единицы напряженности магнитного поля. Точно так же совпадает и размерность

$$[\,J\,] = \mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{I}. \tag{7.105}$$

Переписав (7.70) с учетом (7.55) в виде

$$J = \frac{1}{c}\,\frac{IS}{V}, \tag{7.105 a}$$

можно легко сопоставить единицу намагниченности СИ ампер на метр с единицей СГС:

$$1\ \text{А/м} = \frac{3\cdot 10^9\ \text{СГС}\cdot 10^4\ \text{см}^2}{3\cdot 10^{10}\ \text{см/с}\cdot 10^6\ \text{см}^3} = 10^{-3}\ \text{СГС}.$$

Полезно здесь обратить внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на то что единицы напряженности магнитного поля и намагниченности совпадают по размерности и даже одинаково обозначаются, соотношение между этими единицами и соответствующими единицами СГС различно, что связано с тем, что в одном случае (напряженность поля) уравнения в рационализованной и нерационализованной форме имеют различный вид, а в другом – совпадают. Данный пример еще раз демонстрирует отмеченное ранее обстоятельство, что сложное наименование производной единицы ничего не может сказать о ее фактическом размере, если не указано то конкретное определяющее уравнение, с помощью которого данная единица была установлена.

Магнитные свойства вещества – магнитная проницаемость, остаточная индукция и коэрцитивная сила – не нуждаются в специальном разъяснении. Заметим лишь, что в электротехнической литературе, подобно тому как это делается в отношении диэлектрической проницаемости, безразмерная магнитная проницаемость μ часто называется *относительной магнитной проницаемостью*, а произведение

$$\mu_0 \mu = \mu_а \tag{7.106}$$

называется *абсолютной магнитной проницаемостью.*

Уравнение (7.71) определяет *магнитную восприимчивость* и в СИ. Поскольку J и H имеют одинаковую размерность, то $\chi_м$, так же как и в СГС, является величиной безразмерной. Однако рационализованная форма уравнения приводит к связи между μ и $\chi_м$ в виде

$$\mu = 1 + \chi_м. \tag{7.107}$$

Вследствие этого единица магнитной восприимчивости СИ в 4π раз меньше соответствующей единицы СГС.

§ 7.5. О так называемом "волновом сопротивлении вакуума"

В § 7.4 на примере единиц напряженности магнитного поля и намагниченности, размерность и обозначение которых совпадают, было проиллюстрировано высказанное раньше положение об отсутствии однозначной связи между размерностью единицы и ее конкретным размером. Особенно наглядной иллюстрацией этого положения может служить рассмотрение единиц и числовых значений комбинированной константы, получившей название волнового или характеристического сопротивления вакуума.

При распространении электромагнитной волны в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ амплитудные и мгновенные значения напряженности электрического поля и напряженности магнитного поля связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \qquad (7.108)$$

Это выражение можно представить в виде

$$E/H = \sqrt{\mu_0 \mu / \epsilon_0 \epsilon}. \qquad (7.109)$$

Отношение E/H принято называть волновым сопротивлением среды, поскольку существует формальная аналогия между уравнением (7.109) и законом Ома. В случае вакуума

$$R_x = E/H = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}. \qquad (7.110)$$

Эту величину обычно и называют волновым или характеристическим сопротивлением вакуума.

Рассмотрим значение R_x в разных системах единиц. В СГС, где величины $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ не имеют размерностей, $R_x = 1$ и также является безразмерной величиной. Напомним, что в этой системе размерность сопротивления (см. (7.47 а) будет $L^{-1}T$. В СГСЭ $\epsilon_0 = 1$, а $\mu_0 = 1/c^2$.

В этой системе $R_x = 1/c$ и его размерность совпадает с размерностью сопротивления. В СГСМ $\mu_0 = 1$ и $\epsilon_0 = 1/c^2$. Соответственно $R_x = c$. Размерность R_x совпадает с размерностью сопротивления и в этой системе.

Рассмотрим, наконец, значение R_x в СИ. Подставляя в (7.108) значения (§ 7.2)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \text{ Ф/м},$$

найдем

$$R_x = 120\pi \cdot (\text{Гн/Ф})^{1/2}. \tag{7.111}$$

Заменяя Гн/м на В·с/(А·м) и Ф/м на А·с/(В·м), можно написать

$$R_x = 120\pi \text{ В/А}.$$

Поскольку отношение "вольт/ампер" определяет единицу сопротивления ом, то принято считать, что "волновое сопротивление вакуума" составляет $120\pi = 377$ Ом.

Если, однако, воспользоваться МКСМ в нерационализованном виде, в которой основные единицы те же, что и в СИ, и единица сопротивления ом определяется так же, как вольт на ампер (поскольку независимо от формы записи уравнений закон Ома имеет одинаковый вид), то, учитывая, что в этом случае

$$\mu_0 = 10^{-7} \text{ Гн/м}, \qquad \epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м},$$

найдем

$$R_x = 30 \text{ В/А},$$

т.е. 30 Ом.

Противоречие между значениями R_x, определенными различными способами, именно тем и объясняется, что наименование сложной единицы отнюдь не является определением самой этой единицы. В частности, в рассмотренном случае наименование "вольт на ампер", полученное в результате соответствующего преобразования единиц или как отношение единиц напряженности электрического и магнитного полей (В/м и А/м), нельзя трактовать как наименование единицы сопротивления. Поэтому само понятие "волновое сопротивление вакуума" представляется лишенным физического смысла, хотя в некоторых случаях расчета и может оказаться удобным обозначение одним символом выражения $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Заметим здесь же, что если связать вместо векторов E и H векторы E и B *), то вместо (7.108) мы будем иметь

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon}\, E = B/\sqrt{\mu_0 \mu}, \tag{7.112}$$

или

$$E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} B. \tag{7.113}$$

Это выражение, как легко убедиться, не изменяется при изменении единиц.

§ 7.6. Международные единицы

Как мы уже указывали, практические единицы, которые легли в основу СИ, вначале не образовывали единой системы, а составляли изолированную группу единиц, связанных между собой несколькими соотношениями. Введение этих единиц сыграло существенную роль в развитии техники электрических и магнитных измерений, вследствие чего вскоре после своего возникновения прак-

---

*) Полезно отметить, что связь векторов E и B или соответственно D и H является более логичной с точки зрения уравнений Максвелла.

тическая система приобрела международный характер. Была проделана большая работа по установлению эталонов практических единиц сопротивления, силы тока и разности потенциалов, причем вначале эти эталоны должны были служить для воспроизведения ома, ампера и вольта, определенных как 10^9, 0,1 и 10^8 соответствующих единиц СГСМ. В дальнейшем выяснилось, как это, впрочем, можно было предвидеть, что между установленными эталонами и их прообразами, основанными на СГСМ, имеются хотя и небольшие, но все же ощутимые расхождения. Тогда было решено, подобно тому как это было в свое время сделано с метром и килограммом, принять эталоны в качестве законных международных единиц электрических величин. Эти международные единицы были определены следующим образом:

международный ом – сопротивление при неизменяющемся электрическом токе и при температуре тающего льда ртутного столба длиной в 106,300 см, имеющего одинаковое по всей длине сечение при массе в 14,4521 г;

международный ампер – сила неизменяющегося электрического тока, отлагающего при прохождении через водный раствор азотнокислого серебра 0,0011800 г серебра в секунду;

международный вольт – электрическое напряжение и электродвижущая сила, которая в проводнике, имеющем сопротивление, равное одному международному ому, вызывает ток силой в один международный ампер;

международный ватт – мощность неизменяющегося электрического тока силой в один международный ампер при напряжении в один международный вольт.

Остальные международные единицы, как и международный вольт и ватт, определяются соответствующими основными международными единицами.

Значительно возросшая точность электрических и магнитных измерений позволила произвести обратный переход и, установив определенным образом точную формулировку одной из единиц (как мы уже знаем, ампера), построить систему единиц МКСМ, которая затем легла в основу принятой сейчас во многих странах Международной системы (СИ). Для отличия от приведенных выше международных единиц единицы МКСМ были названы "абсолютными" с целью подчеркнуть, что они построены по тому же принципу, что и единицы СГС. Чтобы в течение некоторого времени, пока имели применение международные единицы, была возможность переводить результаты измерений, произведенных с использованием этих единиц, в единицы МКСМ, были установлены следующие соотношения между теми и другими:

1 средн. межд. ампер = 0,99985 абс. ампера,
1 средн. межд. ом = 1,00049 абс. ома,
1 средн. межд. кулон = 0,99985 абс. кулона,
1 средн. межд. вольт = 1,00034 абс. вольта,
1 средн. межд. генри = 1,00049 абс. генри,
1 средн. межд. фарад = 0,99951 абс. фарада,
1 средн. межд. вебер = 1,00034 абс. вебера,
1 средн. межд. ватт = 1,00019 абс. ватта.

Появление определения "средний" ("средн.") вызвано тем, что при установлении соотношения между международными и абсолютными единицами оказалось, что между имеющимися в разных странах эталонами международных единиц существует небольшое расхождение, и для сравнения взяты средние значения эталонов. Заметим здесь же, что между международными единицами, которые были приняты в СССР, и средними международными единицами существовало соотношение:

1 межд. ом СССР = 1,00010 средн. межд. ома,
1 межд. вольт СССР = 1,0000075 средн. межд. вольта.

В настоящее время международные единицы полностью исключены из употребления и заменены единицами

СИ. Определение основной единицы этой системы ампера через механические единицы с фиксацией точного значения коэффициента μ_0 в определяющем соотношении позволило включить практические электрические и магнитные единицы в общую систему единиц физических величин.

Применение национальных и международных эталонов как эталонов единиц системы не утратило своего значения, так как высокая точность, с которой можно сравнивать между собой разные эталоны одной и той же единицы, оказывается весьма полезной для практики. Дело в том, что относительная погрешность при измерении силы тока с помощью токовых весов, по которым определяется ампер, не меньше $5 \cdot 10^{-6}$. В то же время эталоны электродвижущей силы и сопротивления позволяют производить то же измерение с точностью, на порядок большей. Здесь существенную роль сыграло открытие нового эффекта, теоретически предсказанного английским физиком Б. Джозефсоном в 1962 г. и затем доказанного экспериментально. Сущность эффекта Джозефсона состоит в том, что если приложить напряжение U к двум сверхпроводникам, между которыми существует неплотный контакт (например, пленка окисла толщиной около 10^{-9} м), то через этот контакт идет сверхпроводящий переменный ток, частота которого ν определяется формулой

$$\nu = \frac{2e}{h} U.$$

Здесь e – заряд электрона, h – постоянная Планка.

Так как измерения частоты обладают весьма высокой точностью, то соответственно с такой же точностью можно сравнивать электродвижущие силы разных элементов, являющихся эталонами напряжения. Производя взаимное сравнение эталонов, изготовленных в разных странах, установили "международный эталон вольта" и его соотношение с вольтом СИ. Взаимное сравнение национальных эталонов ома привело к установлению "международного эталона ома". В результате была определена связь "международного ампера" с ампером СИ.

Следует при этом иметь в виду, что взаимная точность отдельных эталонов выше, чем точность соотношения между любым из них или международным и СИ. Поэтому при точных измерениях пользуются международными эталонами, но для выражения окончательных результатов измерений и расчетов переводят эти результаты в единицы СИ с учетом соотношений между соответствующими эталонами (обозначаемыми МБ) и единицами СИ. Эти соотношения, установленные Международным бюро мер и весов, следующие:

1 ампер МБ = 1,0000007 А,
1 ом МБ = 0,99999947 Ом,
1 вольт МБ = 1,0000002 В.

Глава 8

ЕДИНИЦЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 8.1. Шкала электромагнитных волн

Область исследованных электромагнитных волн простирается почти без перерывов от волн длиной тысячи километров, излучаемых низкочастотными электрическими машинами, до коротковолнового γ-излучения радиоактивных элементов и космических лучей. Различные участки этого спектра обладают разными свойствами, по-разному распространяются, по-разному себя проявляют. Узкая полоса спектра, заключенная между длинами волн от 0,38 до 0,76 мкм, способна воздействовать на наш глаз; в определенных интервалах излучение способно вызывать химические реакции, фотоэффект, ионизацию газов. Наиболее длинноволновые излучения могут быть обнаружены с помощью электромагнитных колебательных контуров. Поэтому наряду с общими характеристиками излучения, в первую очередь энергетическими, имеют место специфические характеристики для отдельных областей спектра электромагнитных волн.

Измерение длин волн и соответствующих им частот производится обычными единицами длины и частоты, причем естественно, что в области длинных волн в качестве единиц длины применяются метр и сантиметр; световые и более короткие волны измеряются в микрометрах, нанометрах. Частоты обычно измеряют в герцах; для радиоволн применяются килогерцы и мегагерцы.

Помимо длин волн и частот, в спектрометрии пользуются *волновым числом* $\tilde{\nu}$, представляющим собой число волн, приходящихся на единицу длины. Очевидно,

$$\tilde{\nu} = 1/\lambda. \tag{8.1}$$

Часто волновое число определяется как

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\tilde{\nu}. \tag{8.2}$$

Размерность волнового числа

$$[k] = L^{-1}. \tag{8.2 a}$$

Единицами волнового числа являются $м^{-1}$, $см^{-1}$, $мкм^{-1}$ и т.д.

§ 8.2. Энергетические характеристики излучения

Величины, характеризующие энергетическую сторону излучения электромагнитных волн, измеряются общими энергетическими единицами, которыми измеряются энергия, объемная плотность энергии, поток энергии и т.п. В названии некоторых из этих величин отразилось то, что они явились расширением понятий, применяющихся в светотехнике, хотя они могут относиться к таким областям спектра, которые нашим глазом не воспринимаются. Энергетический характер соответствующих величин отмечается индексом "э" при обозначениях этих величин. Терминология энергетических величин не вполне установилась. Поэтому, наряду с обычно применяемыми названиями, мы в скобках приводим те, которыми предполагается их заменить, а также те, которые иногда встречаются в литературе.

Энергия излучения. Если излучение продолжается некоторое время, то источник при этом теряет, а среда, в которой поглощается излучение, приобретает энергию, которая в общем виде записывается как

$$W = \int_0^t \Phi_э dt.$$

Размерность и единицы измерения энергии излучения те же, что и любых других видов энергии.

Поток излучения (поток лучистой энергии, мощность излучения). Поток излучения $\Phi_э$ – отношение энергии излучения, проходящей в данном направлении, к промежутку времени, в течение которого энергия проходила. Как по физическому смыслу, так и по единицам и размерностям поток излучения совершенно аналогичен потоку энергии, рассмотренному в гл. 6. Напомним, что единицы и размерности потока энергии совпадают с единицами и размерностями мощности. Заметим лишь, что, наряду с единицами ватт и эрг в секунду, при измерении потока излучения раньше пользовались тепловыми единицами калория в секунду, килокалория в час.

Поверхностная плотность потока излучения. Поверхностная плотность потока излучения $d\Phi_э/dS$ представляет собой отношение потока излучения к площади поверхности, через которую он проходит. Здесь приходится различать несколько величин, хотя единицы и размерности их совпадают.

Интенсивность излучения S – плотность потока энергии излучения, если единичная площадь поверхности, сквозь которую проходит поток, расположена перпендикулярно направлению излучения. Интенсивность излучения электромагнитных волн определяется вектором Пойнтинга

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \qquad (\text{СИ}) \tag{8.3}$$

или

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \qquad (\text{СГС}). \tag{8.4}$$

Источник излучения характеризуется *энергетической светимостью* (излучательностью) $R_э$, т.е. полным потоком излучения с единицы поверхности источника. Применяются также названия "излучательная" или "лучеиспускательная способность источника".

Энергетическая освещенность (облученность) $E_э$ характеризуется плотностью потока излучения, падающего на данную поверхность. Как легко видеть, при одной и той же интенсивности излучения энергетическая освещенность может быть различной в зависимости от ориентации поверхности, на которую падает излучение. При данной интенсивности излучения энергетическая освещенность будет пропорциональна косинусу угла между направлением потока и направлением нормали к поверхности, на которую падает поток.

Размерности всех трех величин S, $R_э$ и $E_э$:

$$[S] = [R_э] = [E_э] = \mathrm{MT}^{-3}. \tag{8.4 а}$$

Единицы в системах СИ и СГС – соответственно ватт на квадратный метр (Вт/м^2) и эрг на секунду-квадратный сантиметр (эрг/(с·см^2)).

Энергетическая (*лучистая*) *экспозиция*. Эта величина характеризуется полной энергией излучения, падающей за некоторое время на единицу поверхности, и определяется выражением

$$H_э = \int_0^t E_э dt. \tag{8.5}$$

Размерность лучистой экспозиции

$$[H_э] = \mathrm{MT}^{-2}. \tag{8.5 а}$$

Очевидно, что единицы лучистой экспозиции в СИ и СГС – джоуль на квадратный метр (Дж/м^2) и эрг на квадратный сантиметр (эрг/см^2).

Кроме энергетической светимости, источник излучения характеризуется энергетической силой света (силой излучения) и энергетической яркостью (лучистостью).

Энергетическая сила света (сила излучения). Эта величина $J_э$, определяется как поток излучения источника, приходящийся на единицу телесного угла в данном направлении. Для одного и того же источника энергетическая сила света может быть различной в разных направлениях.

Размерность энергетической силы света совпадает с размерностью потока излучения, т.е. с размерностью мощности, поскольку в СИ и СГС у телесного угла нулевая размерность. В наименовании единиц энергетической силы света указывается единица телесного угла стерадиан. Соответственно в СИ и СГС: ватт на стерадиан (Вт/ср), эрг в секунду на стерадиан (эрг/(с·ср)).

Энергетическая яркость (лучистость). Эта величина представляет собой энергетическую силу света, приходящегося на единицу площади проекции поверхности источника на направление, перпендикулярное направлению распространения излучения. Согласно этому определению

$$B_э = dJ_э/dS'. \tag{8.6}$$

Здесь

$$dS' = dS\cos\alpha,$$

где dS – размер элемента площади поверхности источника, а α – угол между направлением излучения и направлением нормали к этой площади.

Если излучение источника света удовлетворяет закону Ламберта, согласно которому

$$J_э = J_{э0}\cos\alpha \tag{8.7}$$

(где $J_{э0}$ – энергетическая сила света в направлении, перпендикулярном поверхности источника), то энергетическая яркость источника одинакова во всех направлениях. Такие источники называются *ламбертовыми*.

Размерность энергетической яркости та же, что и поверхностной плотности потока излучения:

$$[B_э] = \mathrm{MT}^{-3}, \tag{8.6 а}$$

а единицы отличаются наличием наименования телесного угла: ватт на стерадиан-квадратный метр (Вт/(ср·м^2)), эрг в секунду на стерадиан-квадратный сантиметр (эрг/(с·ср·см^2)).

Объемная плотность энергии излучения u. Энергия излучения, приходящаяся на единицу объема, называется объемной плотностью энергии излучения. Объемная плотность энергии (§ 4.4) измеряется в СИ и СГС джоулем на кубический метр (Дж/м^3) и эргом на кубический сантиметр (эрг/см^3).

Особый интерес представляет объемная плотность энергии излучения, если это излучение сосредоточено в замкнутом объеме. В этом случае излучение подчиняется законам излучения абсолютно черного тела, в частности закону Стефана – Больцмана, согласно которому объемная плотность энергии излучения пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры. Если в оболочке, в которой заключено излучение, сделать малое (по сравнению с общей поверхностью) отверстие, то это отверстие будет абсолютно черным излучателем, энергетическая светимость которого связана с объемной плотностью энергии излучения соотношением

$$R_э = uc/4, \tag{8.8}$$

где c – скорость света в вакууме. По закону Стефана – Больцмана

$$R_э = \sigma T^4, \tag{8.9}$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана:

$$\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) =$$

$$= 5{,}670 \cdot 10^{-5}\ \text{эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4).$$

Наряду с перечисленными выше энергетическими характеристиками излучения, имеющими интегральный характер, т.е. не относящимися к определенному участку спектра излучения, важное значение имеют спектральные характеристики, представляющие, по существу, функции распределения данной величины по длине волны или по частоте.

Поскольку излучение всякого источника не является идеально монохроматическим, а так или иначе распределено по спектру, действие излучения может быть весьма разнообразным. В отдельных случаях мы используем особенности распределения данного источника, в других – преобразуем излучение одного спектрального состава в другой (как, например, ультрафиолетовое излучение – в видимое в люминесцентных лампах), наконец, иногда от определенной части излучения приходится защищаться и т.д.

В связи с тем что понятие функции распределения было достаточно подробно разобрано в § 4.5, здесь мы ограничимся лишь математическими выражениями соответствующих спектральных характеристик, размерностями и единицами.

Спектральная плотность потока излучения по длине волны

$$\Phi_{э\lambda} = d\Phi_э / d\lambda, \tag{8.10}$$

размерность

$$[\,\Phi_{э\lambda}\,] = \mathrm{LMT}^{-3}. \tag{8.10 a}$$

Единицы в системах СИ и СГС – ватт на метр (Вт/м), эрг в секунду на сантиметр (эрг/(с·см)). В спектроскопии обычно относят поток к интервалу длин волн, измеренному теми единицами, которые применяются в данной области спектра. Так, например, для видимой и примыкающих к ней областей спектра пользуются единицами Вт/нм, эрг/(с·нм).

Спектральная плотность потока излучения по частоте

$$\Phi_{э\nu} = d\Phi_э/d\nu, \tag{8.11}$$

размерность

$$[\Phi_{э\nu}] = L^2MT^{-2}. \tag{8.11 а}$$

Единицы в системах СИ и СГС джоуль (Дж) и эрг (эрг).

В дальнейшем мы не будем для спектральных плотностей (т.е. функций распределения) специально указывать, по длине или по частоте дается распределение, поскольку это ясно из математического определения.

Спектральная плотность величин, определяемых поверхностной плотностью потока излучения (*спектральная плотность интенсивности, энергетической светимости, энергетической освещенности*), равна

$$S_\lambda = dS/d\lambda,\ \ R_{э\lambda} = dR_э/d\lambda,\ \ E_{э\lambda} = dE_э/d\lambda, \tag{8.12}$$

$$S_\nu = dS/d\nu,\ \ R_{э\nu} = dR_э/d\nu,\ \ E_{э\nu} = dE_э/d\nu, \tag{8.13}$$

а их размерности

$$[S_\lambda] = [R_{э\lambda}] = [E_{э\lambda}] = L^{-1}MT^{-3}, \tag{8.12 а}$$

$$[S_\nu] = [R_{э\nu}] = [E_{э\nu}] = MT^{-2}. \tag{8.13 а}$$

Единицы S_λ, $R_{э\lambda}$, $E_{э\lambda}$ определяются размерностями:

ватт на кубический метр (Вт/м^3), эрг в секунду на кубический сантиметр (эрг/(с·см^3)). Единицы S_ν, $R_{э\nu}$, $E_{э\nu}$: джоуль на квадратный метр (Дж/м^2), эрг на квадратный сантиметр (эрг/см^2).

Размерность спектральной плотности энергетической силы света совпадает с размерностью спектральной плотности потока излучения. Что касается соответствующих единиц, то они отличаются тем, что в их наименованиях указывается отнесение к единице телесного угла, что отражается также и в их обозначениях.

Точно так же размерность спектральной плотности энергетической яркости совпадает с размерностью поверхностной плотности потока излучения (т.е. с размерностью интенсивности, энергетической светимости и энергетической освещенности), а единицы получаются из соответствующих единиц отнесением их к единице телесного угла.

Размерность спектральных плотностей объемной плотности энергии излучения

$$[u_\lambda] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{MT}^{-2}, \tag{8.14}$$

$$[u_\nu] = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{MT}^{-1}. \tag{8.15}$$

Как известно, для абсолютно черного тела u_λ и u_ν определяются формулой Планка:

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp(hc/\lambda k_{\text{Б}}T) - 1}, \tag{8.16}$$

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{\exp(h\nu/k_{\text{Б}}T) - 1}. \tag{8.17}$$

Здесь h – постоянная Планка, $k_{\text{Б}}$ – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура. Спектральные плотности энергетической светимости абсолютно черного тела могут быть получены из (8.16) и (8.17) умножением на $c/4$.

§ 8.3. Светотехнические единицы

Световые измерения имеют ту особенность, что в них очень большую роль играет непосредственное ощущение. Таким образом, световые измерения, строго говоря, не вполне объективны. Так как при световых измерениях нас интересует только та часть общего потока лучистой энергии, которая непосредственно воздействует на наш глаз, то обычные энергетические характеристики являются уже недостаточными. Действительно, из всей громадной области изученных электромагнитных колебаний лишь узкая полоса видимого спектра с длинами волн от 0,38 до 0,76 мкм является для нас "оптически ценной", или, как говорят, обладает достаточной видностью, т.е. может быть воспринята человеческим зрением.

Мы располагаем различными техническими средствами, которые позволяют обнаруживать и измерять излучение электромагнитных волн любого диапазона – от длинных, применяемых в радиотехнике, до кратчайших, регистрируемых счетчиками проникающих излучений, но, как бы ни была велика мощность излучения, мы по отношению к нему "слепы", если длины волн этого излучения выходят за границы указанного интервала. Более того, даже внутри этого интервала чувствительность нашего глаза различна и, следовательно, различные участки видимой области спектра обладают различной световой эффективностью *). Это значит, что светящиеся поверхно-

*) Определения световой эффективности как величины, определяющей соотношение между объективными и субъективными характеристиками света, будут даны в § 8.4.

сти, энергетические яркости которых одинаковы, но спектральный состав различен, воспринимаются нами как обладающие различной яркостью.

Сила света. Каждый источник, дающий свет в видимой области спектра, как естественный, так и искусственный, характеризуется силой света, единица которой входит в Международную систему в число основных. В отличие от энергетической силы света, сила света источника видимого света определяется потоком излучения, воспринимаемого человеческим глазом, с учетом различной чувствительности глаза к различным участкам спектра.

Поскольку единица силы света является основной, то ей присваивается собственная размерность J. Размерность силы света входит во все светотехнические величины, причем обозначение этих величин отличается от аналогических энергетических отсутствием индекса "э".

Необходимость установления эталона силы света выдвигает перед практической светотехникой много вопросов: какой спектральный состав света следует считать наиболее "естественным", как сравнивать источники с различным спектральным составом и т.п. Очевидно, необходимо договориться о каких-то единых способах сравнения и определения величин, которые должны характеризовать источники света и условия освещения.

Казалось бы, что при этом наиболее целесообразно обратиться к естественному солнечному свету, взяв его за образец для сравнения. Однако такое понятие, как естественный дневной свет, оказывается весьма расплывчатым. Время года, время суток, географическая широта, погода, высота над уровнем моря, чистота атмосферы – все эти факторы в весьма широких пределах изменяют количественный и качественный состав солнечного света. Поэтому нужно договориться о выборе некоторого искусственного источника света, который должен быть принят в качестве международного образца. В свое время было предложено много подобных образцов (свеча Гефнера, единица Виоля и др.), которые в настоящее время имеют лишь историческое значение. Основным недостатком этих образцов была трудность их воспроизведения.

Представлялось целесообразным выбрать такой источник, излучение которого определялось бы возможно более общими законами физики. Исходя из этих соображений в качестве источника было выбрано абсолютно черное тело. Так как излучение круто растет с температурой (пропорционально четвертой степени температуры), и при этом существенно изменяется распределение по длинам волн, то требовалось очень точное установление температуры излучателя. В качестве последнего была выбрана температура затвердевания платины при нормальном атмосферном давлении (2042 К). При этом принималось, что один квадратный метр излучателя обладает в перпендикулярном его поверхности направлении силой света 600 000 кандел. Применявшаяся ранее (до 1967 г.) единица силы света – международная свеча – оказалась при этом равной 1,005 кд.

Метрологические затруднения, связанные с определением канделы, побудили перейти к такому ее определению, которое основывалось бы на мощности излучения фиксированной длины волны или частоты видимой части спектра. В качестве такой частоты была выбрана частота $540 \cdot 10^{12}$ Гц, которой соответствует длина волны 555 нм. При этом в телесном угле один стерадиан в данном направлении должна излучаться мощность 683 Вт. По отношению к выбранной частоте или соответствующей длине волны "средний" человеческий глаз обладает наибольшей чувствительностью.

Итак, на XVI Генеральной конференции по мерам и весам (1979 г.) была определена единица силы света кандела (кд) (см. § 1.6). На основе канделы как основной единицы определяются остальные светотехнические единицы.

Световой поток. Эта величина определяется как произведение силы света на телесный угол, в котором распространяется поток. В общем случае неравномерного излучения

$$\Phi = \int_{\Omega} J d\Omega. \tag{8.18}$$

В случае равномерного испускания в пределах угла Ω

$$\Phi = J\Omega. \tag{8.19}$$

При равномерном испускании по всем направлениям

$$\Phi = 4\pi J. \tag{8.20}$$

До введения СИ основной светотехнической величиной являлся именно световой поток, который определялся как мощность светового излучения, оцениваемая по производимому им ощущению. Это определение подчеркивает субъективный, физиологический характер светотехнических величин.

Размерность светового потока совпадает с размерностью силы света:

$$[\Phi] = J. \tag{8.19 a}$$

За единицу светового потока принимается люмен (лм) – поток внутри телесного угла в один стерадиан при силе света в одну канделу. Единица светового потока люмен входила в качестве основной в систему световых единиц, основанную на сантиметре, грамме и секунде, вследствие чего эту систему иногда обозначали СГСЛ *).

---

*) В этой системе единица силы света являлась производной, и ее можно было определить как силу света источника, световой поток которого внутри телесного угла в один стерадиан при равномерном излучении равен одному люмену.

Световая энергия (количество света). Эта величина представляет собой произведение светового потока на время его действия:

$$Q = \int_0^t \Phi dt. \tag{8.21}$$

Размерность

$$[Q] = \mathrm{TJ}. \tag{8.21 а}$$

Единица световой энергии – люмен-секунда (лм·с).

Подобно энергетическим величинам, измеряемым плотностью потока энергии излучения, могут быть определены соответствующие светотехнические величины и их единицы. Поскольку эти определения совершенно подобны определениям аналогичных энергетических величин, мы ограничимся определяющими уравнениями физических величин, их размерностями и единицами.

Светимость

$$M = d\Phi / dS. \tag{8.22}$$

Размерность

$$[M] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{J} = \mathrm{L}^{-2}\Phi. \tag{8.22 а}$$

Единица светимости – светимость источника, каждый квадратный метр которого дает световой поток в один люмен. Эта единица называется люмен на квадратный метр (лм/м^2). Раньше эта единица называлась радлюкс (рлк). Единица системы СГСЛ – люмен на квадратный сантиметр (лм/см^2):

$$1 \text{ лм/м}^2 = 10^{-4} \text{ лм/см}^2.$$

Прежнее название единицы СГСЛ – радфот.

Интенсивность светового потока, как и светимость, измеряется в люменах на квадратный метр и люменах на квадратный сантиметр (лм/м^2, лм/см^2).

Освещенность

$$E = d\Phi / dS. \tag{8.23}$$

Размерность освещенности совпадает с размерностью светимости. Единица освещенности СИ люкс (лк) – освещенность поверхности, на каждый квадратный метр которой падает световой поток в один люмен. В системе СГСЛ единица освещенности фот (ф) – освещенность поверхности, на квадратный сантиметр которой падает поток в один люмен. Соотношение между ними:

$$1 \text{ лк} = 10^{-4} \text{ ф}.$$

Выражение для освещенности поверхности источником света силой J кандел, расположенным на расстоянии r метров от освещаемой поверхности, имеет вид

$$E = \frac{1}{r^2} \cos\alpha, \tag{8.24}$$

где α – угол между направлением распространения света и нормалью к освещаемой поверхности. Отсюда люкс можно определить как освещенность поверхности, находящейся на расстоянии один метр от источника света силой в одну канделу и расположенной перпендикулярно направлению распространения света.

Яркость. Единица яркости СИ – кандела на квадратный метр (кд/м^2) *) – яркость источника, каждый квадратный метр излучающей поверхности которого имеет в данном направлении силу света, равную одной канделе. В 10^4 раз большая единица (кандела с квадратного сантиметра) СГСЛ называлась стильб (сб).

---

*) Для этой единицы применялось название нит (нт).

Для измерения несамосветящихся поверхностей иногда применяются специальные единицы. Если поверхность идеально рассеивает свет по всем направлениям, совершенно его не поглощая, то такая поверхность обладает свойством ламбертова источника, яркость которого, одинаковая во всех направлениях, равна

$$B = \frac{1}{\pi} E. \tag{8.25}$$

В СГСЛ яркость идеально белой поверхности, освещенность которой равна одному фоту, называлась ламберт (Лб). Из формулы (8.25) следует, что

$$1 \text{ Лб} = 1/\pi \text{ сб} = 0{,}318 \text{ сб}.$$

Яркость такой же поверхности при освещенности один люкс называли иногда апостильб (асб). Соответственно

$$1 \text{ асб} = 10^{-4} \text{ Лб} = 3{,}18 \cdot 10^{-5} \text{ сб} = 0{,}318 \text{ кд/м}^2.$$

Размерности всех перечисленных величин (светимость, интенсивность, освещенность, яркость) в обеих системах совпадают, с той лишь особенностью, что в СИ входит символ размерности силы света (J), а в системе СГСЛ – светового потока (Ф):

$$[M] = [E] = [B] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{J} = \mathrm{L}^{-2}\Phi. \tag{8.26}$$

Кроме перечисленных величин, в светотехнике применяются *освечивание* – произведение силы света на время освещения:

$$C = Jt, \tag{8.27}$$

и *световая экспозиция* (количество освещения) – произведение освещенности на время освещения:

$$H = Et. \tag{8.28}$$

Размерность освечивания

$$[C] = \mathrm{J T}, \tag{8.27 а}$$

единица – кандела-секунда (кд·с).

Размерность световой экспозиции

$$[H] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{J T} = \mathrm{L}^{-2}\Phi \mathrm{T}, \tag{8.28 а}$$

единицы – люкс-секунда (лк·с) и фот-секунда (ф·с).

§ 8.4. Связь между субъективными и объективными характеристиками света

Величины, единицы которых были рассмотрены в § 8.2, 8.3, резко отличаются друг от друга по способу их регистрации. Если энергетические величины подлежат объективному измерению с помощью тех или иных приборов, то основным "прибором", с помощью которого можно измерять светотехнические величины, в конечном счете является человеческий глаз.

Возникает вопрос, каким образом привести в соответствие субъективные величины, оцениваемые по производимому ощущению, с прямыми энергетическими величинами. Для этого, очевидно, следует учитывать только "ценную" часть, а не всю энергию излучения источника света, поскольку всякий источник, в особенности тепловой, подавляющую часть энергии излучает вне видимой области спектра. Выбрав определенный узкий участок спектра, следует измерить энергию, излучаемую в этом участке, и тот световой поток, который при данной энергии получается. Задача осложняется тем, что измерения приходится сочетать с субъективными наблюдениями, а так как у разных людей заметно отличается чувствительность к различным цветам, то приходится производить измерения, привлекая большое число наблюдателей с тем, чтобы получить достаточно обоснованные статистические средние величины.

Исследования показали, что "средний глаз" по-разному реагирует на разные участки спектра. Чувствительность глаза растет, начиная от самых коротких волн (порядка 400 нм), достигает максимума при длине волны около 555 нм и затем снова убывает. Эту зависимость характеризуют световой эффективностью (световой отдачей) или, как раньше называли, видностью. При этом под *абсолютной световой эффективностью* (или, просто, световой эффективностью) понимают отношение светового потока (т.е. оцениваемой нашим глазом мощности) к полному потоку излучения (т.е. к полной мощности лучистой энергии):

$$V = \Phi / \Phi_э, \tag{8.29}$$

где V – световая эффективность, Φ – световой поток и $\Phi_э$ – полный поток излучения.

Так как $\Phi_э$ измеряется в ваттах, а Φ в люменах, то единицей световой эффективности является люмен на ватт (лм / Вт).

Полная световая эффективность представляет собой отношение светового потока белого света к соответствующей мощности излучения. Такое же отношение для определенной длины волны называется спектральной эффективностью или световой эффективностью монохроматического света.

Световая эффективность представляет собой величину, позволяющую переходить от энергетических величин к световым. Поэтому иногда световую эффективность включают в число основных величин, обладающую особой размерностью (V). В этом случае размерность светового потока будет:

$$[\Phi] = [\Phi_э][V] = L^2 M T^{-3} V. \tag{8.29 а}$$

Как мы уже говорили, человеческий глаз обладает различной чувствительностью по отношению к разным участкам спектра, причем максимальная чувствительность приходится на длину волны 555 нм. Световая эффективность этой длины волны равна (согласно определению) 683 лм/Вт. Отношение световой эффективности излучения любой другой длины волны к световой эффективности максимальной длины волны называется *относительной световой эффективностью*:

$$K = V_\lambda / V_{max}. \qquad (8.30)$$

На рис. 30 представлена кривая спектральной чувствительности глаза, причем по оси абсцисс отложена длина волны в микрометрах, а по оси ординат – абсолютная и относительная световая эффективности.

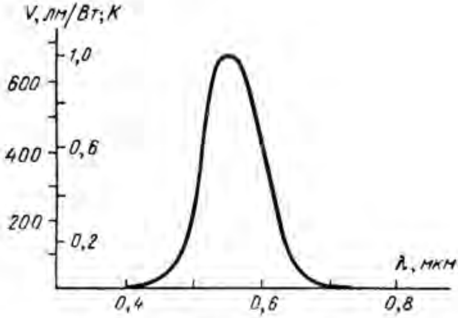


Рис. 30

Источник, который всю свою энергию отдавал только в виде излучения с длиной волны 555 нм, обладал бы максимальной световой эффективностью и был бы наиболее экономичным. Однако такой источник нас совершенно не удовлетворял бы, так как все окружающие предметы, освещенные им, были бы окрашены в зеленый цвет, отличаясь лишь тем, что одни оказались бы светлее, а другие – темнее. Наилучшим должен быть такой источник, который излучает энергию только в видимой области спектра, причем с таким распределением энергии по длинам волн, которое имеется у условного "среднего солнечного света". Если относительная световая эффективность монохроматического источника, излучающего свет с длиной волны 555 нм, равна единице, то относительная световая эффективность источника, дающего "идеальный дневной свет", окажется равной 0,35. Абсолютно черное тело с распределением энергии в спектре, близким к "среднему солнечному" свету, должно иметь температуру около 6000 К. Его относительная световая эффективность при этом составляет около 0,14. Относительная световая эффективность лампочек накаливания около 0,02, люминесцентных ламп – около 0,06.

Величина, обратная световой эффективности максимальной длины волны, называется *механическим эквивалентом света*:

$$M_{\text{св}} = \frac{1}{V_{\max}} = 1{,}464 \text{ Вт/лм}. \tag{8.31}$$

Это минимальный механический эквивалент света, т.е. та минимальная мощность в ваттах, которая способна создать поток один люмен в наиболее воспринимаемой нашим глазом области спектра.

§ 8.5. Параметры оптических приборов

Здесь мы рассмотрим единицы величин, характеризующих оптические свойства приборов. По существу, эти величины следовало бы отнести к группе геометрических величин, но, поскольку с ними приходится встречаться в оптике, мы сочли целесообразным включить их в раздел единиц, относящихся к теории излучения.

Оптическая сила. Если на прибор падает плоская световая волна (параллельные лучи) и прибор сообщает ей кривизну, радиус которой равен F, то говорят, что этот прибор обладает оптической силой

$$D = 1/F. \tag{8.32}$$

Размерность оптической силы

$$[D] = \mathrm{L}^{-1}. \tag{8.32 а}$$

За единицу оптической силы принимается оптическая сила такого прибора, который сообщает плоской волне кривизну радиусом один метр. Эта единица называется в СИ метр в минус первой степени ($\mathrm{м}^{-1}$), в СГС – диоптрия (дптр).

В зависимости от направления радиуса кривизны оптическая сила считается либо положительной (сходящиеся лучи), либо отрицательной (расходящиеся лучи).

Главное фокусное расстояние. Величина F, обратная оптической силе, носит название главного фокусного расстояния прибора и измеряется обычно в метрах или в сантиметрах.

В случае тонкой линзы главное фокусное расстояние представляет собой расстояние от линзы до главного фокуса, т.е. до точки, в которую собираются лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси (рис. 31).

Для рассеивающих линз главным фокусом является точка, в которой пересекаются продолжения расходящихся лучей, полученных в результате падения на линзу пучка параллельных лучей (рис. 32).

Для сложной центрированной оптической системы главное фокусное расстояние измеряется от главного фокуса, т.е. от точки действительного или мнимого пересечения лучей, выходящих из прибора, при входе их в прибор параллельно главной оптической оси, до главной плоскости – плоскости, в которой пересекаются направления падающего и выходящего лучей (рис. 33).

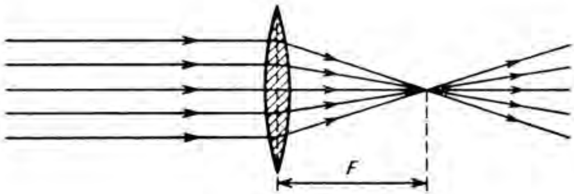


Рис. 31

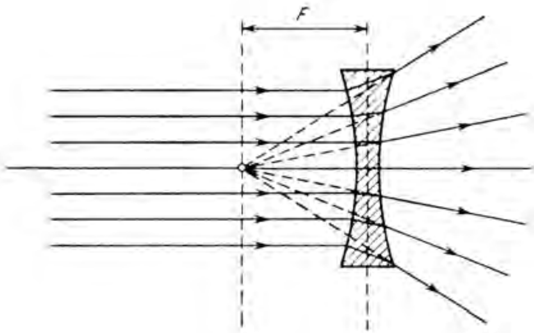


Рис. 32

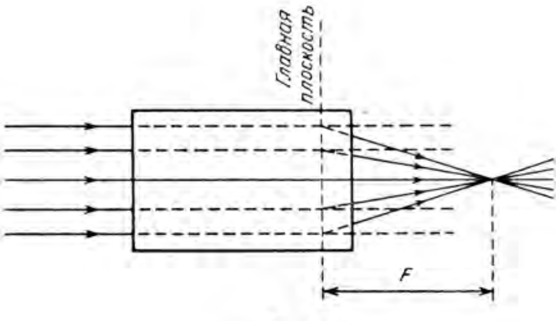


Рис. 33

Светосила. Отношение диаметра входного отверстия прибора к его главному фокусному расстоянию называется светосилой. Обычно светосилу представляют в виде дроби, в числителе которой стоит единица. Так, например, говорят, что "светосила фотоаппарата равна 1/4,5". Светосила является величиной безразмерной.

§ 8.6. Единицы величин, характеризующих оптические свойства вещества

Показатель преломления. При преломлении света на границе раздела двух изотропных сред отношение синуса угла падения к синусу угла преломления (углы отсчитываются от перпендикуляра к границе раздела) остается постоянным. Это отношение носит название показателя преломления второй среды по отношению к первой или относительного показателя преломления.

В том случае, когда свет падает из вакуума в данную среду, мы называем это отношение абсолютным показателем преломления, полагая тем самым показатель преломления вакуума равным единице. Из определения следует, что показатель преломления есть величина безразмерная.

Лучепоглощательная способность (коэффициент поглощения лучистой энергии). Эта величина представляет собой отношение поглощаемой телом энергии ко всей падающей на него энергии. Разумеется, лучепоглощательная способность является величиной безразмерной.

Световые коэффициенты. При падении светового потока на поверхность какого-либо тела часть этого светового потока непосредственно отражается (по закону отражения), часть более или менее равномерно рассеивается во все стороны, часть поглощается и часть проходит насквозь. Отношения этих световых потоков ко всему падающему световому потоку носят названия соответственно *коэффициента отражения* ρ, *коэффициента рассеяния* s, *коэффициента поглощения* k *и коэффициента пропускания* τ

(*прозрачность*). Последние два коэффициента обычно полезно относить к единице толщины слоя. В частности, коэффициент поглощения, отнесенный к единице длины, может быть определен по формуле

$$I = I_0 \exp(-kx), \tag{8.33}$$

где I_0 – интенсивность падающего света, I – интенсивность света, прошедшего через толщину x. Очевидно, размерность коэффициента поглощения

$$[k] = \mathrm{L}^{-1}, \tag{8.34}$$

так как показатель степени должен быть безразмерным.

Постоянные вращения плоскости поляризации. При прохождении плоскополяризованного света сквозь оптически активные вещества происходит поворот плоскости поляризации. В кристаллических телах угол поворота пропорционален длине пути луча в кристалле:

$$\varphi = \alpha l. \tag{8.35}$$

Постоянная α называется *постоянной вращения.*

Ее размерность

$$[\alpha] = \mathrm{L}^{-1}. \tag{8.35 a}$$

В СИ α измеряется в радианах на метр (рад/м), в СГС – в радианах на сантиметр (рад/см), однако обычно пользуются единицами угловой градус на сантиметр или угловой градус на миллиметр (угл. град/см, угл. град/мм).

В жидких средах (например, растворах сахара) и газах формула (8.35) записывается в виде

$$\varphi = \alpha' ln, \tag{8.36}$$

где n – концентрация раствора (или газа), а постоянная α' называется удельной (молярной) постоянной вращения *). В зависимости от того в каких единицах измеряется концентрация (в килограммах (или граммах) на кубический метр (или кубический сантиметр) или молях и киломолях на ту или иную единицу объема и т.д.), можно рассматривать удельную или молярную постоянную вращения плоскости поляризации.

Размерность

$$[\alpha'] = L^{-1}[n]^{-1}. \tag{8.36 a}$$

В первом случае

$$[\alpha'] = L^{-1}M^{-1}L^{3} = L^{2}M^{-1},$$

во втором случае

$$[\alpha'] = L^{-1}N^{-1}L^{3} = L^{2}N^{-1}.$$

Постоянная Верде. Фарадей обнаружил, что при прохождении поляризованного света сквозь слой вещества толщиной l, находящегося в магнитном поле с индукцией B, направление которого совпадает с направлением распространения света, плоскость поляризации испытывает поворот на угол φ, определяемый формулой

$$\varphi = \rho B l. \tag{8.37}$$

Здесь ρ – характерная для данного вещества постоянная, носящая название постоянной Верде. Размерность ρ в СИ

$$[\rho] = L^{-1}MT^{-2}I^{-1}. \tag{8.37 a}$$

Обычно постоянную Верде измеряют в СИ в радианах на метр-тесла (рад/(м·Тл)) или в СГС в угловых градусах или минутах на сантиметр-гаусс (угл. град/(см·Гс), угл. мин/(см·Гс)).

---

*) Обычно для удельной постоянной вращения применяется обозначение [α]. Мы применили обозначение α′, чтобы не смешивать с обозначением размерности.

Глава 9

НЕКОТОРЫЕ ЕДИНИЦЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ

§ 9.1. Введение

Развитие атомной физики породило значительное число специфических методов измерений свойств атомов и элементарных частиц, величин, характеризующих процессы, в которых они участвуют, и т.п. При этом во многих случаях оказалось удобным ввести специальные единицы, частично основанные на единицах системы СГС, частично смешанного характера, а подчас и не связанные непосредственно с какой-либо определенной системой.

В последнее время в литературе иногда встречается стремление выражать все подобные измерения в единицах одной из общих систем (чаще всего СИ), однако в подавляющем числе научных статей сохраняются те единицы, которые всегда применялись в атомной физике. Не ставя перед собой задачу изложить все эти единицы, мы рассмотрим наиболее важные и те, которые имеют наибольшее распространение.

§ 9.2. Основные свойства атомов и элементарных частиц

Масса. Масса частиц может измеряться как в абсолютной, так и в относительной мере. Под абсолютной мерой мы понимаем здесь одну из общих единиц массы (кг, г), под относительной по отношению к массе одной из частиц, условно принимаемой за единицу. Выбор такой единицы массы (она называется атомной единицей массы и обозначается а.е.м.) на протяжении ряда лет претерпел некоторые изменения. Раньше в химии за единицу атомной массы принималась одна шестнадцатая атомной массы элемента кислорода, а в физике – одна шестнадцатая массы изотопа кислорода, массовое число которого 16. Напомним, что массовым числом называется целое число, равное общему числу нуклонов (т.е. протонов и нейтронов) в ядре. Так как естественный кислород содержит три устойчивых изотопа с массовыми числами 16, 17 и 18 с процентным содержанием 99,76, 0,04 и 0,20%, то химическая атомная единица массы оказывалась в 1,000272 раза больше физической.

Применение определенной выше физической атомной единицы массы имело ряд неудобств, обусловленных тем, что точные определения атомных масс экспериментально связывались не с атомами кислорода, а с атомами углерода. Поэтому в 1961 г. международные организации (Союз чистой и прикладной физики и Союз чистой и прикладной химии) приняли решение установить в качестве атомной единицы массы (как в физике, так и в химии) одну двенадцатую массы изотопа углерода с массовым числом 12. Эта единица равна 1,0003179 старой "кислородной" физической единицы и очень близка к старой химической единице массы, отличаясь от нее лишь на несколько единиц в пятом знаке после запятой.

Атомная единица массы

$$1 \text{ а.е.м} = 1{,}66057 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

По отношению к атомной единице массы определяются атомные массы элементов, относительные молекулярные массы химических веществ и массы ядер. Массы элементарных частиц обычно относят к массе электрона, равной

$$m_e = 9{,}1095 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 9{,}1095 \cdot 10^{-28} \text{ г} = 5{,}4858 \cdot 10^{-5} \text{ а.е.м.}$$

Заряд. Атомные и элементарные частицы либо лишены заряда, либо имеют положительный или отрицательный заряд, кратный элементарному заряду электрона, равному

$$e = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} = 4{,}8032 \cdot 10^{-10}\ \text{СГС}.$$

Момент количества движения (момент импульса, механический момент). Момент импульса микрочастиц подчиняется законам квантовой механики, согласно которым он может принимать лишь определенные дискретные значения. Эти значения определяются выражением

$$\mathcal{L} = \frac{h}{2\pi}\sqrt{j(j+1)}, \tag{9.1}$$

где h – постоянная Планка, а j – квантовое число полного момента количества движения. Постоянная Планка равна

$$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} = 6{,}6262 \cdot 10^{-27}\ \text{эрг} \cdot \text{с}.$$

В квантовой механике вместо h обычно пользуются отношением

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} =$$

$$= 1{,}0546 \cdot 10^{-27}\ \text{эрг} \cdot \text{с}.$$

Это обозначение было введено Дираком, вследствие чего $\hbar$ иногда называют постоянной Планка – Дирака.

Квантовое число j может принимать значения либо целые, либо полуцелые (т.е. нечетные, кратные 1/2), либо равняться нулю. Для электрона квантовое число момента количества движения обозначается $s = 1/2$ и называется спиновым числом. Поэтому собственный момент количества движения электрона

$$\mathcal{L} = \frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}913 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} =$$

$$= 0{,}913 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}. \qquad (9.2)$$

Величина

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad (9.3)$$

служит в атомной физике единицей момента количества движения.

Магнитный момент. В классической теории Бора электрон, двигаясь по круговой орбите вокруг ядра, представляет собой замкнутый ток, который обладает собственным магнитным моментом. Квантовая механика, отказываясь от наглядных модельных представлений ("орбита" электрона в атоме, "вращающийся электрон"), сохраняет наличие таких величин, как рассмотренный выше момент количества движения и соответственно магнитный момент.

В классической модели магнитный момент атома водорода в нормальном (невозбужденном) состоянии легко рассчитывается следующим образом. Отношение заряда электрона к периоду его обращения в атоме представляет собой "силу тока"

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi}\,\omega. \qquad (9.4)$$

Согласно постулату Бора

$$m_e \omega a_0^2 = h/2\pi, \qquad (9.5)$$

где a_0 – радиус орбиты (так называемый боровский радиус). Следовательно,

$$I = \frac{eh}{4\pi^2 m_e a_0^2}$$

и магнитный момент

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad \text{(СИ)},$$

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e c} = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad \text{(СГС)}. \tag{9.6}$$

Магнитный момент, определяемый формулой (9.6), называется *магнетоном Бора* и служит единицей магнитного момента. Его значение

$$\mu_B = 9{,}2741 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл} = 9{,}2741 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}. \tag{9.7}$$

Для измерения магнитных моментов ядерных частиц пользуются так называемым *ядерным магнетоном*, который определяется по той же формуле (9.6), но с заменой массы электрона на массу протона, которая в 1836 раз больше массы электрона. Отсюда ядерный магнетон

$$\mu_N = 5{,}0508 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл} = 5{,}0508 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс}. \tag{9.8}$$

Заметим здесь же, что магнитные моменты ядер не являются целыми кратными ядерного магнетона, а вычисляются по довольно сложной формуле. В частности, магнитный момент протона равен

$$\mu_p = 2{,}7928\,\mu_N = 1{,}4106 \cdot 10^{-26} \text{ Дж/Тл} =$$
$$= 1{,}4106 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс}.$$

Дипольный момент. Поляризуемость. Электрические заряды в молекулах могут быть распределены несимметрично, в результате чего молекула в целом приобретает электрический дипольный момент. Дипольный момент измеряется как единицами СИ и СГС (§ 7.3 и 7.4), так и специальной единицей дебай (D), равной 10^{-18} СГС-единицы дипольного момента.

Атомы и молекулы, даже не имея собственного дипольного момента, могут его приобретать под действием внешнего поля в результате электронной поляризации. Отношение приобретенного дипольного момента к напряженности поля называется *поляризуемостью* α. Согласно определению

$$\alpha = p_э/E. \tag{9.9}$$

В СИ размерность α (см. (7.83) и (7.76 а))

$$[\alpha] = M^{-1}T^4I^2. \tag{9.9 а}$$

Размерность α в СГС (см. (7.4 а) и (7.40 а)

$$[\alpha] = L^3 \tag{9.9 б}$$

определяет единицу поляризуемости сантиметр в кубе ($см^3$).

Из определения α по формуле (9.9), подставляя $p_э = 1$ Кл · м и $E = 1$ В/м и производя соответствующие замены, легко найдем, что единица поляризуемости СИ кулон-квадратный метр на вольт (Кл · $м^2$/В) в $9 \cdot 10^{15}$ раз больше СГС-единицы поляризуемости. То же отношение может быть найдено и из размерности.

Поляризуемость связана с диэлектрической проницаемостью (если последняя определяется только электронной поляризацией) соотношением

$$\alpha = (\epsilon - 1)/n, \tag{9.10}$$

где n – концентрация молекул данного вещества.

Время жизни. Многие элементарные и атомные частицы не являются стабильными и через некоторое время либо распадаются, либо переходят в другое состояние. Для характеристики устойчивости атомных радиоактивных ядер применяют понятие периода полураспада $T_{1/2}$, т.е. времени, в течение которого распадается половина исходного числа атомов. Так как изменение числа радиоактивных атомов происходит по экспоненциальному закону

$$N = N_0 \exp(-\lambda t),$$

где N_0 – исходное число атомов, N – число нераспавшихся атомов спустя время t, λ – так называемая постоянная распада, то период полураспада $T_{1/2}$ определится уравнением

$$N_0/2 = N_0 \exp(-\lambda t_{1/2}), \tag{9.11}$$

откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \tag{9.12}$$

Для характеристики устойчивости атомов в возбужденном состоянии пользуются понятием среднего времени жизни τ, которое определяется из экспоненциального закона

$$N = N_0 \exp(-t/\tau). \tag{9.13}$$

Среднее время жизни τ равно тому времени, в течение которого число атомов в исходном состоянии уменьшится в e раз. Период полураспада и среднее время жизни связаны очевидным отношением

$$T_{1/2} = 0,693\,\tau. \tag{9.14}$$

Линейные размеры. В рамках квантовой механики не имеют смысла такие понятия, как "радиус орбиты" электрона, "радиус" какой-либо элементарной частицы (например, того же электрона) и т.п. Однако в ряде случаев удобно вводить определенные линейные масштабы, в качестве которых принимают те или иные величины, полученные на основе классических расчетов. Наиболее распространенными являются "классический радиус электрона", определяемый соотношением

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}8179 \cdot 10^{-15}\ \text{м} = 2{,}8179 \cdot 10^{-13}\ \text{см}, \tag{9.15}$$

и "радиус первой боровской орбиты"

$$a_0 = 5{,}2918 \cdot 10^{-11}\ \text{м} = 5{,}2918 \cdot 10^{-9}\ \text{см} = 0{,}52918\ \text{Å}. \tag{9.16}$$

Кроме того, в ядерной физике применяется единица длины ферми (Ф): $1\ \Phi = 10^{-13}$ см.

§ 9.3. Эффективное сечение взаимодействия

Классическая кинетическая теория газов ввела понятие длины свободного пробега, связав его с понятием поперечного сечения сталкивающихся частиц. Атомная физика расширила понятие поперечного сечения и одновременно расчленила его, установив понятие эффективного сечения взаимодействия по отношению к тому или иному конкретному процессу взаимодействия атомов, ионов, молекул, ядерных частиц и т.п.

Понятие эффективного сечения взаимодействия (часто кратко говорят "сечение") по отношению к какому-либо процессу проще всего пояснить на следующей полуклассической схеме, которую мы рассмотрим по отношению к конкретному примеру возбуждения атома электронным ударом. Пусть электрон заданной скорости летит перпендикулярно плоскости чертежа по направлению к атому с "прицельным расстоянием" r (рис. 34). Под прицельным расстоянием, или параметром столкновения, мы будем понимать длину перпендикуляра, опущенного из центра атома на прямую направления скорости электрона на большом расстоянии от атома. Пусть, далее, при данном прицельном

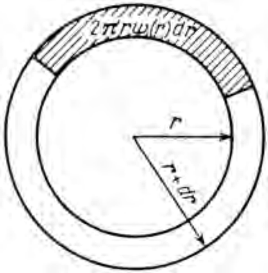


Рис. 34

расстоянии вероятность возбуждения атома равна $w(r)$. Изобразим кольцо, ограниченное радиусом r и $r + dr$, и выделим на нем долю, равную

$$d\sigma = 2\pi r w(r) dr. \tag{9.17}$$

Величину, которую мы получим, проинтегрировав $d\sigma$ по всем значениям r от 0 до ∞,

$$\sigma = 2\pi \int_0^\infty w(r) r dr, \tag{9.18}$$

назовем эффективным сечением возбуждения атома электроном данной скорости. То, что σ имеет размерность площади, видно из определяющей формулы. Что касается физического смысла σ, то, как ясно из определения, эффективное сечение представляет собой такое сечение, которым должен был бы обладать атом, чтобы при каждом попадании электрона возбуждение происходило со 100-процентной вероятностью.

Понятие эффективного сечения чрезвычайно широко используется в атомной и ядерной физике и в областях физики, исследующих макроскопические процессы, связанные с взаимодействием атомных частиц. Оно применяется для количественной характеристики всевозможных упругих и неупругих процессов взаимодействия.

Для измерения эффективных сечений пользуются разными единицами. В ядерной физике соответствующей единицей является барн (б): 1 б = 10^{-28} $м^2$ = = 10^{-24} $см^2$. В физике атомных столкновений применяются квадратный сантиметр, реже – квадратный метр и единицы a_0^2 и πa_0^2 (где a_0 – радиус первой боровской орбиты):

$$a_0^2 = 0{,}28003 \cdot 10^{-16}\ см^2,\ \pi a_0^2 = 0{,}87973 \cdot 10^{-16}\ см^2.$$

Иногда в научной литературе пользуются понятием приведенного эффективного сечения, которое представляет собой сумму соответствующих эффективных сечений всех атомов или молекул, заключенных в 1 $см^3$ при температуре 0 °С и давлении 1 мм рт. ст. Так как при таких условиях число молекул в 1 $см^3$ равно $3{,}535 \cdot 10^{16}$, то приведенное эффективное сечение мы получим, умножив на это число эффективное сечение, измеренное в $см^2$ или $м^2$. Обозначают единицу приведенного эффективного сечения $см^2/(см^3 \cdot мм\ рт.\ ст.)$.

§ 9.4. Единицы энергии атомной физики

Кроме единицы энергии СИ – джоуля в атомной физике применяется электрон-вольт.

Электрон-вольт. Если электрон пробегает разность потенциалов U вольт, не претерпевая на пути никаких потерь энергии, то он приобретает кинетическую энергию ($v_0 = 0$)

$$m_e v^2/2 = eU. \tag{9.19}$$

При $U = 1$ В энергия электрона будет равна

$$1 \text{ эВ} = 1{,}60219 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1{,}60219 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} =$$
$$= 1{,}60219 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

Очень часто эту величину используют для выражения энергии не только электрона, но и других частиц или энергетических уровней в атомах и молекулах. Эта единица энергии называется электрон-вольт и обозначается эВ. Пользуются также единицами энергии в 10^3, 10^6, 10^9 раз большими: (килоэлектрон-вольт (кэВ), мегаэлектрон-вольт (МэВ), гигаэлектрон-вольт (ГэВ).

Связь между электрон-вольтом и кельвином. Если газ находится при температуре T, то средняя кинетическая энергия поступательного движения его молекул равна

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} k_Б T. \tag{9.20}$$

Если бы с каждой молекулой был связан элементарный заряд, то свою энергию молекулы могли бы приобрести, пробежав разность потенциалов U, определяемую соотношением

$$\frac{3}{2} k_Б T = eU. \tag{9.21}$$

Если $eU = 1$ эВ, то соответствующая температура

$$T = \frac{2 \cdot 1 \text{ эВ}}{3k_Б} = \frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}}{3 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}} = 7733 \text{ К}. \tag{9.22}$$

Во многие уравнения статистической физики, термодинамики, спектроскопии и другие входит экспоненциальный множитель

$$\exp(W/k_Б T),$$

где W – энергия перехода из одного состояния в другое. Измеряя эту энергию в электрон-вольтах, удобно представить в электрон-вольтах и знаменатель, который будет равен 1 эВ, если $T \approx 11\,600$ К.

Связь между электрон-вольтом и джоулем на моль. Если все молекулы, содержащиеся в одном моле, приобретают энергию 1 эВ каждая, то общая энергия всех молекул увеличится на

$$1\ эВ \cdot N_А = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\ Дж/моль =$$

$$= 9{,}648\ Дж/моль.$$

Связь между энергией, измеряемой в электрон-вольтах, и длиной световой волны. Каждая спектральная линия характеризуется определенной длиной волны или частотой, а следовательно, определенным квантом энергии

$$h\nu = hc/\lambda. \quad (9.23)$$

Поэтому можно установить связь между измеренной в нанометрах длиной волны спектральной линии и соответствующей ей энергией, измеренной в электрон-вольтах. Это тем более имеет смысл, что часто возбуждение атома на более высокий энергетический уровень, при переходе с которого в нормальное состояние он излучает квант энергии, производится электронным ударом. Из соотношения

$$eU = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (9.24)$$

можно легко получить

$$\lambda(eU) = 0{,}19864 \cdot 10^{-15}\ Дж \cdot нм = 1239{,}8\ нм \cdot эВ. \quad (9.25)$$

Связь между скоростью электрона и его энергией, измеренной в электрон-вольтах. Скорость, которую приобретает электрон, пробежав разность потенциалов U вольт, также может быть определена из формулы (9.19):

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 5{,}931 \cdot 10^5 \sqrt{U} \text{ м/с} = 5{,}931 \cdot 10^7 \sqrt{U} \text{ см/с.} \quad (9.26)$$

Таким образом, скорость электрона однозначно определяется той разностью потенциалов, которую он пробегает. Поэтому часто говорят: "электрон обладает скоростью U вольт", подразумевая под этим, что он обладает такой скоростью, которую приобрел бы, пробежав разность потенциалов в U вольт. Для перевода скорости электрона в вольтах в скорость, выраженную в метрах в секунду или сантиметрах в секунду, и служит формула (9.26).

Связь между энергией электрона, измеренной в электрон-вольтах, и длиной его дебройлевской волны.

С электроном, летящим со скоростью v, связана длина волны

$$\lambda = h/m_e v. \quad (9.27)$$

Выражая скорость электрона в электрон-вольтах (см. (9.26)) и подставляя соответствующие значения для h и m_e, получим

$$\lambda = \frac{1{,}226}{\sqrt{U}} \text{ нм.} \quad (9.28)$$

Здесь U измеряется в вольтах. Удобно пользоваться приближенным выражением

$$\lambda \approx \sqrt{1{,}5/U} \text{ нм,} \quad (9.29)$$

из которого видно, что электрону с энергией 1,5 эВ соответствует дебройлевская волна длиной 1,0 нм.

Связь между массой и энергией. Согласно теории относительности масса и энергия частицы связаны соотношением

$$W = mc^2. \tag{9.30}$$

Как известно, по измерению разницы между массой того или иного атомного ядра и суммой масс образующих его протонов и нейтронов можно вычислить энергию связи нуклонов в ядре. Ниже мы приводим наиболее употребительные приближенные соотношения между единицами массы и энергии:

для макроскопических тел*)

1 кг $\hat{=}$ 8,987 · 10^{16} Дж, 1 г $\hat{=}$ 8,987 · 10^{20} эрг;

для атомных частиц

$$1 \text{ а.е.м.} \;\hat{=}\; 1{,}493 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 931{,}7 \text{ МэВ}; \tag{9.31}$$

для элементарных частиц

$1 m_e \;\hat{=}\; 8{,}187 \cdot 10^{-10}$ Дж $= 0{,}5110$ МэВ,

$1 m_p \;\hat{=}\; 1{,}503 \cdot 10^{-10}$ Дж $= 938{,}3$ МэВ.

Единица энергии ридберг. Спектральные линии водородоподобных атомов располагаются в серии, удовлетворяющие формуле

$$\tilde{\nu} = RZ^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \tag{9.32}$$

где $\tilde{\nu}$ – волновое число данной линии, n_1 и n_2 – квантовые числа энергетических уровней, переход между которыми сопровождается излучением соответствующего кванта, R – так называемая постоянная Ридберга. В слу-

*) $\hat{=}$ – знак соответствия.

чае ядра бесконечно большой массы

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{h^3 c} = 10\,973\,731{,}77\ \text{м}^{-1}. \tag{9.33}$$

Если учитывать массу ядра, то следует принимать во внимание, что в рамках планетарной модели атома электрон движется не вокруг ядра, а вокруг общего с ядром центра масс. Это дает некоторое изменение энергии взаимодействия, вследствие чего постоянная Ридберга оказывается равной

$$R = R_\infty (1 + m_e/M). \tag{9.34}$$

В частности, для водорода постоянная Ридберга оказывается равной

$$R_{\text{H}} = 109\,677\ \text{см}^{-1}.$$

Умножая обе части уравнения (9.34) на hc, мы получим значение энергии излучаемого кванта. Произведение

Rch,

называемое ридберг и обозначаемое Ry, применяется в качестве меры энергии электронных уровней. Полагая $n_1 = 1$ и $n_2 = \infty$, можно определить ридберг как энергию, которую нужно было бы затратить для ионизации атома водорода, если бы масса его ядра равнялась бесконечности. Подставляя значения R, c и h, найдем, что

$$1\text{Ry} = 13{,}605804\ \text{эВ}. \tag{9.35}$$

Фактическая энергия ионизации атома водорода, рассчитанная по значению R_{H}, равна 13,57 эВ. Небольшое отличие между опытным значением, определяемым по формуле (9.35), объясняется разницей между R_∞ и R_{H}.

§ 9.5. Единицы величин, характеризующих ионизирующее излучение. Единицы дозиметрических величин

При достаточно большой энергии электроны, атомы, ионы, ядерные частицы и фотоны*), поглощаясь в веществе, способны вызвать его ионизацию. Эта способность определяет количественные характеристики, способы регистрации и измерения и соответствующие единицы ионизирующих излучений. Поэтому, наряду с общими энергетическими величинами и единицами, применяют ряд специфических, которые включают в себя число ионизирующих частиц и их способность производить ионизацию. Большинство из этих единиц построены на базе единиц СИ и СГС, некоторые – внесистемные.

Энергия ионизирующих частиц. Способность частиц производить ионизацию определяется их энергией. Для электронов, нуклонов, α-частиц это главным образом их кинетическая энергия, для фотонов – энергия, определяемая выражением $E = h\nu$.

Энергия ионизирующих частиц, как и любая другая энергия, измеряется единицами джоуль и эрг. Весьма распространено измерение энергии ионизирующих частиц в электронвольтах (эВ):

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1{,}6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

Размерность энергии ионизирующих частиц в СИ и СГС та же, что и для любой другой энергии:

$$[E] = \mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}.$$

---

*) В большинстве приводимых определений фотон рассматривается как частица.

Поток ионизирующих частиц – отношение числа ионизирующих частиц, проходящих через данную поверхность за некоторый промежуток времени, к этому промежутку. Из определения

$$\Phi_n = dN/dt \tag{9.36}$$

вытекает размерность

$$[\Phi_n] = \mathrm{T}^{-1} \tag{9.36a}$$

и общая для всех систем единица – секунда в минус первой степени (с^{-1}) – одна частица в секунду.

Плотность потока ионизирующих частиц – отношение потока ионизирующих частиц, проникающих в элементарную сферу, к площади центрального сечения этой сферы:

$$\varphi_n = d\Phi_n/dS. \tag{9.37}$$

Размерность

$$[\varphi_n] = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{-1}. \tag{9.37a}$$

Единицы плотности потока ионизирующих частиц – секунда в минус первой степени-метр (или сантиметр) в минус второй степени ($\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$, $\text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$) – одна частица на квадратный метр (или на квадратный сантиметр) в секунду.

Поток энергии ионизирующих частиц. Эта величина определяется так же, как поток звуковой энергии или энергии электромагнитного излучения – отношением суммарной энергии всех частиц, идущих в данном направлении, к тому промежутку времени, в течение которого эта энергия проходила:

$$\Phi = dE/dt. \tag{9.38}$$

Размерность

$$[\Phi] = \mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-3}. \tag{9.38a}$$

Единицы потока энергии ионизирующих частиц в СИ и СГС совпадают с единицами мощности – Вт, эрг/с.

Плотность потока энергии ионизирующих частиц – отношение потока энергии к площади перпендикулярной потоку поверхности, на которую падает поток излучения:

$$\varphi = d\Phi/dS. \tag{9.39}$$

Размерность

$$[\varphi] = \mathrm{MT}^{-3}. \tag{9.39 a}$$

Единицы плотности потока энергии ионизирующего излучения в СИ и СГС – Вт/м^2 и эрг/(с · см^2).

Ряд специальных величин и соответствующих единиц характеризует взаимодействие ионизирующего излучения с веществом.

Переданная энергия – разность между суммарной энергией всех частиц, входящих в данный объем, и суммарной энергией всех частиц, покидающих объем. Здесь учитывается кинетическая энергия всех частиц, энергия ионизации и возбуждения, энергия фотонов. Энергия, эквивалентная массе покоя, не учитывается. Измеряется переданная энергия общими единицами энергии.

Здесь же рассмотрим и некоторые дозиметрические величины и их единицы.

Поглощенная доза ионизирующего излучения (доза излучения) – отношение энергии, поглощенной в данном объеме, к массе вещества в этом объеме. Поглощенная доза излучения является основной величиной, определяющей степень радиационного воздействия. По поводу этой величины полезно сделать следующее замечание: ранее нам приходилось встречаться с объемной плотностью излучения (§ 8.2). Однако при измерении произведенной излучением ионизации более существенной величиной является отношение поглощенной энергии не к объему, а к массе, что легко понять, если рассмотреть поглощение в газе. Очевидно, что поскольку ионизация происходит при взаимодействии частиц с атомами или молекулами, то при вдвое меньшем давлении газа потребуется вдвое больший объем для получения одинаковой ионизации. Итак, поглощенная доза ионизирующего излучения – отношение средней энергии, переданной ионизирующим излучением веществу в элементарном объеме, к массе вещества в этом объеме:

$$D = dE/dm. \tag{9.40}$$

Размерность поглощенной дозы излучения

$$[D] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}. \tag{9.40а}$$

Единицы в СИ и СГС – джоуль на килограмм (Дж/кг) и эрг на грамм (эрг/г). Единица джоуль на килограмм получила название грэй (Гр). Грэй равен поглощенной дозе ионизирующего излучения, при которой веществу массой один килограмм передается энергия ионизирующего излучения один джоуль. Соотношения между единицами:

$$1\ \text{Гр} = 1\ \text{Дж/кг} = 10^4\ \text{эрг/г}.$$

Раньше применялась также единица рад: 1 рад = $= 10^{-2}$ Гр $= 10^{-2}$ Дж/кг $= 10^2$ эрг/г.

Процессы ионизации в веществе могут иметь различный характер, в зависимости от природы ионизирующего излучения, т.е. от того, какие частицы входят в состав излучения. Соответственно, ионизирующие излучения подразделяются на непосредственно ионизирующие и косвенно ионизирующие. К первым относятся излучения, состоящие из заряженных частиц (электронов, ионов, альфа-частиц), а вторые – из нейтральных (фотонов, нейтронов).

Продукты ионизации, возникающие в результате косвенной ионизации, имеют некоторую начальную энергию, зависящую от характера среды. Отношение суммарной кинетической энергии этих продуктов к массе вещества, в котором происходит поглощение, имеет специальное название — *керма,* являющееся аббревиатурой английского Kinetic Energy Releacased in Matter (кинетическая энергия, освобождающаяся в веществе),

$$K = dE_N/dm.$$

Размерность и единицы кермы совпадают с размерностью и единицами поглощенной дозы ионизирующего излучения.

Временной рост поглощенной дозы или кермы определяет *мощность поглощенной дозы ионизирующего излучения*

$$P = dD/dt \tag{9.41}$$

или мощность кермы

$$\dot{K} = dK/dt. \tag{9.42}$$

Размерность мощности поглощенной дозы излучения или мощности кермы

$$[P] = [\dot{K}] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}, \tag{9.42a}$$

единица — грэй в секунду (Гр/с).

Поскольку кинетическая энергия ионов, возникающих в результате поглощения излучения, зависит не только от излучения, но и от поглощающего вещества, при определении кермы это вещество специально регламентируется. Так, в качестве вещества, поглощающего фотоны, применяется воздух.

Экспозиционная доза фотонного излучения. Важной характеристикой фотонного излучения (гамма- и рентгеновского излучения) является способность создавать в веществе определенную концентрацию заряженных частиц. Мерой этой способности служит экспозиционная доза фотонного излучения X, определяемая как отношение суммарного заряда всех ионов одного знака, созданного в некотором объеме сухого воздуха к массе воздуха в этом объеме (при условии, что заряды остаются в объеме):

$$X = dQ/dm. \tag{9.43}$$

Размерность экспозиционной дозы фотонного излучения

$$\begin{aligned} [X] &= \mathrm{M}^{-1}\mathrm{TI} \quad (\text{СИ}), \\ [X] &= \mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{-1/2}\mathrm{T}^{-1} \quad (\text{СГС}). \end{aligned} \tag{9.43а}$$

Единица экспозиционной дозы в СИ – кулон на килограмм (Кл/кг) – экспозиционная доза, производящая в одном килограмме воздуха число пар ионов, суммарный заряд каждого знака которых равен одному кулону. Это число составляет $6{,}24 \cdot 10^{18}$ пар ионов. В СГС соответствующая единица – СГС-единица на грамм. Очевидно, единица СГС в $3 \cdot 10^{6}$ раз меньше, чем кулон на килограмм. Единице СГС соответствует $2{,}082 \cdot 10^{9}$ пар ионов в грамме воздуха.

Широко (особенно в медицине и работах по радиационной защите) применялась единица экспозиционной дозы – рентген (Р), определяемая как экспозиционная доза рентгеновского или гамма-излучения, при которой в одном кубическом сантиметре воздуха при нормальных условиях образуются ионы, суммарный заряд каждого знака которых равен единице заряда СГС. Этому соответствует $2{,}082 \cdot 10^{9}$ пар ионов в одном кубическом сантиметре. Так как плотность воздуха при нормальных условиях равна $1{,}293 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, то одному рентгену соответствует $1{,}61 \cdot 10^{12}$ пар ионов в грамме. Соответственно, соотношение между рентгеном и кулоном на килограмм

$$1\ \text{Р} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{Кл/кг}^{*)},$$

$$1\ \text{Кл/кг} = 3{,}88 \cdot 10^{3}\ \text{Р (приблизительно)}.$$

На практике приходится пользоваться дольной единицей экспозиционной дозы – микрокулоном на килограмм (мкКл/кг), раньше пользовались миллирентгеном (мР).

Мощность экспозиционной дозы излучения. Экспозиционная доза излучения определяется длительностью потока излучения и экспозиционной дозой в единицу времени или мощностью экспозиционной дозы излучения. Мощность экспозиционной дозы излучения

$$\dot{X} = dX/dt.$$

Ее размерность

$$[\dot{X}] = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{I} \qquad (\text{СИ}),$$

$$[\dot{X}] = \mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{-1/2} \qquad (\text{СГС})$$

и единицы: СИ – кулон на килограмм в секунду (ампер на килограмм), СГС – СГС-единица заряда в секунду на грамм.

Соотношение между единицами такое же, как и между единицами экспозиционной дозы.

Измерение экспозиционной дозы излучения по ее ионизующей способности позволяет установить физический эквивалент единицы экспозиционной дозы. Он определяется той энергией, которую расходуют на ионизацию. Учитывая, что энергия ионизации воздуха в среднем составляет около 33 эВ, получим, что физический эквивалент кулона на килограмм – 33 Дж/кг, а физический эквивалент рентгена – 85 эрг/г.

---

*) Это соотношение зафиксировано как точное (не подлежащее уточнению).

Заряженные частицы, двигаясь в веществе, передают при столкновениях с атомами вещества свою энергию. Отношение этой энергии dE, переданной веществу заряженной частицей вследствие столкновений на элементарном пути dl, к длине этого пути называется *линейной передачей энергии*:

$$L = dE/dl. \qquad (9.44)$$

Размерность

$$[L] = \mathrm{LMT}^{-2}. \qquad (9.44а)$$

В качестве единиц линейной передачи энергии применяют джоуль на метр (Дж/м), эрг на сантиметр (эрг/см) и электрон-вольт на метр или сантиметр (эВ/м, эВ/см). На практике пользуются дольной единицей – наноджоуль на метр (нДж/м) и кратной единицей – килоэлектрон-вольт на микрометр (кэВ/мкс):

1 кэВ/мкм = 0,16 нДж/м = $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ эрг/см.

Эквивалентная доза ионизирующего излучения (эквивалентная доза). Биологическое действие излучения зависит не только от поглощенной дозы излучения, но и от того, на какую глубину это излучение может проникать в биологической ткани. Поэтому для оценки биологического действия ионизирующего излучения вводится эквивалентная доза ионизирующего излучения. Она определяется произведением поглощенной дозы излучения на так называемый *коэффициент качества излучения* в данном элементе объема биологической ткани стандартного состава:

$$D_{эк} = H = Dk, \qquad (9.45)$$

где k – коэффициент качества излучения. Последний зависит от линейной передачи энергии и тем больше, чем больше последняя. Этот безразмерный коэффициент для самых малых значений линейной передачи энергии равен единице и растет, достигая при максимальных значениях L двадцати.

Размерность эквивалентной дозы ионизирующего излучения совпадает с размерностью поглощенной дозы, а для ее единицы принято специальное наименование – зиверт (Зв, Sv); эта единица соответствует поглощенной дозе излучения один грэй при коэффициенте качества излучения, равном единице. Раньше применялся биологический эквивалент рентгена – бэр (rem), соответствующий поглощенной дозе излучения один рад, также при коэффициенте качества излучения, равном единице. Соотношение между этими единицами следующее:

1 Зв = 100 бэр.

Мощность эквивалентной дозы ионизирующего излучения (мощность эквивалентной дозы). Эта величина характеризуется отношением приращения эквивалентной дозы за некоторый промежуток времени к этому промежутку:

$$\dot{H} = dH/dt. \tag{9.46}$$

Размерность

$$[\dot{H}] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-3}. \tag{9.46a}$$

Единица мощности эквивалентной дозы – зиверт в секунду (Зв/с).

§ 9.6. Единицы радиоактивности

Основным процессом, подлежащим регистрации и измерению при радиоактивных превращениях, является распад, сопровождающийся испусканием альфа- или бета-частиц, нейтронов и гамма-квантов. Для количественной характеристики любых дискретных событий (импульсов, ударов и т.п.) применяется общая единица – секунда в минус первой степени ($с^{-1}$). Очевидно, эта же единица должна характеризовать *активность радионуклида* (т.е. радиоактивного ядра) *в источнике* (активность радионуклида) – отношение числа спонтанных переходов из определенного ядерноэнергетического состояния радионуклона, происходящих в источнике за некоторый интервал времени, к этому интервалу:

$$A = dN/dt. \tag{9.47}$$

Размерность

$$[A] = T^{-1}. \tag{9.47а}$$

Однако на практике удобно указывать конкретно, о каком именно процессе идет речь. Поэтому обычно в качестве единицы активности принимают один распад в секунду (расп./с). Для одного распада в секунду установлено название беккерель (Бк). Применяемая раньше единица активности называлась резерфорд (Рд): 1 Рд = 10^6 Бк.

Наряду с единицами распад в секунду и резерфорд применялась также единица кюри (Ки) и ее дольные единицы. Активность 1 Ки равна $3{,}700 \cdot 10^{10}$ Бк (точно)*). Происхождение этой единицы следующее. Если в закрытый сосуд поместить радий, то вначале количество радона (эманации радия), являющегося продуктом распада радия, будет возрастать. Так как сам радон распадается (с периодом полураспада, равным 3,82 суток), то в конце концов установится равновесие между вновь возникающим радоном и распадающимся. При этом число ежесекундно совершающихся актов распада будет оставаться практически постоянным, если не учитывать изменение массы самого радия, которое происходит

---

*) Число $3{,}700 \cdot 10^{10}$, устанавливающее связь между кюри и беккерелем, принято как точное (не подлежащее уточнению).

весьма медленно, с периодом полураспада около 1600 лет. Поэтому радиоактивность радия можно сравнить с радиоактивностью радона, находящегося в равновесии с некоторым количеством радия. Единица радиоактивности кюри представляет собой радиоактивность радона, находящегося в равновесии с одним граммом радия. Количество радона, соответствующее радиоактивности один кюри, имеет массу $6{,}51 \cdot 10^{-9}$ кг и содержит $1{,}78 \cdot 10^{16}$ атомов. Альфа-частицы, испускаемые радоном (без учета последующих продуктов его распада), способны создать в воздухе ионизационный ток насыщения 0,92 мА.

Испускаемые радиоактивным препаратом частицы образуют поток, измеряемый числом частиц в секунду. Число частиц, приходящихся на единицу площади (квадратный метр или квадратный сантиметр), определяет *плотность потока частиц.*

§ 9.7. Коэффициенты ионизации, рекомбинации, подвижности

Свойства электронов, ионов, атомов и других частиц характеризуются различными величинами, присущими данным частицам и описывающими отдельные акты взаимодействия этих частиц друг с другом, с квантами излучения и т.д. К числу таких величин относятся, в частности, рассмотренные выше эффективные сечения. Однако в ряде случаев для описания явлений, в которых участвует большое число частиц, удобно пользоваться средними макроскопическими величинами. С подобным положением, например, приходится встречаться в кинетической теории газа при описании явлений переноса (диффузия, вязкость, теплопроводность) — явлений, характеризуемых макроскопическими коэффициентами, значения которых могут быть рассчитаны с помощью молекулярной теории. Здесь мы приведем несколько подобных величин и их единиц применительно к движению заряженных частиц в газе.

Линейная плотность ионизации. Двигаясь в электрическом поле, электрон приобретает способность ионизовать газ. Число ионизаций α_i, которые в среднем производит электрон на единице своего пути в направлении поля, называется линейным коэффициентом ионизации или первым коэффициентом Таунсенда. Второе название обусловлено тем, что этот коэффициент был введен Таунсендом в его теории несамостоятельного разряда в газе. Измеряется α_i единицами длины в минус первой степени ($м^{-1}$, $см^{-1}$).

Подобные коэффициенты с такими же единицами могут быть введены для характеристики ионизации другими частицами (например, ионами).

Коэффициент рекомбинации. Если в газе находятся заряженные частицы обоих знаков с концентрациями n_+ и n_-, то может иметь место процесс рекомбинации (воссоединения) этих частиц в нейтральные атомы или молекулы. Число таких актов рекомбинации, происходящих в единицу времени в единице объема, определяется уравнением

$$N = \alpha_r n_+ n_-, \tag{9.48}$$

где α_r – коэффициент рекомбинации.

Размерность

$$[\alpha_r] = L^3 T^{-1} \tag{9.48a}$$

определяет единицы коэффициента рекомбинации: кубический метр в секунду ($м^3/с$) и кубический сантиметр в секунду ($см^3/с$).

Подвижность (коэффициент подвижности). Скорость заряженной частицы, движущейся в некоторой среде в электрическом поле, благодаря многочисленным столкновениям устанавливается на некотором среднем уровне. При этом различают хаотическую (или ненаправленную) скорость и дрейфовую (или направленную) скорость вдоль направления поля. Последняя определяет прохождение электрического тока. В общем случае направленная скорость u может сложным образом зависеть от напряженности поля. При определенных условиях между направленной скоростью u и напряженностью поля E существует прямая пропорциональность:

$$u = bE, \qquad (9.49)$$

где b – коэффициент подвижности, или, как чаще говорят, подвижность данной заряженной частицы *).

Как показал Эйнштейн, подвижность связана с коэффициентом диффузии D уравнением

$$D/b = k_Б T/e,$$

где $k_Б$ – постоянная Больцмана, e – заряд электрона, T – термодинамическая температура.

Подвижность частицы равна средней направленной скорости, приобретаемой частицей при движении в поле, напряженность которого равна единице.

Размерность подвижности в СИ (см. (7.76а))

$$[b] = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{2}\mathrm{I} \qquad (9.49а)$$

и в СГС (см. (7.40а))

$$[b] = \mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{-1/2}. \qquad (9.49б)$$

На практике подвижность измеряют единицами квадратный метр на вольт-секунду ($м^2/(В \cdot с)$) и квадратный сантиметр на вольт-секунду ($см^2/(В \cdot с)$).

---

*) Уравнение (9.49), в частности, удовлетворяется при движении электронов в металле, обеспечивая тем самым применимость для металла закона Ома.

Подвижность, как и коэффициент диффузии, при прочих равных условиях обратно пропорциональна плотности газа или приведенному давлению. Поэтому часто пользуются понятием *приведенной подвижности*, определяемой соотношением

$$b_1 = b/p_0.$$

§ 9.8. Системы единиц, основанные на атомных постоянных

В этой книге неоднократно указывалось, что между числом основных единиц и числом универсальных постоянных существует однозначная связь: чем больше основных единиц, тем больше постоянных в формулах физических законов и определений. Приравняв гравитационную постоянную единице с сохранением одновременно равенства единице инерционной постоянной, мы уменьшили число основных единиц в системах геометрических и механических единиц с трех до двух. Приравняв единице постоянную Больцмана, мы делаем производной единицу температуры. В системах электрических и магнитных единиц можно произвести дальнейшее сокращение числа основных единиц, если приравнять единице электрическую и магнитную постоянные в системе, построенной по принципу Международной системы, или скорость света в системе, построенной по принципу СГС. Мы остаемся, таким образом, с двумя единицами, из которых одна – единица силы света – отражает физическую специфику восприятия света, а в качестве второй может быть по нашему выбору принята либо единица длины, либо единица времени.

Спрашивается, в какой степени мы использовали все возможности сокращения числа универсальных постоянных? Хотя общее число таких постоянных сравнительно велико, однако, как можно показать, проанализировав происхождение соответствующих уравнений, в результате произведенного сокращения числа единиц почти все постоянные станут равными единице или другому безразмерному постоянному числу, получившемуся в итоге какой-либо математической операции.

Тем не менее остаются некоторые постоянные, в выборе значения которых мы располагаем свободой, так что, приравняв одну из них единице, мы получим систему с числом основных единиц, равным нулю. В этой системе все величины будут обладать нулевой размерностью. Это значит, что мы лишимся возможности выбирать по своему произволу единицы каких-либо величин. В числе таких постоянных находятся постоянные в законах Стефана – Больцмана и Вина, а также постоянная Планка. Как показано в приложении I, все эти постоянные связаны между собой. Положив значение одной из них равным единице, мы однозначно определим значения всех остальных констант и значения единиц всех величин

Подобную систему впервые предложил М. Планк. В его системе, кроме гравитационной постоянной, скорости света и постоянной Больцмана, приравнивалась единице постоянная Планка. Единицы величин, которые в обычных системах служат основными, имеют при этом следующие значения: единица длины – $4{,}02 \cdot 10^{-33}$ см, единица массы – $5{,}43 \cdot 10^{-5}$ г, единица времени – $1{,}34 \cdot 10^{-43}$ с. Система Планка не получила распространения, причем главным образом не потому, что входящие в нее единицы очень далеки от практики, а потому, что в этой системе уравнения теоретической физики не становятся проще.

В настоящее время в теоретической физике применяются две другие системы: система Хартри, в которой приравнены единице масса и заряд электрона m_e и e

и постоянная Планка $\hbar$, и система, в которой приравнены единице скорость света c, масса электрона m_e (иногда масса какой-либо другой частицы) и постоянная Планка $\hbar$. Строго говоря, эти две системы нельзя назвать безразмерными. Такие величины, как заряд электрона (элементарный заряд) и масса электрона, протона или другой частицы, скорее следует рассматривать не как универсальные постоянные, а как своеобразные "естественные эталоны", подобные современным эталонам времени и длины (§ 1.5).

Система Хартри применяется преимущественно в нерелятивистской квантовой механике при решении различных задач, связанных со структурой атомов и молекул и процессами их взаимодействия, поэтому систему Хартри часто называют "система атомных единиц". В системе Хартри, кроме названных постоянных, значение которых по условию приравнивается единице, оказываются равными единице или приобретают простое выражение некоторые другие величины. В частности, единицей длины становится радиус первой боровской орбиты

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e e^2} = 5{,}2918 \cdot 10^{-9}\ \text{см}. \qquad (9.50)$$

В приложении XI приведены значения единиц некоторых других величин в системе Хартри. Основное преимущество этой системы – значительное упрощение ряда основных уравнений теоретической физики. Так, например, уравнение Шрёдингера для атома водорода имеет вид

$$\Delta\psi + 2(E + 1/r)\,\psi = 0, \qquad (9.51)$$

где r – радиальная координата, а E – энергия атома.

Система с основными единицами m_e, $\hbar$, c используется преимущественно в квантовой электродинамике. Эту систему называют иногда "естественная система". Само это название применяют сравнительно редко и относят иногда ко всем системам, в которых приравнены единице атомные константы, в том числе к системам Планка и Хартри. В системе с единицами m_e, $\hbar$ и c единица энергии совпадает с энергией соответствующей покоящейся массы электрона

$$m_e c^2 = 0{,}82 \cdot 10^{-6}\,\text{эрг},$$

единица длины – с комптоновской длиной волны (см. приложение I)

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} = 3{,}86 \cdot 10^{-11}\,\text{см}.$$

Единицы ряда других величин также приведены в приложении XI.

Глава 10

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ

§ 10.1. Различные области применения логарифмических единиц

В гл. 6 были рассмотрены логарифмические единицы, характеризующие интенсивность звука, – белы, их десятая часть – децибелы и неперы. По логарифмической шкале была построена и частотная характеристика высоты звука. Применение логарифмической шкалы отнюдь не ограничивается акустикой. В ряде случаев диапазон изменения той или иной физической величины столь широк, что представление его линейным масштабом оказывается практически невозможным. Так, например, в современной вакуумной технике в процессе откачки прибора давление газа меняется от 10^6 Па до 10^{-3} – 10^{-5} Па, а в некоторых лабораторных исследованиях – до 10^{-9} – 10^{-11} Па. Временно́й ход этого процесса безнадежно пытаться изобразить при линейном масштабе давлений.

Подобное положение мы имеем, например, в астрономии. Применение логарифмического масштаба позволяет изобразить процессы и закономерности при практически не ограниченном диапазоне изменения интересующей нас величины, причем как малые, так и большие ее значения будут представлены достаточно наглядно.

Смысл применения логарифмической шкалы, однако, значительно шире. Нередко само существо явления подсказывает нам целесообразность его описания с помощью логарифмических единиц. Мы уже говорили о логарифмическом характере психофизиологического восприятия громкости и высоты звука. В такой же степени это относится и к восприятию других внешних раздражений, удовлетворительно укладывающихся в закон Вебера – Фехнера, согласно которому ощущение пропорционально логарифму раздражения.

Для каждого раздражения существует минимальное отношение двух значений характеризующей его величины, которое может быть зарегистрировано соответствующим органом чувств. Так, например, две яркости могут быть различены человеческим глазом, если их отношение равно приблизительно 2,5. Это отношение определило логарифмический масштаб измерения "яркости" звезд – так называемую "звездную величину". Мы поставили слово "яркость" в кавычки, потому что в данном случае в действительности из-за крайней удаленности звезд речь идет об освещенности, создаваемой данной звездой на границе атмосферы. Человеческий глаз воспринимает поэтому звезды как светящиеся точки разной яркости. Фотоэлектрическая регистрация позволяет вводить дробные значения звездных величин. При этом наиболее яркие звезды и, разумеется, Луна и Солнце характеризуются отрицательными значениями звездной величины: –12,54 (Луна), –26,59 (Солнце).

Другой областью применения логарифмического масштаба являются процессы, при которых изменение величины пропорционально самой величине. К числу таких процессов относятся поглощение света однородной средой, апериодический разряд конденсатора на сопротивление, затухание сигнала вдоль трансляционной линии, цепная химическая или ядерная реакция. В первых примерах соответствующая величина убывает с расстоянием или временем, в последнем – возрастает. В общем виде закон изменения соответствующей величины может быть представлен как

$$A = A_0 a^{kx}.$$

Здесь A_0 – начальное значение данной величины; A – ее значение при значении аргумента (расстояния, времени и т.п.), равном x; k – коэффициент, характеризующий "темп" данного процесса (коэффициент поглощения, затухания, усиления и т.п.); a – основание логарифмов, которое принято для описания данного процесса. Коэффициент k может быть как отрицательным (поглощение, затухание), так и положительным (усиление, развитие). Очень часто в качестве значения a принимают основание натуральных логарифмов e, однако, разумеется, может быть принято любое другое число, например 10 или 2, при соответствующем выборе коэффициента k.

Для характеристики высоты звука, как уже указывалось в гл. 6, применяется логарифмическая шкала с основанием 2. Такая же шкала применяется при описании радиоактивного распада в случае использования в качестве меры времени периода полураспада. Уровень интенсивности звука (звуковой мощности) измеряется либо в белах (основание логарифмов 10), либо в децибелах (основание логарифмов $\sqrt[10]{10} = 1{,}259\ldots$), либо в неперах (основание логарифмов число $e = 2{,}718\ldots$).

Распространение применения логарифмических единиц не прошло вполне гладко и сопровождалось некоторой путаницей. В то время как в акустике децибелы и неперы служили для измерения разности уровней мощности, в электротехнике и радиотехнике при описании затухания вдоль электрической линии децибелами измерялось изменение уровня мощности, а неперами – изменение уровня напряженности поля. Так как мощность пропорциональна квадрату амплитуды напряженности поля, то для отношения двух мощностей можно написать

$$P_1/P_2 = E_1^2/E_2^2$$

или, логарифмируя,

$$\lg\frac{P_1}{P_2} = 2\lg\frac{E_1}{E_2} = 2\cdot 0{,}4343\ln\frac{E_1}{E_2}.$$

Поэтому если в акустике 1 Б = 2,303 Нп (см. (6.12)) или 1 дБ = 0,2303 Нп, то в электротехнике 1 дБ = 0,1151 Нп. В последнее время в акустических измерениях, в частности в шумомерах, принимается то же соотношение, что и в электротехнике.

§ 10.2. Децилоги

Двойственность логарифмических единиц распространилась частично и на сами децибелы, которыми стали измерять как изменение мощности, так и изменение напряженности поля, напряжения и т.п. Эта путаница побудила предложить логарифмическую единицу, при применении которой каждый раз следует указывать, к какой именно величине она относится. Был высказан ряд предложений о характере и названии этой единицы. Наибольшее признание получила единица, которую назвали "децилог", численно совпадающая с децибелом, но применяющаяся с соответствующим указанием к любым величинам.

Применение децилогов позволило бы заменить операции умножения и деления сложением и вычитанием. При этом даже окончательный результат можно выражать непосредственно в децилогах. Что касается децибела, то его решено сохранить только для измерения уровней мощности. При таком определении децилога можно, например, сказать, что один децилог силы тока равен одному децилогу напряжения минус один децилог сопротивления. Согласно сказанному децилог можно определить либо как 10 десятичных логарифмов данной величины, либо как логарифм этой величины при основании $\sqrt[10]{10}$. При записи величины, измеренной в децилогах, обязательно следует указывать индексом, о какой единице идет речь. Так, например, мощность, измеренная в киловаттах и записанная децилогами, должна обозначаться

$$\mathrm{dlg}_{\text{кВт}}.$$

Проиллюстрируем сказанное примером. Определим мощность тока при напряжении 2 кВ и токе 10 А:

$$P\,\mathrm{dlg}_{\text{кВт}} = 3{,}01\,\mathrm{dlg}_{\text{кВ}} + 10\,\mathrm{dlg}_{\text{А}} = 13{,}01\,\mathrm{dlg}_{\text{кВт}}.$$

В практике измерений децилог не применялся.

§ 10.3. Логарифмические единицы в теории информации

Несколько особняком стоит специальная двоичная логарифмическая единица бит, применяемая в теории информации. Если данная информация определяется из возможного числа n равновероятных событий, то мера этой информации дается выражением

$$N = \log_2 n.$$

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется колода, содержащая 32 карты – от тройки до десятки. Предположим, что задумана шестерка пик. Сколько требуется задать вопросов, на которые может быть дан ответ "да" или "нет", чтобы узнать задуманную карту? Каждый ответ, очевидно, уменьшает неопределенность в два раза. Схема вопросов и ответов может быть, например, следующая:

Вопрос	*Ответ*
1. Черная масть?	Да.
2. Трефы?	Нет.
3. Четная?	Да.
4. Делится на четыре?	Нет.
5. Шестерка?	Да.

Легко видеть, что во всех случаях достаточно задать пять вопросов, чтобы получить правильный ответ. Так, если бы была задумана пятерка, то на третий вопрос был бы ответ "нет", а вместо четвертого можно было задать вопрос, делится ли на три. Возможность получить правильный ответ после пятикратного разделения на два возможных варианта выражают утверждением, что знание определенной карты из 32 содержит информацию 5 бит. Знание определенной клетки шахматной доски содержит, очевидно, $\log_2 64 = 6$ бит и т.п.

В теории информации наряду с двоичной единицей битом применяется натуральная единица нат – натуральный логарифм равновероятных возможностей. Очевидно,

$$N_{\text{нат}} = N_{\text{бит}} \ln 2 = 0{,}693\, N_{\text{бит}}.$$

Разумеется, возможна оценка информации и неравновероятных событий. Например, при бросании двух игральных костей сообщение о том, что сумма очков равна трем, содержит

$$N = \log_2 \frac{36}{2} = 4{,}17 \text{ бит} = 2{,}89 \text{ нат}.$$

При сумме очков семь

$$N = \log_2 \frac{36}{6} = 2{,}58 \text{ бит} = 1{,}79 \text{ нат}.$$

§ 10.4. Водородный показатель

Своеобразную логарифмическую величину представляет так называемый водородный показатель pH, характеризующий активность растворов электролитов. Последняя зависит от концентрации ионов в растворе. Однако эта зависимость не вполне однозначна из-за взаимодействия между ионами. Поэтому характеристикой активности концентрация может служить лишь в сильно разбавленных растворах. При больших значениях концентрации вводится понятие эквивалентной концентрации, представляющей собой произведение истинной концентрации на коэффициент активности, меньший единицы. Поскольку как истинная, так и эквивалентная концентрация ионов может изменяться в весьма широких пределах, пользуются логарифмической шкалой. Измеряемый по этой шкале водородный показатель (обозначается pH) равен взятому с обратным знаком логарифму активности или эквивалентной концентрации ионов водорода (измеренной в грамм-эквивалентах на литр). Так как концентрация водорода в воде (и химически нейтральных средах) равна 10^{-7}, то для воды pH = 7. В кислых средах концентрация ионов водорода выше и соответственно pH $<$ 7, а в щелочных, наоборот, pH $>$ 7.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Фундаментальные физические постоянные*)

В настоящем приложении приводятся значения наиболее важных фундаментальных физических постоянных. Те из них, смысл которых достаточно очевиден, даются без пояснений. В других случаях приводится либо ссылка на соответствующие формулы основного текста книги, либо объясняется происхождение и физический смысл постоянной. Кроме того, поскольку некоторые постоянные взаимно связаны, даются формулы, в которых одни постоянные выражены через другие.

Гравитационная постоянная

$G = 6{,}6720\,(4) \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 $= 6{,}6720\,(4) \cdot 10^{-8}$ дин $\cdot$ см^2/г^2.

Скорость света в вакууме

$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с $= 2{,}99792458 \cdot 10^{10}$ см/с.

Магнитная постоянная

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 1{,}25663706 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Электрическая постоянная

$\epsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} = 8{,}85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Элементарный заряд

$e = 1{,}6021892\,(46) \cdot 10^{-19}$ Кл $= 4{,}8032 \cdot 10^{-10}$ СГС.

Постоянная Авогадро (число Авогадро) – число структурных элементов (атомов, молекул, ионов и др.) в моле вещества:

$N_{\text{А}} = 6{,}02205\,(3) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

---

*) Фундаментальные физические постоянные даны по ГСССД 1–76. – М.: Изд-во стандартов, 1979.

Постоянная Лошмидта (число Лошмидта) – число молекул в единице объема вещества, находящегося в состоянии идеального газа при нормальных условиях ($T_0 = 273{,}15$ К, $p_0 = 1{,}01325 \cdot 10^5$ Па)

$N_Л = 2{,}68675 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ $= 2{,}68675 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$.

Постоянная Фарадея (число Фарадея) – произведение постоянной Авогадро на элементарный электрический заряд:

$F = eN_А = 96484{,}6\,(3)$ Кл/моль $= 2{,}89253\,(1) \cdot 10^{14}$ СГС/моль.

Атомная единица массы – одна двенадцатая часть массы изотопа углерода с массовым числом 12:

1 а.е.м. $= 1{,}660566(9) \cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}660566(9) \cdot 10^{-24}$ г.

Энергия, эквивалентная атомной единице массы,

1 (а.е.м.) $c^2 = 1{,}492441\,(9) \cdot 10^{-10}$ Дж $=1{,}492441(9) \cdot 10^{-3}$ эрг =

= 931,502 (3) МэВ.

Масса покоя электрона

$m_e = 9{,}10953\,(5) \cdot 10^{-31}$ кг $= 9{,}10953\,(5) \cdot 10^{-28}$ г =

$= 5{,}485803\,(2) \cdot 10^{-4}$ а.е.м.*)

Энергия, эквивалентная массе покоя электрона,

$m_e c^2 = 8{,}18724\,(5) \cdot 10^{-14}$ Дж $= 8{,}18724\,(5) \cdot 10^{-7}$ эрг =

= 0,511003 (2) МэВ.

Масса покоя протона

$m_p = 1{,}672649\,(9) \cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}672649\,(9) \cdot 10^{-24}$ г =

= 1,00727647 (1) а.е.м.

Энергия, эквивалентная массе покоя протона,

$m_p c^2 = 1{,}503301\,(9) \cdot 10^{-10}$ Дж $= 1{,}503301\,(9) \cdot 10^{-3}$ эрг =

= 938,279 (3) МэВ.

---

*) Погрешность определения абсолютных значений масс электрона и атомных частиц (в килограммах или граммах) выше, чем погрешность определения относительных масс (в атомных единицах массы), так как ограничена погрешностью определения числа Авогадро.

Масса покоя нейтрона

$m_n = 1{,}674954(9)\cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}674954(9)\cdot 10^{-24}$ г $=$

$= 1{,}00866501(4)$ а.е.м.

Энергия, эквивалентная массе покоя нейтрона,

$m_n c^2 = 1{,}505373(9)\cdot 10^{-10}$ Дж $= 1{,}505373(9)\cdot 10^{-3}$ эрг $=$

$= 939{,}573(3)$ МэВ.

Отношение заряда электрона к его массе

$e/m_e = 1{,}758805(5)\cdot 10^{11}$ Кл/кг $= 5{,}272764(9)\cdot 10^{-17}$ СГС/г.

Постоянная Планка

$h = 6{,}626176(36)\cdot 10^{-34}$ Дж · с $= 6{,}626176(36)\cdot 10^{-27}$ эрг · с,

$\hbar = h/2\pi = 1{,}0545887(57)\cdot 10^{-34}$ Дж · с $=$

$= 1{,}0545887(57)\cdot 10^{-27}$ эрг · с.

Постоянная тонкой структуры. Исследование спектральных линий водорода с помощью приборов высокой разрешающей способности показало, что эти линии обладают тонкой структурой, т.е. состоят из нескольких линий, весьма близко расположенных друг к другу. Тонкая структура объясняется при учете теории относительности и собственного магнитного момента электрона. Добавочная энергия, создающая расщепление линий, определяется выражением, в которое входит безразмерный множитель, называемый постоянной тонкой структуры. Его выражение

$\alpha = \mu_0 c e^2/2h$ (СИ),

$\alpha = e^2/\hbar c$ (СГС)

и числовое значение

$\alpha = 0{,}007297351(6)$.

Обратное значение постоянной тонкой структуры

$1/\alpha = 137{,}0360(1)$.

Комптоновская длина волны. При рассеянии рентгеновских лучей на свободных электронах происходит изменение длины волны, обусловленное обменом энергией и импульсом между фотоном и электроном. Это изменение определяется формулой

$\Delta\lambda = \lambda_C(1 + \cos\theta)$,

где θ – угол отклонения фотона от первоначального направления, а λ_C – комптоновская длина волны:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2{,}426309(4) \cdot 10^{-12}\ \text{м} = 2{,}426309 \cdot 10^{-3}\ \text{нм}.$$

Иногда в уравнения вводят величину, в 2π раз меньшую:

$$\lambdabar_C = \frac{\lambda_C}{2\pi} = 0{,}3861590(6) \cdot 10^{-12}\ \text{м} = 0{,}3861590(6) \cdot 10^{-3}\ \text{нм}.$$

Постоянная Ридберга. Формула (9.32) определяет волновые числа спектральных линий водородоподобного атома. Входящая в эту формулу постоянная Ридберга определяется выражением

$$R = \frac{m_e e^4}{4\pi \hbar^3 c}\left(\lambda + \frac{m_e}{M}\right),$$

где M – масса ядра атома. Для ядра бесконечной массы

$$R_\infty = 10973731{,}8(8)\ \text{м}^{-1} = 109737{,}318(8)\ \text{см}^{-1}.$$

Радиус Бора – радиус первой (основной) орбиты электрона в атоме водорода по "классической" теории Бора:

$$a_0 = \alpha/4\pi R_\infty = 0{,}5291771(4) \cdot 10^{-10}\ \text{м} = 0{,}05291771(4)\ \text{нм}.$$

Магнетон Бора. Электрон, обращающийся по круговой орбите, в "классической" теории Бора представляет собой круговой ток, обладающий магнитным моментом. Для основной орбиты этот момент называется магнетоном Бора. Определение магнетона Бора дано в § 9.2:

$$\mu_B = 9{,}27408(4) \cdot 10^{-24}\ \text{Дж/Тл} = 9{,}27408(4) \cdot 10^{-21}\ \text{эрг/Гс}.$$

Магнитный момент электрона

$$\mu_e = 9{,}28483(4) \cdot 10^{-24}\ \text{Дж/Тл} = 9{,}28483(4) \cdot 10^{-21}\ \text{эрг/Гс}.$$

Объем 1 моля идеального газа при нормальных условиях (нормальный объем газа, T_0 = 273,16 К, p_0 = 101 325 Па)

$$V_0 = 22{,}41383(7) \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3\ \text{моль}^{-1}.$$

Универсальная газовая постоянная (молярная газовая постоянная). Уравнение Клапейрона – Менделеева устанавливает связь между температурой, давлением, объемом и количеством молей газа:

$$pV = R\frac{m}{M}T,$$

где R – универсальная (молярная) газовая постоянная. Строго говоря, уравнение Клапейрона – Менделеева справедливо для идеального газа, но практически хорошо оправдывается при не слишком больших давлениях и не слишком низких температурах. Из уравнения Клапейрона – Менделеева можно определить универсальную газовую постоянную, если известен объем данного количества молей газа при заданных условиях. Этот объем (нормальный объем) известен при нормальных условиях. Подставляя в уравнение

$$R = p_0 V_0 / T_0$$

соответствующие значения, выраженные в разных единицах, найдем

$$R = 8{,}3144(3)\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)} = 8{,}3144(3)\cdot 10^7\ \text{эрг/(моль}\cdot\text{К)}.$$

Универсальная газовая постоянная численно равна работе расширения одного моля газа на один градус при постоянном давлении.

Постоянная Больцмана может быть определена как отношение универсальной газовой постоянной к постоянной Авогадро:

$$k_{\text{Б}} = \frac{R}{N_{\text{А}}} = 1{,}38067(4)\cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К} = 1{,}38067(4)\cdot 10^{-16}\ \text{эрг/К}.$$

Постоянная Стефана – Больцмана (формулы (5.7) и (8.9))

$$\sigma = 5{,}6703(7)\cdot 10^{-8}\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К}^4) =$$

$$= 5{,}6703(7)\cdot 10^{-5}\ \text{эрг/(с}\cdot\text{см}^2\cdot\text{К}^4).$$

Постоянная Вина (формула (5.8))

$$b = 2{,}8978(1)\cdot 10^{-3}\ \text{м}\cdot\text{К} = 0{,}28978(1)\ \text{см}\cdot\text{К}.$$

Постоянную в законе Стефана – Больцмана можно связать с постоянной Планка и скоростью света, если проинтегрировать формулу Планка по частотам или по длинам волн и определить коэффициент при

$$\sigma = 1{,}0823\,\frac{12\pi k^4}{c^2 h^3}.$$

Точно так же может быть определена постоянная в законе смещения Вина, если продифференцировать формулу Планка по длинам волн и найти положение максимума. Постоянная при этом имеет вид

$$b = \frac{ch}{4{,}9651\,k_{Б}}.$$

Числа 1,0823 и 4,9651 получаются в процессе решения уравнений.

Соотношение Джозефсона между частотой и напряжением. При приложении напряжения к двум сверхпроводникам, разделенным тонким (порядка одного нанометра) слоем диэлектрика, через образующийся при этом неплотный контакт идет переменный сверхпроводящий ток, частота которого связана с напряжением соотношением

$$\nu = \frac{2e}{h}U,$$

где $2e/h = 4{,}83594\,(1) \cdot 10^{14}$ $Гц/В_{МБ69}$.

П. Наименования, обозначения и размерности единиц физических величин в СИ

Величина		Размерность	Единица	
наименование	обозначение		наименование	обозначение
1	2	3	4	5
Активность радионуклида в источнике	A	T^{-1}	беккерель	Бк
– молярная	$A_{мол}$	$T^{-1}N^{-1}$	беккерель на моль	Бк/моль
– объемная	A_V	$L^{-3}T^{-1}$	беккерель на кубический метр	Бк/м^3
– поверхностная	A_S	$L^{-2}T^{-1}$	беккерель на квадратный метр	Бк/м^2
– удельная	A_m	$M^{-1}T^{-1}$	беккерель на килограмм	Бк/кг
Восприимчивость диэлектрическая	χ	–	–	–
Восприимчивость диэлектрическая абсолютная	$\chi_э$	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м
Восприимчивость магнитная	χ	–	–	–

Время	t, T	T	секунда	с
Вязкость динамическая (коэффициент внутреннего трения)	η, μ	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль-секунда	Па · с
Вязкость кинематическая	ν	$L^{2}T^{-1}$	квадратный метр на секунду	$м^2/с$
Вязкость ударная	a	MT^{-2}	джоуль на квадратный метр	$Дж/м^2$
Градиент давления	grad p	$L^{-2}MT^{-2}$	паскаль на метр	Па/м
Градиент скорости	grad v	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$
Градиент температурный	grad T	$L^{-1}\Theta$	кельвин на метр	К/м
Давление	p	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Длина	l, L	L	метр	м
– волны	λ	L	метр	м
Доза поглощенная ионизирующего излучения	D	$L^{2}T^{-2}$	грэй	Гр
Доза эквивалентная ионизирующего излучения	$H, D_{эк}$	$L^{2}T^{-2}$	зиверт	Зв
Доза экспозиционная фотонного излучения	X	$M^{-1}TI$	кулон на килограмм	Кл/кг

II (продолжение)

1	2	3	4	5
Емкость электрическая (емкость)	C	$L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад	Ф
Излучательность (энергетическая светимость)	$R_э, M_э$	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$
Импульс (количество движения)	p	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг · м/с
Импульс силы	Ft	LMT^{-1}	ньютон-секунда	Н · с
Индуктивность	L	$L^{2}MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн
Индуктивность взаимная	M, L_{12}	$L^{2}MT^{-2}I^{-2}$	"	"
Индукция магнитная	B	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл
Интенсивность звука	$\mathcal{J}, I$	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$
Интенсивность излучения (плотность потока энергии)	M, S	MT^{-3}	"	"
Керма	K	$L^{2}T^{-2}$	грэй	Гр
Количество вещества	N, ν	**N**	**моль**	**моль**

Количество теплоты (теплота)	Q	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
– – удельное	q	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг
Количество электричества (электрический заряд)	Q, q	TI	кулон	Кл
Концентрация молярная	$c_{\text{мол}}$	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	моль/м^3
Концентрация (объемная) частиц	c, n	L^{-3}	метр в минус третьей степени	м$^{-3}$
Коэффициент диффузии	D	L^2T^{-1}	квадратный метр в секунду	м^2/с
Коэффициент затухания	δ, β	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с$^{-1}$
Коэффициент поглощения линейный	a	L^{-1}	метр в минус первой степени	м$^{-1}$
– – массовый	a/ρ	L^2M^{-1}	квадратный метр на килограмм	м^2/кг
Коэффициент температурный давления	β			
– – линейного (объемного) расширения	α, α_l	Θ^{-}	кельвин в минус первой степени	К$^{-1}$
– – сопротивления	γ			

II (продолжение)

1	2	3	4	5
Коэффициент теплопередачи	α	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на квадратный метр-кельвин	Вт/ (м² · К)
Лучистость (энергетическая яркость)	$L_э$, $B_э$	MT^{-3}	ватт на стерадиан-квадратный метр	Вт/ (ср · м²)
Масса	M, m	M	килограмм	кг
Масса молярная	M, μ	MN^{-1}	килограмм на моль	кг/моль
Масса относительная молекулярная	M_r	–		–
Модуль объемного сжатия	k, K	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Модуль продольной упругости (модуль Юнга)	E	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Модуль сдвига (модуль жесткости, твердости)	G	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Момент диполя магнитный	$p_м$	L^2I	ампер-квадратный метр	А · м²
Момент диполя электрический	$p_э$	LTI	кулон-метр	Кл · м

Момент импульса (момент количества движения)	$\mathcal{L}$	L^2MT^{-1}	килограмм-метр в квадрате на секунду	кг · м²/с
Момент инерции динамический	I, J	L^2M	килограмм-метр в квадрате	кг · м²
Момент инерции осевой	J_z	L^4	метр в четвертой степени	м⁴
– – полярный	J_b			
Момент силы (момент пары сил, вращающий момент)	$M, \mathcal{M}$	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	Н · м
Момент сопротивления плоской фигуры	Z, S_z	L^3	метр в третьей степени	м³
Мощность	P, N	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Мощность кермы	$\dot{K}$	L^2T^{-3}	грэй в секунду	Гр/с
Мощность поглощенной дозы ионизирующего излучения (мощность дозы излучения)	$\dot{D}$	L^2T^{-3}	грэй в секунду	Гр/с
Мощность эквивалентной дозы ионизирующего излучения	$\dot{H}$	L^2T^{-3}	зиверт в секунду	Зв/с

II (продолжение)

1	2	3	4	5
Мощность экспозиционной дозы фотонного излучения	$\dot{X}$	$M^{-1}I$	ампер на килограмм	А/кг
Намагниченность (интенсивность намагничивания)	J, H_I	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м
Напряжение механическое	τ, σ	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Напряженность магнитного поля	H	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м
Напряженность электрического поля	E	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м
Натяжение поверхностное	σ, γ	MT^{-2}	ньютон на метр, джоуль на квадратный метр	Н/м
Облученность (энергетическая освещенность)	$E, E_э$	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м^2
Объем (вместимость)	V	L^3	кубический метр	м^3

– молярный	$V_{\text{мол}}$	L^3N^{-1}	кубический метр на моль	$м^3$/моль
– удельный	v	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	$м^3$/кг
Освечивание	C	JT	кандела-секунда	кд · с
Освещенность	E	$L^{-2}J$	люкс	лк
Период	T, τ	T	секунда	с
Плотность	ρ	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$
Плотность звуковой энергии	E, w	$L^{-1}MT^{-2}$	джоуль на кубический метр	$Дж/м^3$
Плотность линейная	ρ_l	$L^{-1}M$	килограмм на метр	кг/м
Плотность поверхностная	ρ_S	$L^{-2}M$	килограмм на квадратный метр	$кг/м^2$
Плотность потока излучения поверхностная	$d\Phi_э/dS$	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$
Плотность потока ионизирующих частиц	$\varphi_n = d\Phi_n/dS$	$L^{-2}T^{-1}$	секунда в минус первой степени-метр в минус второй степени	$с^{-1} \cdot м^{-2}$
Плотность потока энергии ионизирующих частиц	$\varphi = d\Phi/dS$	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$
Плотность теплового потока объемная	q_V	$L^{-1}MT^{-3}$	ватт на кубический метр	$Вт/м^3$

II (продолжение)

1	2	3	4	5
Плотность теплового потока поверхностная	q_S	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м²
Плотность электрического заряда линейная	τ	$L^{-1}TI$	кулон на метр	Кл/м
Плотность электрического заряда поверхностная	σ	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²
Плотность электрического заряда пространственная (объемная)	ρ, η	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м³
Плотность электрического тока	j, J	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	А/м²
Плотность энергии излучения объемная (плотность лучистой энергии)	w, u	$L^{-1}MT^{-2}$	джоуль на кубический метр	Дж/м³

Плотность электромагнитной энергии (плотность энергии электромагнитного поля)	w, u	$L^{-1}MT^{-2}$	джоуль на кубический метр	Дж/м^3
Площадь	S, A	L^2	квадратный метр	м^2
Подвижность	b, μ	$M^{-1}T^{2}I$	квадратный метр на вольт-секунду	м^2/(В · с)
Поляризованность (интенсивность поляризации)	P	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м^2
Поляризуемость	α	$M^{-1}T^{4}I^{2}$	кулон-квадратный метр на вольт	Кл · м^2/В
Потенциал электрический, разность электрических потенциалов (электрическое напряжение)	φ, U, V	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В
Поток звуковой энергии (звуковая мощность)	Ф	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Поток излучения (мощность излучения)	$Ф_э$	L^2MT^{-3}	ватт	Вт

II (продолжение)

1	2	3	4	5
Поток магнитный (поток магнитной индукции)	$\Phi = BS$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб
Потокосцепление (полный магнитный поток)	$\Psi = N\Phi$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб
Поток световой	Φ	J	люмен	лм
Поток (ионизирующих) частиц	Φ_r	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$
Поток тепловой (тепловая мощность)	$\Phi = dQ/dt$	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Поток электрического смещения	Ψ, Ψ_D	TI	кулон	Кл
Поток энергии ионизирующих частиц	$\Phi = dE/dt$	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Проводимость магнитная	Λ, λ	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн

Проводимость электрическая активная	G	$L^{-2}M^{-1}T^{3}I^{2}$	сименс	См
Проводимость электрическая комплексная (полная)	Y			
Проводимость электрическая реактивная	B			
– – удельная	σ, λ	$L^{-3}M^{-1}T^{3}I^{2}$	сименс на метр	См/м
Проницаемость диэлектрическая	ϵ	—	—	—
Проницаемость диэлектрическая абсолютная	$\epsilon_{a} = \epsilon_{0}\epsilon$	$L^{-3}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад на метр	Ф/м
Проницаемость магнитная	μ	—	—	—
Проницаемость магнитная абсолютная	$\mu_{a} = \mu_{0}\mu$	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м
Работа	A	$L^{2}MT^{-2}$	джоуль	Дж
– удельная	a	$L^{2}T^{-2}$	джоуль на килограмм	Дж/кг
Расход массовый	Q_{m}, m_{t}	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с

П (продолжение)

1	2	3	4	5
Расход объемный	Q_V, V_t	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	$м^3/с$
Светимость	M	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	$лм/м^2$
Сечение эффективное	σ	L^2	квадратный метр	$м^2$
– – дифференциальное	$\sigma_{диф}$	L^2	квадратный метр на стерадиан	$м^2/ср$
Сила	F	LMT^{-2}	ньютон	Н
Сила излучения (энергетическая сила света)	$J_э$, $I_э$	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	Вт/ср
Сила магнитодвижущая	F	I	ампер	А
Сила оптическая (линзы)	D	L^{-1}	метр в минус первой степени	$м^{-1}$
Сила света	J, I	J	кандела	кд
Сила тяжести (вес)	P, mg	LMT^{-2}	ньютон	Н
Сила электрического тока	I	I	ампер	А
Сила электродвижущая (ЭДС)	$\mathcal{E}$, E	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В

Скорость (линейная)	v, u	LT^{-1}	метр в секунду	м/с
Скорость звука (обьемная)	c, V	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	$м^3/с$
Скорость угловая	ω	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с
Смещение электрическое	D	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	$Кл/м^2$
Сопротивление акустическое	$Z_а, R_а$	$L^{-4}MT^{-1}$	паскаль-секунда на кубический метр	$Па \cdot с/м^3$
– – удельное	Z_s, η	$L^{-2}MT^{-1}$	паскаль-секунда на метр	$Па \cdot с/м$
Сопротивление магнитное	$R_М$	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	генри в минус первой степени	$Гн^{-1}$
Сопротивление механическое (в акустике)	$R_М$	MT^{-1}	ньютон- секунда на метр	$Н \cdot с/м$
Сопротивление электрическое активное	R			
Сопротивление электрическое комплексное (полное)	Z	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом
Сопротивление электрическое реактивное	X			

II (продолжение)

1	2	3	4	5
Сопротивление электрическое удельное	ρ, δ	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом-метр	Ом · м
Текучесть	φ	$LM^{-1}T$	паскаль в минус первой степени-секунда в минус первой степени	$Па^{-1} \cdot с^{-1}$
Температура термодинамическая	T, θ	Θ	**кельвин**	**К**
Температуропроводность	α, a	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	$м^2/с$
Теплоемкость	C	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К
– молярная	$c_{мол}$	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/ (моль · К)
– объемная	$c_{об}$	$L^{-1}MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кубический метр-кельвин	Дж/ ($м^3$ · К)
– удельная	$c_{уд}$			
– – при постоянном объеме, при постоянном давлении	c_V, c_p	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/ (кг · К)

Теплопроводность	λ, k	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м · К)
Теплота фазового превращения	Λ	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
– – – молярная	$\Lambda_{мол}$	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль
– – – удельная	λ	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг
Угол плоский	φ	–	радиан	рад
Угол телесный	Ω	–	стерадиан	ср
Ускорение	a, w	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$
Ускорение угловое	ϵ, φ	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	$рад/с^2$
Частота круговая	ω, n	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$
Частота периодического процесса	f, ν	T^{-1}	герц	Гц
Экспозиция лучистая (энергетическая экспозиция)	$H_э$	MT^{-2}	джоуль на квадратный метр	$Дж/м^2$
Экспозиция световая (количество освещения)	H_V	$L^{-2}TJ$	люкс-секунда	лк · с
Энергия	W	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
– внутренняя	U	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
– – молярная	$W_{мол}, U_{мол}$	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль

II (окончание)

1	2	3	4	5
Энергия внутренняя удельная	u, w	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг
–кинетическая	$W_к$, $E_к$, K, T	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
–потенциальная	$W_п$, $E_п$, $П$, V			
Энергия (ионизирующего) излучения (ионизирующих частиц)	E, W	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Энергия световая	Q, Q_V	TJ	люмен-секунда	лм · с
Энтальпия	H	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
–молярная	$H_{мол}$	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль
– удельная	h	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг

Энтропия	S	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К
– молярная	$S_{мол}$	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/(моль К)
– удельная	s	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг К)
Эффективность абсолютная световая (абсолютная видность)	$V, \mathcal{V}$	V	–	–
Эффективность относительная световая (относительная видность)	K	–	–	–
Яркость	L, B	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	кд/м^2

III. Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

Наименование	Множитель	Обозначение	Наименование	Множитель	Обозначение
экса	10^{18}	Э	гекто	10^{2}	г
пета	10^{15}	П	дека	10	да
тера	10^{12}	Т	деци	10^{-1}	д
гига	10^{9}	Г	санти	10^{-2}	с
мега	10^{6}	М	милли	10^{-3}	м
кило	10^{3}	к			

Наименование	Множитель	Обозначение
микро	10^{-6}	мкм
нано	10^{-9}	н
пико	10^{-12}	п
фемто	10^{-15}	ф
атто	10^{-18}	а

IV. Единицы геометрических и механических величин

Величина		Размерность	Обозначение единицы	
наименование	обозначение и определяющее уравнение		СИ	СГС
1	2	3	4	5
Длина	l	L	м	см
Площадь	$S = l^2$	L^2	$м^2$	$см^2$
Объем	$V = l^3$	L^3	$м^3$	$см^3$
Плоский угол	$\varphi = l/r$	1	рад	рад
Телесный угол	$\Omega = S/r^2$	1	ср	ср
Кривизна линии	$\rho = 1/r$	L^{-1}	$м^{-1}$	$см^{-1}$
Гауссова кривизна	$K = 1/r^2$	L^{-2}	$м^{-2}$	$см^{-2}$
Момент сопротивления плоской фигуры	$S_z = \int\limits_S r dS$	L^3	$м^3$	$см^3$
Осевой и полярный моменты инерции площади плоской фигуры	$J_{z,p} = \int\limits_S r^2 ds$	L^4	$м^4$	$см^4$
Время	t	T	с	с
Скорость	$v = l/t$	LT^{-1}	м/с	см/с
Ускорение	$a = (v_2 - v_1)/t$	LT^{-2}	$м/с^2$	$см/с^2$

IV. (продолжение)

1	2	3	4	5
Угловая скорость	$\omega = \varphi/t$	T^{-1}	рад/с	рад/с
Угловое ускорение	$\epsilon = (\omega_2 - \omega_1)/t$	T^{-2}	рад/с^2	рад/с^2
Период	$\tau = 2\pi/\omega$	T	с	с
Частота периодического процесса	$\nu = 1/\tau$	T^{-1}	Гц	Гц
Объемный расход	$Q_V = dV/dt$	$L^3 T^{-1}$	м^3/с	см^3/с
Плотность объемного расхода	$q_V = Q_V/S$	LT^{-1}	м/с	см/с
Градиент скорости	$\mathrm{grad}\, v = dv/dl$	T^{-1}	с$^{-1}$	с$^{-1}$
Масса	$m = F/a$	M	кг	г
Сила	$F = ma$	LMT^{-2}	Н	дин
Импульс силы	Ft	LMT^{-1}	Н · с	дин · с
Количество движения (импульс)	mv	LMT^{-1}	кг · м/с	г · см/с
Давление	$p = F/S$	$L^{-1}MT^{-2}$	Па	дин/см^2
Градиент давления	$\mathrm{grad}\, p = dp/dl$	$L^{-2}MT^{-2}$	Па/м	дин/см^3
Работа и энергия	$A = Fl\cos(\widehat{F, l})$	L^2MT^{-2}	Дж	эрг
Объемная плотность энергии	$w = W/V$	$L^{-1}MT^{-2}$	Дж/м^3	эрг/см^3
Мощность	$P = A/t$	L^2MT^{-3}	Вт	эрг/с
Коэффициент трения	$\mu = F_{\text{тр}}/F_{\text{н}}$	—	—	—
Коэффициент сопротивления	$r = F/v$	MT^{-1}	кг/с	г/с

Жесткость	$k = -F/x$	MT^{-2}	Н/м	дин/см
Момент силы	$\mathcal{M} = Fh$	L^2MT^{-2}	Н · м	дин · см
Момент инерции (динамический)	$J = \int\limits_V r^2 dm$	L^2M	кг · м^2	г · см^2
Импульс момента силы	$\mathcal{M} t$	L^2MT^{-1}	Н · м · с	дин · см · с
Момент количества движения (момент импульса)	$\mathfrak{L} = mvr = J\omega$	L^2MT^{-1}	кг · м^2/с	г · см^2/с ·
Массовый расход	$Q_m = dm/dt$	MT^{-1}	кг/с	г/с
Плотность массового расхода (массовая скорость потока)	$q_m = Q_m/S$	$L^{-2}MT^{-1}$	кг/(с · м^2)	г/(с · см^2)
Коэффициент затухания	β	T^{-1}	с$^{-1}$	с$^{-1}$
Декремент колебаний (логарифмический декремент)	$\delta = \beta\tau$	–	–	–
Добротность	$Q = \dfrac{1}{2\beta}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	–	–	–
Плотность	$\rho = m/V$	$L^{-3}M$	кг/м^3	г/см^3
Поверхностная плотность	m/S	$L^{-2}M$	кг/м^2	г/см^2
Линейная плотность	m/l	$L^{-1}M$	кг/м	г/см
Удельный объем	$v = V/m$	L^3M^{-1}	м^3/кг	см^3/г
Удельный вес	$\gamma = F/V$	$L^{-2}MT$	Н/м^3	дин/см^3
Количество вещества	N, ν	N	моль	–
Относительная молекулярная масса (молекулярная масса)	M_r	–	–	–

IV (окончание)

1	2	3	4	5
Молярная масса	M	MN^{-1}	кг/моль	–
Молярный объем	$V_{\text{мол}}$	L^3N^{-1}	$м^3$/моль	
Модуль продольной упругости (модуль Юнга)	$E = Fl_0/(S\Delta l)$	$L^{-1}MT^{-2}$	Па	дин/$см^2$
Модуль объемного сжатия	$K = -V\dfrac{up}{dV}$	$L^{-1}MT^{-2}$	Па	дин/$см^2$
Модуль сдвига	$G = F/S\gamma = \tau/\gamma$	$L^{-1}MT^{-2}$	Па	дин/$см^2$
Динамическая вязкость	$\mu = -\dfrac{F}{S\,dv/dt}$	$L^{-1}MT^{-1}$	Па · с	П
Кинематическая вязкость	$\nu = \mu/\rho$	L^2T^{-1}	$м^2$/с	$см^2$/с
Поверхностное натяжение	$\sigma = F/l$	MT^{-2}	Н/м = Дж/$м^2$	дин/см = = эрг/$см^2$
Концентрация	$n = 1/V$	L^{-3}	$м^{-3}$	$см^{-3}$
Коэффициент диффузии	$D = -\dfrac{\Delta m}{S\Delta t\,d\rho/dl}$	L^2T^{-1}	$м^2$/с	$см^2$/с

Связь между единицами длины

Единица	км	м	см	мм	мкм	нм
1 км	1	10^{3}	10^{5}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
1 м	10^{-3}	1	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}
1 см	10^{-5}	10^{-2}	1	10	10^{4}	10^{7}
1 мм	10^{-6}	10^{-3}	10^{-1}	1	10^{3}	10^{6}
1 мкм	10^{-9}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-3}	1	10^{3}
1 нм	10^{-12}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-3}	1
1 Å	10^{-13}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-4}	0,1
1 икс-ед.	10^{-16}	10^{-13}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-7}	10^{-4}
1 дюйм	$2{,}54 \cdot 10^{-5}$	$2{,}54 \cdot 10^{-2}$	2,54	25,4	$2{,}54 \cdot 10^{4}$	$2{,}54 \cdot 10^{7}$
1 фут	$3{,}05 \cdot 10^{-4}$	0,305	30,5	$3{,}05 \cdot 10^{2}$	$3{,}05 \cdot 10^{5}$	$3{,}05 \cdot 10^{8}$
1 м. миля	1,85	$1{,}85 \cdot 10^{3}$	$1{,}85 \cdot 10^{5}$	$1{,}85 \cdot 10^{6}$	$1{,}85 \cdot 10^{9}$	$1{,}85 \cdot 10^{12}$

Единица	Å	икс-ед.	дюйм	фунт	м. миля
1 км	10^{13}	10^{16}	$3{,}94 \cdot 10^{4}$	$3{,}28 \cdot 10^{3}$	0,540
1 м	10^{10}	10^{13}	39,4	3,28	$5{,}40 \cdot 10^{-4}$
1 см	10^{8}	10^{11}	0,394	$3{,}28 \cdot 10^{-2}$	$5{,}40 \cdot 10^{-6}$
1 мм	10^{7}	10^{10}	$3{,}94 \cdot 10^{-2}$	$3{,}28 \cdot 10^{-3}$	$5{,}4 \cdot 10^{-7}$
1 мкм	10^{4}	10^{7}	$3{,}94 \cdot 10^{-5}$	$3{,}28 \cdot 10^{-6}$	$5{,}4 \cdot 10^{-10}$
1 нм	10	10^{4}	$3{,}94 \cdot 10^{-8}$	$3{,}28 \cdot 10^{-9}$	$5{,}4 \cdot 10^{-13}$
1 Å	1	10^{3}	$3{,}94 \cdot 10^{-9}$	$3{,}28 \cdot 10^{-10}$	$5{,}4 \cdot 10^{-14}$
1 икс-ед.	10^{-3}	1	$3{,}94 \cdot 10^{-12}$	$3{,}28 \cdot 10^{-13}$	$5{,}4 \cdot 10^{-17}$
1 дюйм	$2{,}54 \cdot 10^{8}$	$2{,}54 \cdot 10^{11}$	1	$8{,}33 \cdot 10^{-2}$	$1{,}37 \cdot 10^{-5}$
1 фут	$3{,}05 \cdot 10^{9}$	$3{,}05 \cdot 10^{12}$	12	1	$1{,}65 \cdot 10^{-4}$
1 м. миля	$1{,}85 \cdot 10^{13}$	$1{,}85 \cdot 10^{16}$	$7{,}29 \cdot 10^{4}$	$6{,}08 \cdot 10^{3}$	1

Связь между единицами площади

Единица	км^2	га	а	м^2	см^2	мм^2
1 км^2	1	100	10^{4}	10^{5}	10^{10}	10^{12}
1 га	10^{-2}	1	10^{2}	10^{4}	10^{8}	10^{10}
1 а	10^{-4}	10^{-2}	1	10^{2}	10^{6}	10^{8}
1 м^2	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1	10^{4}	10^{6}
1 см^2	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	1	10^{2}
1 мм^2	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-2}	1

Связь между единицами плоского угла

Единица	рад	°	′	″
1 рад	1	57,3	$3{,}44 \cdot 10^{3}$	$2{,}06 \cdot 10^{5}$
1°	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$	1	60	$3{,}6 \cdot 10^{3}$
1′	$2{,}91 \cdot 10^{-4}$	$1{,}67 \cdot 10^{-2}$	1	60
1″	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$	$2{,}78 \cdot 10^{-4}$	$1{,}67 \cdot 10^{-2}$	1
1 об (полный угол)	6,28	$3{,}60 \cdot 10^{2}$	$2{,}16 \cdot 10^{4}$	$1{,}30 \cdot 10^{6}$
$1^{\llcorner}$ (прямой угол)	1,57	90	$5{,}40 \cdot 10^{3}$	$3{,}24 \cdot 10^{5}$
1^{g} (гон)	$1{,}57 \cdot 10^{-2}$	0,900	54,0	$3{,}24 \cdot 10^{3}$
1^{c} (метрическая минута)	$1{,}57 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-3}$	0,54	32,4
1^{cc} (метрическая секунда)	$1{,}57 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$5{,}4 \cdot 10^{-3}$	0,324

Единица	об	$\llcorner$	g	c	cc
1 рад	0,159	0,637	63,7	$6{,}37 \cdot 10^{3}$	$6{,}37 \cdot 10^{5}$
1°	$2{,}78 \cdot 10^{-3}$	$1{,}11 \cdot 10^{-2}$	1,11	$1{,}11 \cdot 10^{2}$	$1{,}11 \cdot 10^{4}$
1′	$4{,}63 \cdot 10^{-5}$	$1{,}85 \cdot 10^{-4}$	$1{,}85 \cdot 10^{-2}$	1,85	$1{,}85 \cdot 10^{2}$
1″	$7{,}72 \cdot 10^{-7}$	$3{,}09 \cdot 10^{-6}$	$3{,}09 \cdot 10^{-4}$	$3{,}09 \cdot 10^{-2}$	3,09

Единица	об	∟	g	c	cc
1 об (полный угол)	1	4	$4 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^6$
$1^{∟}$ (прямой угол)	0,25	1	10^2	10^4	10^6
1^g (гон)	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	1	10^2	10^4
1^c (метрическая минута)	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	10^{-2}	1	10^2
1^{cc} (метрическая секунда)	$2{,}5 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1

Связь между единицами времени

Единица	с	мин	ч	сут	неделя	год
1 с	1	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}157 \cdot 10^{-5}$	$1{,}653 \cdot 10^{-6}$	$3{,}169 \cdot 10^{-8}$
1 мин	60	1	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	$6{,}944 \cdot 10^{-4}$	$9{,}921 \cdot 10^{-5}$	$1{,}901\ 10^{-6}$
1 ч	$3{,}6 \cdot 10^3$	60	1	$4{,}167 \cdot 10^{-2}$	$5{,}952 \cdot 10^{-3}$	$1{,}141 \cdot 10^{-4}$
1 сут	$8{,}64 \cdot 10^4$	$1{,}44 \cdot 10^{-3}$	24	1	0,1429	$2{,}738 \cdot 10^{-3}$
1 неделя	$6{,}048 \cdot 10^5$	$1{,}008 \cdot 10^4$	168	7	1	$1{,}916 \cdot 10^{-2}$
1 год	$3{,}156 \cdot 10^7$	$5{,}260 \cdot 10^5$	$8{,}766 \cdot 10^3$	365,2	52,18	1

Связь между единицами объема

Единица	$м^3$	л ($дм^3$)	$см^3$	$мм^3$
1 $м^3$	1	10^3	10^6	10^9
1 л ($дм^3$)	10^{-3}	1	10^3	10^6
1 $см^3$	10^{-6}	10^{-3}	1	10^3
1 $мм^3$	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1

Связь между единицами телесного угла

Единица	ср	полный телесный угол	прямой телесный угол	□° (квадратный градус)
1 ср	1	$7{,}96 \cdot 10^{-2}$	0,637	$3{,}28 \cdot 10^3$
1 полный телесный угол (сфера)	12,6	1	8	$4{,}13 \cdot 10^4$
1 прямой телесный угол	1,57	0,125	1	$5{,}16 \cdot 10^3$
1 □° (квадратный градус)	$3{,}05 \cdot 10^{-4}$	$2{,}42 \cdot 10^{-5}$	$1{,}94 \cdot 10^{-4}$	1

Связь между единицами скорости

Единица	м/с	м/мин	см/с	км/ч	уз
1 м/с	1	60	10^2	3,6	1,94
1 м/мин	$1{,}67 \cdot 10^{-2}$	1	1,67	$6 \cdot 10^{-2}$	$3{,}24 \cdot 10^{-2}$
1 см/с	10^{-2}	0,6	1	$3{,}6 \cdot 10^{-2}$	$1{,}94 \cdot 10^{-2}$
1 км/ч	0,278	16,7	27,8	1	0,540
1 уз	0,514	30,9	51,4	1,85	1

Связь между единицами ускорения

Единица	м/с^2	см/с^2	g
1 м/с^2	1	10^2	0,102
1 см/с^2	10^{-2}	1	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$
1 g	9,81	$9{,}81 \cdot 10^2$	1

Связь между единицами угловой скорости и частоты

Единица	рад/с	с$^{-1}$	мин$^{-1}$	°/с
1 рад/с	1	0,159	0,55	57,3
1 с$^{-1}$	6,28	1	60	$3{,}6 \cdot 10^2$
1 мин$^{-1}$	0,105	$1{,}67 \cdot 10^{-2}$	1	6
1 °/с	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$	$2{,}78 \cdot 10^{-3}$	0,167	1

Связь между единицами массы

Единица	кг	г	т
1 т	10^3	10^6	1
1 кг	1	10^3	10^{-3}
1 г	10^{-3}	1	10^{-6}

Связь между единицами силы

Единица	Н	дин
1 Н	1	10^5
1 дин	10^{-5}	1

Связь между единицами давления

Единица	Па	дин/см^2	пз	бар	атм	мм рт.ст.
1 Па	1	10	10^{-3}	10^{-5}	$9,87 \cdot 10^{-6}$	$7,50 \cdot 10^{-3}$
1 дин/см^2 (мкбар)	0,1	1	10^{-4}	10^{-6}	$9,87 \cdot 10^{-7}$	$7,50 \cdot 10^{-4}$
1 пз (пьеза)	10^3	10^4	1	10^{-2}	$9,87 \cdot 10^{-3}$	7,50
1 бар	10^5	10^6	10^2	1	0,987	$7,5 \cdot 10^2$
1 атм	$1,01 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^2$	1,01	1	$7,6 \cdot 10^2$
1 мм рт.ст.	$1,33 \cdot 10^2$	$1,33 \cdot 10^3$	0,133	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$1,32 \cdot 10^{-3}$	1

Связь между единицами работы и энергии

Единица	Дж	эрг	кал	ккал	кВт · ч
1 Дж	1	10^7	0,239	$2,39 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-7}$
1 эрг	10^{-7}	1	$2,39 \cdot 10^{-8}$	$2,39 \cdot 10^{-11}$	$2,78 \cdot 10^{-14}$
1 кал	4,19	$4,19 \cdot 10^7$	1	10^{-3}	$1,16 \cdot 10^{-6}$
1 ккал	$4,19 \cdot 10^3$	$4,19 \cdot 10^{10}$	10^3	1	$1,16 \cdot 10^{-3}$
1 кВт · ч (киловатт-час)	$3,6 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^{13}$	$8,6 \cdot 10^5$	$8,6 \cdot 10^2$	1

Связь между единицами мощности

Единица	Вт	эрг/с	кВт	кал/с	ккал/ч	л.с.
1 Вт	1	10^{7}	10^{-3}	0,239	0,860	$1{,}36 \cdot 10^{-3}$
1 эрг/с	10^{-7}	1	10^{-10}	$2{,}39 \cdot 10^{-8}$	$8{,}60 \cdot 10^{-8}$	$1{,}36 \cdot 10^{-10}$
1 кВт	10^{3}	10^{10}	1	$2{,}39 \cdot 10^{2}$	$8{,}60 \cdot 10^{2}$	1,36
1 кгс · м/с	9,81	$9{,}81 \cdot 10^{7}$	$9{,}81 \cdot 10^{-3}$	2,34	8,43	$1{,}33 \cdot 10^{-2}$
1 кал/с	4,19	$4{,}19 \cdot 10^{7}$	$4{,}19 \cdot 10^{-3}$	1	3,60	$5{,}69 \cdot 10^{-3}$
1 ккал/ч	1,16	$1{,}16 \cdot 10^{7}$	$1{,}16 \cdot 10^{-3}$	0,278	1	$1{,}58 \cdot 10^{-3}$
1 л.с.	$7{,}36 \cdot 10^{2}$	$7{,}36 \cdot 10^{9}$	0,736	$1{,}75 \cdot 10^{2}$	$6{,}32 \cdot 10^{2}$	1

Связь между единицами момента инерции

Единица	кг · м²	г · см²
1 кг · м²	1	10^{7}
1 г · см²	10^{-7}	1

Связь между единицами модулей продольной упругости и сдвига

Единица	Па = Н/м²	дин/см²
1 Па	1	10
1 дин/см²	0,1	1

V. Единицы тепловых величин

Величина		Размерность	Обозначение единиц	
наименование	обозначение		СИ	СГС
1	2	3	4	5
Термодинамическая температура	T	Θ	К	К
Температура по шкале Цельсия	t	Θ	°С	°С
Количество теплоты	Q	L^2MT^{-2}	Дж	эрг
– – удельное	q	L^2T^{-2}	Дж/кг	эрг/г
Температурный градиент	grad T	$L^{-1}\Theta$	К/м	К/см
Тепловой поток (тепловая мощность)	Φ	L^2MT^{-3}	Вт	эрг/с
Поверхностная плотность теплового потока	q	MT^{-3}	Вт/м^2	эрг/(с · см^2)
Энтропия	S	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	Дж/К	эрг/К
– удельная	s	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	Дж/(кг · К)	эрг/(г · К)
– молярная	$S_{мол}$	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	Дж/(моль · К)	эрг/(моль · К)
Энтальпия	H	L^2MT^{-2}	Дж	эрг
– удельная	h	L^2T^{-2}	Дж/кг	эрг/г
– молярная	$H_{мол}$	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	Дж/моль	эрг/моль

V (окончание)

1	2	3	4	5
Теплоемкость системы	C	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	Дж/К	эрг/К
– удельная	$c_{уд}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	Дж/(кГ · К)	эрг/ (г · К)
– молярная	$c_{мол}$	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	Дж/(моль · К)	эрг/(моль · К)
– объемная	$c_{об}$	$L^{-1}MT^{-2}\Theta^{-1}$	Дж/(м^3 · К)	эрг/(см^3 · К)
Удельная теплота фазового превращения	q_m	L^2T^{-2}	Дж/кг	эрг/г
Удельная теплота сгорания газообразного топлива (в расчете на единицу объема)	q_V	$L^{-1}MT^{-2}$	Дж/м^3	эрг/см^3
Теплопроводность	λ	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	Вт/ (м · К)	эрг/(с · см · К)
Коэффициент теплопередачи	α	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	Вт/(м^2 · К)	эрг/(с · см^2 · К)
Температуропроводность	a	L^2T^{-1}	м^2/с	см^2/с

Связь между приведенным давлением и молярной концентрацией

Единица	$м^{-3}$	$л^{-1}$	$см^{-3}$	моль/л = кмоль/$м^3$
1 Па	$2{,}65 \cdot 10^{20}$	$2{,}65 \cdot 10^{17}$	$2{,}65 \cdot 10^{14}$	$4{,}40 \cdot 10^{-7}$
1 дин/$см^2$	$2{,}65 \cdot 10^{19}$	$2{,}65 \cdot 10^{16}$	$2{,}65 \cdot 10^{13}$	$4{,}40 \cdot 10^{-8}$
1 атм	$2{,}69 \cdot 10^{25}$	$2{,}69 \cdot 10^{22}$	$2{,}69 \cdot 10^{19}$	$4{,}46 \cdot 10^{-2}$
1 мм. рт.ст.	$3{,}54 \cdot 10^{22}$	$3{,}54 \cdot 10^{19}$	$3{,}54 \cdot 10^{16}$	$5{,}87 \cdot 10^{-5}$

Связь между единицами удельной теплоемкости

Единица	Дж/(кг · К)	эрг/(г · К)	ккал/(кг · °С) = = кал/(г · °С)
1 Дж/(кг · К)	1	10^4	$2{,}39 \cdot 10^{-4}$
1 эрг/ (г · К)	10^{-4}	1	$2{,}39 \cdot 10^{-8}$
1 ккал/(кг · °С) = = кал/ (г · °С)	$4{,}19 \cdot 10^3$	$4{,}19 \cdot 10^7$	1

Связь между единицами теплопроводности

Единица	Вт/(м · К)	эрг/(с · см · К)	ккал/(ч · м · °С)	кал/(с · см · °С)
1 Вт/(м · К)	1	10^5	0,860	$2{,}39 \cdot 10^{-3}$
1 эрг/(с · см · К)	10^{-5}	1	$8{,}60 \cdot 10^{-6}$	$2{,}39 \cdot 10^{-8}$
1 ккал/(ч · м · °С)	1,16	$1{,}16 \cdot 10^5$	1	$2{,}78 \cdot 10^{-3}$
1 кал/(с · см · °С)	$4{,}19 \cdot 10^2$	$4{,}19 \cdot 10^7$	$3{,}6 \cdot 10^2$	1

Связь между единицами коэффициента теплопередачи

Единица	$Вт/(м^2 \cdot К)$	$эрг/(с \cdot см^2 \cdot К)$	$ккал/(ч \cdot м^2 \cdot °С)$	$кал/(с \cdot см^2 \cdot °С)$
$1\ Вт/(м^2 \cdot К)$	1	10^3	0,860	$2{,}39 \cdot 10^{-5}$
$1\ эрг/(с \cdot см^2 \cdot К)$	10^{-3}	1	$8{,}60 \cdot 10^{-4}$	$2{,}39 \cdot 10^{-8}$
$1\ ккал/(ч \cdot м^2 \cdot °С)$	1,16	$1{,}16 \cdot 10^3$	1	$2{,}78 \cdot 10^{-5}$
$1\ кал/(с \cdot см^2 \cdot °С)$	4,19	$4{,}19 \cdot 10^7$	$3{,}60 \cdot 10^4$	1

VI. Единицы акустических величин

Величина		Размерность	Обозначение единицы
наименование	обозначение		
1	2	3	4
Период звуковых колебаний	T	T	с
Частота звуковых колебаний	ν, f	T^{-1}	Гц
Длина волны	λ	L	м
Звуковая энергия	W	L^2MT^{-2}	Дж
Плотность звуковой энергии	w	$L^{-1}MT^{-2}$	$Дж/м^3$
Поток звуковой энергии (звуковая мощность)	Φ	L^2MT^{-3}	Вт

1	2	3	4
Звуковое давление	$p_а$	$L^{-1}MT^{-2}$	Па
Объемная скорость (звука)	V	L^3T^{-1}	$м^3/с$
Интенсивность звука (сила звука)	$\mathcal{J}, I$	MT^{-3}	$Вт/м^2$
Акустическое сопротивление	$R_а$	$L^{-4}MT^{-1}$	$Па \cdot с/м^3$
Удельное акустическое сопротивление	η	$L^{-2}MT^{-1}$	$Па \cdot с/м$
Механическое сопротивление	$R_м$	MT^{-1}	$Н \cdot с/м$
Уровень звуковой мощности	L_P	1	Б
Уровень громкости звука	L_N	1	фон
Линейный показатель поглощения	δ	1	–
Время реверберации	t, T	T	с

Связь между единицами интервалов частот

Единица	савар	октава	миллиоктава	ν_2/ν_1
1 савар	1	$3{,}32 \cdot 10^{-3}$	3,32	1,0023
1 октава	301	1	1000	2
1 миллиоктава	0,301	10^{-3}	1	1,00069

Музыкальные интервалы

Название тона	Обозначение	Название интервала по отношению к "до"	Чистая гамма			Темперированная гамма	
			частота по отношению к частоте "до"	интервал в саварах	интервал в центах	интервал в саварах	интервал в центах
1	2	3	4	5	6	7	8
до	*C*	тоника	1	0	0	0	0
ре	*D*	секунда	9/8	51,1	204	50,2	200
ми	*E*	терция	5/4	96,9	386	100,4	400
фа	*F*	кварта	4/3	125,0	498	125,5	500
соль	*G*	квинта	3/2	176,1	702	175,6	700
ля	*A*	секста	5/3	221,9	884	225,8	900
си	*H*	септима	15/8	273,0	1088	276,0	1100
до	*C*	октава	2	301,0	1200	301,0	1200

VII. Единицы электрических и магнитных величин

Величина			Размерность				Обозначение единицы	
наименование	обозначение и определяющее уравнение							
	СИ и СГСМ	СГС	СИ	СГС μ_0	СГС	СГС ϵ_0	СИ	СГС
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Электрический заряд (количество электричества)	$Q = It$	$Q = r\sqrt{F_э \epsilon}$	TI	$L^{1/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}\epsilon_0^{1/2}$	Кл	—
Пространственная (объемная) плотность электрического заряда	$\rho = Q/V$		$L^{-3}TI$	$L^{-5/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}\epsilon_0^{1/2}$	Кл/м^3	—
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = Q/S$		$L^{-2}TI$	$L^{-3/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\epsilon_0^{1/2}$	Кл/м^2	—
Напряженность электрического поля	$E = F_э/Q$		$LMT^{-3}I^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}\mu_0^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\epsilon_0^{-1/2}$	В/м	—
Электрическое смещение (электрическая индукция)	$D = \epsilon_0 \epsilon E$	$D = \epsilon E$	$L^{-2}TI$	$L^{-3/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\epsilon_0^{1/2}$	Кл/м^2	—
Поток электрического смещения	$\Psi_D = DS$		TI	$L^{1/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}\epsilon_0^{1/2}$	Кл	—
Электрический потенциал (разность электрических потенциалов (напряжение), электродвижущая сила)	$U = W_п/Q$		$L^2MT^{-3}I^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}\mu_0^{1/2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}\epsilon_0^{-1/2}$	В	—

VII (окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Электрический момент диполя	$p_э = Ql$		LTI	$\mathrm{L^{3/2}M^{1/2}}\mu_0^{-1/2}$	$\mathrm{L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}}$	$\mathrm{L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}}\epsilon_0^{1/2}$	Кл · м	–
Электрическая емкость	$C = Q/U$		$\mathrm{L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}}$	$\mathrm{L^{-1}T^{2}}\mu_0^{-1}$	L	$\mathrm{L}\epsilon_0$	Ф	см
Поляризованность (интенсивность поляризации)	$P = p_э/V$		$\mathrm{L^{-2}TI}$	$\mathrm{L^{-3/2}M^{1/2}}\mu_0^{-1/2}$	$\mathrm{L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}}$	$\mathrm{L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}}\epsilon_0^{1/2}$	Кл/м²	–
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$\epsilon_a = \epsilon_0\epsilon$	ϵ	$\mathrm{L^{-3}M^{-1}T^{4}I^{2}}$	$\mathrm{L^{-2}T^{2}}\mu_0^{-1}$	1	ϵ_0	Ф/м	–
Диэлектрическая восприимчивость	$\chi_э = \dfrac{P}{\epsilon_0 E}$	$\chi_э^{*} = \dfrac{P}{E}$	1	1	1	1	–	–
Сила электрического тока (сила тока)	$I = \sqrt{\dfrac{2\pi rF}{\mu_0\mu l}}$	$I = \dfrac{Q}{t}$	I	$\mathrm{L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}}\mu_0^{-1/2}$	$\mathrm{L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}}$	$\mathrm{L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}}\epsilon_0^{1/2}$	А	–
Плотность электрического тока	$j = I/S$		$\mathrm{L^{-2}I}$	$\mathrm{L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}}\mu_0^{-1/2}$	$\mathrm{L^{-1/2}M^{1/2}T^{-2}}$	$\mathrm{L^{-1/2}M^{1/2}T^{-2}}\epsilon_0^{1/2}$	А/м²	–
Электрическое сопротивление	$R = U/I$		$\mathrm{L^{2}MT^{-3}I^{-2}}$	$\mathrm{LT^{-1}}\mu_0$	$\mathrm{L^{-1}T}$	$\mathrm{L^{-1}T}\epsilon_0^{-1}$	Ом	–
Электрическая проводимость	$G = 1/R$		$\mathrm{L^{-2}M^{-1}T^{3}I^{2}}$	$\mathrm{L^{-1}T}\mu_0^{-1}$	$\mathrm{LT^{-1}}$	$\mathrm{LT^{-1}}\epsilon_0^{-1}$	См	–
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = RS/l$		$\mathrm{L^{3}MT^{-3}I^{-2}}$	$\mathrm{L^{2}T^{-1}}\mu_0$	T	$\mathrm{T}\epsilon_0^{-1}$	Ом · м	–
Удельная электрическая проводимость (электропроводность)	$\sigma = 1/\rho$		$\mathrm{L^{-3}M^{-1}T^{3}I^{2}}$	$\mathrm{L^{-2}T}\mu_0^{-1}$	$\mathrm{T^{-1}}$	$\mathrm{T^{-1}}\epsilon_0$	См/м	$\mathrm{c^{-1}}$

Магнитный поток	$\Phi = BS$		$L^2MT^{-2}I^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}\mu_0^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}\epsilon_0^{-1/2}$	Вб	Мкс
Магнитная индукция (плотность магнитного потока)	$B = F_м/(Il)$	$B = cF_м/(Il)$	$MT^{-2}I^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu_0^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}\epsilon_0^{-1/2}$	Тл	Гс
Напряженность магнитного поля	$H = B/(\mu_0\mu)$	$H = B/\mu$	$L^{-1}I$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu_0^{-1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}\epsilon_0^{1/2}$	А/м	Э
Магнитный момент диполя	$p_м = \mathcal{M}/B = IS$	$p_м = \mathcal{M}/B = (1/c)IS$	L^2I	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}\mu_0^{-1/2}$	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{7/2}M^{1/2}T^{-2}\epsilon_0^{1/2}$	А · м²	—
Магнитодвижущая сила (циркуляция напряженности магнитного поля)	$\mathcal{F} = \oint H\,dl$	$\mathcal{F} = \frac{1}{c}\oint H\,dl$	I	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu_0^{-1/2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}\epsilon_0^{1/2}$	А	Гб
Индуктивность и взаимная индуктивность	$L = \frac{\Psi}{I} = -\frac{\mathcal{E}_i}{dI/dt}$	$L = \frac{c\Psi}{I} = -\frac{c^2\mathcal{E}_i}{dI/dt}$	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	$L\mu_0$	L	$L^{-1}T^2\epsilon_0^{-1}$	Гн	см
Намагниченность (интенсивность намагничивания)	$J = p_м/V$		$L^{-1}I$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu_0^{-1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}\epsilon_0^{1/2}$	А/м	—
Абсолютная магнитная проницаемость	$\mu_a = \mu_0\mu$	μ	$LMT^{-2}I^{-2}$	μ_0	1	$L^{-2}T^2\epsilon_0^{-1}$	Гн	—
Магнитная восприимчивость	$\chi_м = \frac{J}{\epsilon_0 H}$	$\chi_м = \frac{J}{H}$	1	1	1	1	—	—

П р и м е ч а н и я. 1. Все определяющие уравнения приведены для наиболее простых случаев: однородных полей, неизменяющихся токов (за исключением ЭДС индукции) и т.д. 2. Размерности в СГСμ_0 и СГСϵ_0 отличаются от размерностей тех же единиц в СГСМ и СГСЭ добавлением размерностей μ_0 и ϵ_0.

Связь между единицами заряда

Единица	Кл	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 Кл	1	$3 \cdot 10^{9}$	0,1
1 СГС (СГСЭ)	$3{,}34 \cdot 10^{-10}$	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
1 СГСМ	10	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами напряженности электрического поля

Единица	В/м	В/см	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 В/м	1	10^{-2}	$3{,}34 \cdot 10^{-5}$	10^{6}
1 В/см	10^{2}	1	$3{,}34 \cdot 10^{-3}$	10^{8}
1 СГС (СГСЭ)	$3 \cdot 10^{4}$	$3 \cdot 10^{2}$	1	$3 \cdot 10^{10}$
1 СГСМ	10^{-6}	10^{-8}	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$	1

Связь между единицами поверхностной плотности заряда

Единица	Кл/м^2	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 Кл/м^2	1	$3 \cdot 10^{5}$	10^{-5}
1 СГС (СГСЭ)	$3{,}34 \cdot 10^{-6}$	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
1 СГСМ	10^{5}	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами объемной плотности заряда

Единица	Кл/м^3	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 Кл/м^3	1	$3 \cdot 10^{3}$	10^{-7}
СГС (СГСЭ)	$3{,}34 \cdot 10^{-4}$	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
СГСМ	10^{7}	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами электрического смещения

Единица	$Кл/м^2$	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 $Кл/м^2$	1	$3{,}77 \cdot 10^6$	$1{,}26 \cdot 10^{-4}$
1 СГС (СГСЭ)	$2{,}65 \cdot 10^{-7}$	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
1 СГСМ	$7{,}96 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами потока электрического смещения

Единица	Кл	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 Кл	1	$3{,}77 \cdot 10^{10}$	1,26
1 СГС (СГСЭ)	$2{,}65 \cdot 10^{-11}$	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
1 СГСМ	0,796	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами потенциала

Единица	В	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 В	1	$3{,}34 \cdot 10^{-3}$	10^8
1 СГС (СГСЭ)	300	1	$3 \cdot 10^{10}$
1 СГСМ	10^{-8}	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$	1

Связь между единицами емкости

Единица	Ф	см (СГС, СГСЭ)	СГСМ
1 Ф	1	$8{,}99 \cdot 10^{11}$	10^{-9}
1 см (СГС, СГСЭ)	$1{,}11 \cdot 10^{-12}$	1	$1{,}11 \cdot 10^{-21}$
1 СГСМ	10^9	$8{,}99 \cdot 10^{20}$	1

Связь между единицами силы тока

Единица	А	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 А	1	$3 \cdot 10^{9}$	0,1
1 СГС (СГСЭ)	$3{,}34 \cdot 10^{-10}$	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
1 СГСМ	10	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами сопротивления

Единица	Ом	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 Ом	1	$1{,}11 \cdot 10^{-12}$	10^{9}
1 СГС (СГСЭ)	$8{,}99 \cdot 10^{11}$	1	$8{,}99 \cdot 10^{20}$
1 СГСМ	10^{-9}	$1{,}11 \cdot 10^{-21}$	1

Связь между единицами удельного сопротивления

Единица	Ом · м	Ом · см	$\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$	СГС (СГСЭ)	СГСМ
1 Ом · м	1	10^{2}	10^{6}	$1{,}11 \cdot 10^{-10}$	10^{11}
1 Ом · см	10^{-2}	1	10^{4}	$1{,}11 \cdot 10^{-12}$	10^{9}
1 Ом · мм²/м	10^{-6}	10^{-4}	1	$1{,}11 \cdot 10^{-16}$	10^{5}
1 СГС (СГСЭ)	$8{,}99 \cdot 10^{9}$	$8{,}99 \cdot 10^{11}$	$8{,}99 \cdot 10^{15}$	1	$8{,}99 \cdot 10^{20}$
1 СГСМ	10^{-11}	10^{-9}	10^{-5}	$1{,}11 \cdot 10^{-21}$	1

Связь между единицами магнитной индукции

Единица	Тл	Гс	СГСЭ
1 Тл	1	10^{4}	$3{,}34 \cdot 10^{-7}$
1 Гс	10^{-4}	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
1 СГСЭ	$3 \cdot 10^{6}$	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами магнитного потока

Единица	Вб	Мкс	СГСЭ
1 Вб	1	10^{3}	$3{,}34 \cdot 10^{-3}$
1 Мкс	10^{-8}	1	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$
1 СГСЭ	$3 \cdot 10^{2}$	$3 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами напряженности магнитного поля

Единица	А/м	Э	СГСЭ	А · в/см
1 А/м	1	$1{,}26 \cdot 10^{-2}$	$3{,}77 \cdot 10^{8}$	10^{-2}
1 Э	79,6	1	$3 \cdot 10^{10}$	0,796
1 СГСЭ	$2{,}65 \cdot 10^{-9}$	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$	1	$2{,}65 \cdot 10^{-11}$
1 А · в/см (ампер-виток на сантиметр)	10^{2}	1,26	$3{,}77 \cdot 10^{10}$	1

Связь между единицами магнитодвижущей силы

Единица	А	Гб	СГСЭ
1 А	1	1,26	$3{,}77 \cdot 10^{10}$
1 Гб	0,796	1	$3 \cdot 10^{10}$
1 СГСЭ	$2{,}65 \cdot 10^{-11}$	$3{,}34 \cdot 10^{-11}$	1

VIII. Уравнения электромагнетизма, записанные в разных системах единиц [1])

	СИ	СГСМ	СГСЭ	СГС
Сила взаимодействия между зарядами (закон Кулона)	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r^2}$	$F = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r^2}$	$F = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r^2}$	
Сила, действующая на заряд в электрическом поле	$F = QE$			
Связь между напряженностью поля и смещением	$D = \epsilon_0 \epsilon E$		$D = \epsilon E$	
Теорема Гаусса (поток смещения сквозь замкнутую поверхность)	$\Psi_D = \oint D \cos(\widehat{D, n})\, dS = Q$	$\Psi_D = \oint D \cos(\widehat{D, n})\, dS = 4\pi Q$		

Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\varepsilon r^2}$	$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{\varepsilon r^2}$	$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2}$
Напряженность поля в плоском конденсаторе	$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\sigma}{\varepsilon}$	$E = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \frac{\sigma}{\varepsilon}$	$E = 4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon}$
Напряженность поля в цилиндрическом конденсаторе [2])	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\tau}{\varepsilon r}$	$E = \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{\tau}{\varepsilon r}$	$E = 2 \frac{\tau}{\varepsilon r}$
Напряженность поля на оси диполя [3])	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{p_э}{\varepsilon r^3}$	$E = \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{p_э}{\varepsilon r^2}$	$E = 2 \frac{p_э}{\varepsilon r^3}$
Электрический момент диполя		$p_э = Ql$	
Сила взаимодействия двух диполей, расположенных на одной оси [3])	$F = -\frac{3}{2\pi\varepsilon_0} \frac{p_{э1} p_{э2}}{\varepsilon r^4}$	$F = -\frac{6}{\varepsilon_0} \frac{p_{э1} p_{э2}}{\varepsilon r^4}$	$F = -6 \frac{p_{э1} p_{э2}}{\varepsilon r^4}$
Поляризованность диэлектрика (интенсивность поляризации)		$P = \frac{p_э}{V} = \chi_э E$	

VIII (продолжение)

	СИ	СГСМ	СГСЭ	СГС
Связь между диэлектрической проницаемостью и диэлектрической восприимчи-	$\epsilon = 1 + \chi_э$		$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_э$	
Связь между напряженностью поля и потенциалом		$E = -\operatorname{grad} U$		
Потенциал поля точечного заряда	$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\epsilon r}$	$U = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{\epsilon r}$	$U = \frac{Q}{\epsilon r}$	
Потенциал внутри цилиндрического конденсатора [4])		$U = U_1 - Er \ln(r/R_1)$		
Связь между емкостью, зарядом и потенциалом		$Q = CU$		
Емкость уединенного шара	$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon R$	$C = \epsilon_0 \epsilon R$	$C = \epsilon R$	
Емкость плоского конденсатора	$C = \epsilon_0 \frac{\epsilon S}{l}$	$C = \frac{\epsilon_0}{4\pi}\frac{\epsilon S}{l}$	$C = \frac{1}{4\pi}\frac{\epsilon S}{l}$	

Емкость цилиндрического конденсатора	$C = 2\pi\epsilon_0 \times \frac{\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$,	$C = \frac{\epsilon_0}{2} \times \frac{\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$	$C = \frac{1}{2}\frac{\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$
Емкость двухпроводной линии [5])	$C = \pi\epsilon_0 \frac{\epsilon l}{\ln(a/R)}$	$C = \frac{\epsilon_0}{4}\frac{\epsilon l}{\ln(a/R)}$	$C = \frac{1}{4}\frac{\epsilon l}{\ln(a/R)}$
Энергия заряженного проводника	$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$		
Объемная плотность энергии электрического поля	$w_э = \frac{1}{2} ED = \frac{\epsilon_0}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{D^2}{\epsilon}$	$w_э = \frac{1}{8\pi} ED = \frac{\epsilon_0}{8\pi}\epsilon E^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{D^2}{\epsilon}$	$w_э = \frac{1}{8\pi} ED = \frac{1}{8\pi}\epsilon E^2 = \frac{1}{8\pi}\frac{D^2}{\epsilon}$
Определение силы тока проводимости	$I = dQ/dt$		
Закон Ома	$I = U/R$		
Мощность тока	$P = UI$		

VIII (продолжение)

	СИ	СГСМ	СГСЭ	СГС
Сила, действующая на элемент тока в магнитном поле (формула Ампера)	$\boldsymbol{dF} = I\,\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B}$,	$dF = BI\,dl \sin(\widehat{B, dl})$		$dF = \frac{1}{c} BI\,dl \sin(\widehat{B, dl})$ $\boldsymbol{dF} = \frac{1}{c} I\, \vec{\mathscr{M}} \times \boldsymbol{B}$
Момент силы, испытываемый контуром с током в магнитном поле	$\mathscr{M} = Bp_{\text{М}} \sin(\widehat{B, p_{\text{М}}})$, $\vec{\mathscr{M}} = \boldsymbol{p}_{\text{М}} \times \boldsymbol{B}$			$\vec{\mathscr{M}} = \frac{1}{c} \boldsymbol{p}_{\text{М}} \times \boldsymbol{B}$
Магнитный момент контура с током	$p_{\text{М}} = IS$			$p_{\text{М}} = \frac{1}{c} IS$
Работа перемещения контура с током в магнитном поле	$A = I\Delta\Psi$			$A = \frac{1}{c} I\Delta\Psi$
Закон Био, Савара и Лапласа	$H = \frac{1}{4\pi} \times$ $\times \oint \frac{Idl \sin(\widehat{r, dl})}{r^2}$	$H = \oint \frac{Idl \sin(\widehat{r, dl})}{r^2}$		$H = \frac{1}{c} \oint \frac{Idl \sin(\widehat{r, dl})}{r^2}$

Связь между индукцией и напряженностью	$B = \mu_0 \mu H$	$B = \mu H$	$B = \mu_0 \mu H$	$B = \mu H$
Напряженность магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током	$H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}$	$H = 2\frac{I}{r}$		$H = \frac{2}{c} \frac{I}{r}$
Напряженность поля в центре кольца, обтекаемого током	$H = \frac{1}{2} \frac{I}{r}$	$H = 2\pi \frac{I}{r}$		$H = \frac{2\pi}{c} \frac{I}{r}$
Напряженность поля на оси длинного соленоида [6]	$H = \frac{IN}{l} = IN_0$	$H = 4\pi \frac{IN}{l} = 4\pi IN_0$		$H = \frac{4\pi}{c} \frac{IN}{l} = \frac{4\pi}{c} IN_0$
Сила взаимодействия двух параллельных токов	$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu I_1 I_2 l}{r}$	$F = 2 \frac{\mu I_1 I_2 l}{r}$	$F = 2\mu_0 \frac{\mu I_1 I_2 l}{r}$	$F = \frac{2}{c} \frac{\mu I_1 I_2 l}{r}$

VIII (продолжение)

	СИ	СГСМ	СГСЭ	СГС
Связь между магнитным потоком и магнитной индукцией	$d\Phi = BdS\cos(\widehat{B, n})$			
Магнитодвижущая сила	$\mathcal{F} = \Sigma I$	$\mathcal{F} = 4\pi\Sigma I$		$\mathcal{F} = \frac{4\pi}{c}\Sigma I$
Намагниченность (интенсивность намагничивания)	$J = \frac{p_{\text{м}}}{V}\ \chi_{\text{м}} H$			
Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью	$\mu = 1 + \chi_{\text{м}}$	$\mu = 1 + 4\pi\chi_{\text{м}}$		
Связь между потокосцеплением, силой тока и индуктивностью контура	$\Psi = LI$			$\Psi = \frac{1}{c} LI$
Индуктивность соленоида [7])	$L = \mu_0 \frac{\mu N^2 S}{l} = \mu_0 \mu N_0^2 V$	$L = 4\pi \frac{\mu N^2 S}{l} = 4\pi\mu N_0^2 V$	$L = 4\pi\mu_0 \frac{\mu N^2 S}{l} = 4\pi\mu_0\mu N_0^2 V$	$L = 4\pi \frac{\mu N^2 S}{l} = 4\pi\mu N_0^2 V$

Индуктивность двухпроводной линии [5])	$L = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} l \ln \frac{a}{R}$	$L = 4\mu l \ln \frac{a}{R}$	$L = 4\mu_0 \mu l \ln \frac{a}{R}$	$L = 4\mu l \ln \frac{a}{R}$
Электродвижущая сила индукции		$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$		$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Psi}{dt}$
Электродвижущая сила самоиндукции		$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}$		$\mathcal{E}_{si} = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}$
Объемная плотность энергии магнитного поля	$w_{\text{м}} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2\mu_0}\frac{B^2}{\mu} = \frac{\mu_0}{2}\mu H^2$	$w_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} BH = \frac{1}{8\pi}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{8\pi}\mu H^2$	$w_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} BH = \frac{1}{8\pi\mu_0}\frac{B^2}{\mu} = \frac{\mu_0}{8\pi}\mu H^2$	$w_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} BH = \frac{1}{8\pi}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{8\pi}\mu H^2$
Вектор Пойнтинга (плотность потока электромагнитной энергии)	$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$		$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$
Скорость распространения электромагнитных волн	$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	$v = c\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

VIII (окончание)

	СИ	СГСМ	СГСЭ	СГС
Уравнения Максвелла				
1. Закон Фарадея		$\mathrm{rot}\, E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$		$\mathrm{rot}\, E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t}$
2. Закон полного тока (закон Ампера)	$\mathrm{rot}\, H = j + \dfrac{\partial D}{\partial t}$	$\mathrm{rot}\, H = 4\pi j + \dfrac{\partial D}{\partial t}$		$\mathrm{rot}\, H = \dfrac{1}{c}\left(4\pi j + \dfrac{\partial D}{\partial t}\right)$
3. Уравнение Пуассона (теорема Гаусса)	$\mathrm{div}\, D = \rho$	$\mathrm{div}\, D = 4\pi\rho$		
4. Непрерывность силовых линий магнитной индукции (теорема Гаусса)		$\mathrm{div}\, B = 0$		

П р и м е ч а н и я.

1) Все величины должны измеряться единицами соответствующей системы. В частности, для ϵ_0 и μ_0 должны подставляться значения: в СИ $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м; в СГСМ $\epsilon_0 = 1{,}11 \cdot 10^{-21}$ СГСМ; в СГСЭ $\mu_0 = 1{,}11 \cdot 10^{-21}$ СГСЭ.

2) τ – плотность заряда на единицу длины конденсатора.

3) Предполагается, что $r \gg l$ (l – плечо диполя).

4) U_1 – потенциал, R_1 – радиус внутреннего цилиндра.

5) l – длина линии, R – радиус проводов, a – расстояние между проводами ($a \gg R$).

6) N – общее число витков, N_0 – число витков на единицу длины.

7) S – площадь сечения соленоида, N – общее число витков, N_0 – число витков на единицу длины.

IX. Единицы электромагнитного излучения

Величина: наименование	Величина: обозначение	Размерность	Обозначение единицы
1	2	3	4
Энергия излучения (лучистая энергия)	E, W	L^2MT^{-2}	Дж
Поток излучения (мощность излучения)	$\Phi_э$	L^2MT^{-3}	Вт
Поверхностная плотность потока излучения	$d\Phi_э/dS$	MT^{-3}	Вт/м^2
Интенсивность излучения (модуль вектора Пойнтинга)	$\lvert S \rvert$		
Энергетическая светимость (излучательность)	$R_э$	MT^{-3}	Вт/м^2
Энергетическая освещенность (облученность)	$E_э$		
Энергетическая экспозиция (лучистая экспозиция)	$H_э$	MT^{-2}	Дж/м^2
Энергетическая сила света (сила излучения)	$J_э$	L^2MT^{-3}	Вт/ср
Энергетическая яркость (лучистость)	$B_э$	MT^{-3}	Вт/(ср · м^2)
Объемная плотность энергии излучения (плотность лучистой энергии)	u, w	$L^{-1}MT^{-2}$	Дж/м^3

IX (окончание)

1	2	3	4
Световой поток	Φ	J	лм
Световая энергия	Q, Q_V	TJ	лм · с
Светимость	M, R	L^{-2} J	лм/м^2
Сила света	J	J	кд
Освещенность	E	L^{-2} J	лк
Яркость	B	L^{-2} J	кд/м^2
Световая экспозиция	$H = Et$	L^{-2} TJ	лк · с
Абсолютная световая эффективность	$V = \Phi/\Phi_э$	V	–
Относительная световая эффективность	$K = V_\lambda/V_{max}$	–	–

Значения относительной и абсолютной световой эффективности (видности) при различных длинах волн

λ, нм	K_λ	V_λ, лм/Вт	λ, нм	K_λ	V_λ, лм/Вт	λ, нм	K_λ	V_λ, лм/Вт
380	0,00004	0,03	520	0,710	485	660	0,061	41,7
400	0,0004	0,27	540	0,954	652	680	0,017	11,6
420	0,004	0,73	560	0,995	680	700	0,0041	2,8
440	0,023	15,7	580	0,870	594	720	0,00105	0,72
460	0,060	41,0	600	0,631	431	740	0,00025	0,17
480	0,139	90,2	620	0,381	260	760	0,00006	0,04
500	0,323	221	640	0,175	120			

X. Единицы ионизирующего излучения

Величина		Размерность	Обозначение единицы
наименование	обозначение и определяющее уравнение		
1	2	3	4
Энергия ионизирующих частиц	W, E	L^2MT^{-2}	Дж
Поток ионизирующих частиц	Φ_n	T^{-1}	$с^{-1}$
Плотность потока ионизирующих частиц	$\varphi_n = d\Phi_n/dS$	$L^{-2}T^{-1}$	$с^{-1} \cdot м^{-2}$
Поток энергии ионизирующих частиц	$\Phi = dE/dt$	L^2MT^{-3}	Вт
Плотность потока энергии ионизирующих частиц	$\varphi = d\Phi/dS$	MT^{-3}	Вт/м^2
Поглощенная доза излучения	$D = dE/dm$	L^2T^{-2}	Дж/кг = Гр
Керма	$K = dE_n/dm$	L^2T^{-2}	Гр
Мощность кермы	$\dot{K}$	L^2T^{-3}	Гр/с
Мощность поглощенной дозы излучения	$P = dD/dt$	L^2T^{-3}	Гр/с
Экспозиционная доза фотонного излучения	$X = dQ/dm$	$M^{-1}TI$	Кл/кг
Мощность экспозиционной дозы	$\dot{X}$	$M^{-1}I$	А/кг
Линейная передача энергии	$L = dE/dl$	LMT^{-2}	Дж/м

X (окончание)

1	2	3	4
Эквивалентная доза ионизирующего излучения	$H = Dk$	L^2T^{-2}	Зв
Мощность эквивалентной дозы излучения	$\dot{H}$	L^2T^{-3}	Зв/с
Активность радионуклида в источнике	A	T^{-1}	Бк = расп./с
Линейная плотность ионизации	α_i	L^{-1}	$м^{-1}$
Коэффициент рекомбинации	α_r	L^3T^{-1}	$м^3/с$
Подвижность	b	$M^{-1}T^2I$	$м^2/(В \cdot с)$

XI. Некоторые единицы атомных систем

Величина	Система $m_e, \hbar, c$		Система $m_e, \hbar, c$	
	Определяющее уравнение	Значение	Определяющее уравнение	Значение
Длина	$l = \frac{\hbar^2}{m_e c^2} = a_0$	$5{,}292 \cdot 10^{-9}$ см $5{,}292 \cdot 10^{-11}$ м	$\frac{\hbar}{m_e c} = \lambda\!\!\!^{-}_C = \alpha a_0$	$3{,}862 \cdot 10^{-11}$ см $3{,}862 \cdot 10^{-13}$ м
Масса	$m = m_e$	$9{,}109 \cdot 10^{-28}$ г $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ кг	m_e	$9{,}109 \cdot 10^{-28}$ г $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ кг

Время	$t = \dfrac{\hbar^3}{m_e e^4}$	$2{,}419 \cdot 10^{-17}$ с	$\dfrac{\hbar}{m_e c^2}$	$1{,}288 \cdot 10^{-21}$ с
Площадь	$S = \dfrac{\hbar^4}{m_e^2 e^4} = a_0^2$	$2{,}800 \cdot 10^{-17}$ см^2 $2{,}800 \cdot 10^{-21}$ м^2	$\dfrac{\hbar^2}{m_e^2 c^2} = \lambda_C^2$	$1{,}491 \cdot 10^{-21}$ см^2 $1{,}491 \cdot 10^{-25}$ м^2
Скорость	$v = \dfrac{e^2}{\hbar} = \alpha c$	$2{,}188 \cdot 10^{8}$ см/с $2{,}188 \cdot 10^{6}$ м/с	c	$2{,}998 \quad 10^{10}$ см/с $2{,}998 \quad 10^{5}$ м/с
Ускорение	$a = \dfrac{m_e e^6}{\hbar^4}$	$9{,}043 \cdot 10^{24}$ см/с^2 $9{,}043 \cdot 10^{22}$ м/с^2	$\dfrac{m_e c^3}{\hbar}$	$2{,}327 \quad 10^{31}$ см/с^2 $2{,}327 \cdot 10^{29}$ м/с^2
Сила	$F = \dfrac{m_e^2 e^6}{\hbar^4}$	$8{,}237 \cdot 10^{-3}$ дин $8{,}237 \cdot 10^{-8}$ Н	$\dfrac{m_e^2 c^3}{\hbar}$	$2{,}120 \cdot 10^{4}$ дин $2{,}120 \cdot 10^{-1}$ Н
Импульс (количество движения)	$p\,(mv) = \dfrac{m_e e^2}{\hbar}$	$1{,}993 \cdot 10^{-19}$ г·см/с $1{,}993 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с	$m_e c$	$2{,}731 \cdot 10^{-17}$ г·см/с $2{,}731 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с
Момент силы	$\mathcal{M} = \dfrac{m_e e^4}{\hbar^2}$	$4{,}360 \cdot 10^{-11}$ дин·см $4{,}360 \cdot 10^{-18}$ Н·м	$m_e c^2$	$8{,}187 \cdot 10^{-7}$ дин·см $8{,}187 \cdot 10^{-14}$ Н·м
Момент импульса (количества движения)	$\mathcal{L} = \hbar$	$1{,}055 \cdot 10^{-27}$ эрг·с $1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с	$\hbar$	$1{,}055 \cdot 10^{-27}$ эрг·с $1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

XI (окончание)

Величина	Система $m_e, \hbar, e$		Система $m_e, \hbar, c$	
	Определяющее уравнение	Значение	Определяющее уравнение	Значение
Энергия	$W = \frac{m_e e^4}{\hbar^2}$	$4{,}360 \cdot 10^{-11}$ эрг $4{,}360 \cdot 10^{-18}$ Дж 27,22 эВ	$m_e c^2$	$8{,}187 \cdot 10^{-7}$ эрг $8{,}187 \cdot 10^{-14}$ Дж $5{,}110 \cdot 10^{5}$ эВ
Электрический заряд	$Q = e$	$4{,}803 \cdot 10^{-10}$ СГС $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл	$(\hbar c)^{1/2} = \frac{e}{\alpha^{1/2}}$	$5{,}623 \cdot 10^{-9}$ СГС $1{,}876 \cdot 10^{-18}$ Кл
Сила тока	$I = \frac{m_e e^5}{\hbar^3}$	$1{,}986 \cdot 10^{7}$ СГС $6{,}624 \cdot 10^{-3}$ А	$\frac{m_e c^{5/2}}{\hbar^{1/2}}$	$4{,}365 \cdot 10^{12}$ СГС $1{,}456 \cdot 10^{3}$ А

Напряженность электрического поля	$E = \frac{m_e^2 e^5}{\hbar^4}$	$1,715 \cdot 10^7$ СГС $5,130 \cdot 10^{11}$ В/м	$\frac{m_e^2 c^{5/2}}{\hbar^{3/2}}$	$3,771 \cdot 10^{12}$ СГС $1,131 \cdot 10^{17}$ В/м
Потенциал	$U = \frac{m_e e^3}{\hbar^2}$	$9,076 \cdot 10^{-2}$ СГС 27,22 В	$\frac{m_e c^{3/2}}{\hbar^{1/2}}$	$1,456 \cdot 10^2$ СГС $4,366 \cdot 10^4$ В
Магнитная индукция	$B = \frac{m_e^2 e^5}{\hbar^4}$	$1,715 \cdot 10^7$ Гс $1,715 \cdot 10^3$ Т	$\frac{m_e^2 c^{5/2}}{\hbar^{3/2}}$	$3,771 \cdot 10^{12}$ Гс $3,771 \cdot 10^8$ Т
Магнитный момент	$p_м = \frac{\hbar^2}{m_e e} = \frac{2\mu_B}{\alpha}$	$2,542 \cdot 10^{-18}$ эрг/Гс $2,542 \cdot 10^{-21}$ Дж/Т	$\frac{\hbar^{3/2}}{m_e c^{1/2}} = \frac{2\mu_B}{\alpha^{1/2}}$	$2,171 \cdot 10^{-19}$ эрг/Гс $2,171 \cdot 10^{-22}$ Дж/Т

Примечание. В таблице обозначены: a_0 – боровский радиус; μ_B – магнетон Бора; $\lambda\!\!\!^-_C$ – комптоновская длина волны; α – постоянная тонкой структуры

Связь между электрон-вольтом и другими единицами энергии

Определяющее уравнение	Единица	1 эВ	Число, выражающее данную единицу в эВ
$W = eU$	Дж	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$	$6{,}24 \cdot 10^{18}$
	эрг	$1{,}60 \cdot 10^{-12}$	$6{,}24 \cdot 10^{11}$
$\frac{3}{2} kT = eU$	К	$7{,}73 \cdot 10^{3}$	$1{,}29 \cdot 10^{-4}$
$kT = eU$	К	$1{,}16 \cdot 10^{4}$	$8{,}62 \cdot 10^{-5}$
$Q = eUN_A$	кал/моль = = ккал/кмоль	$2{,}31 \cdot 10^{4}$	$4{,}34 \cdot 10^{-5}$
$\frac{hc}{\lambda} = eU$	$см^{-1}$	$8{,}07 \cdot 10^{3}$	$1{,}24 \cdot 10^{-4}$
$h\nu = eU$	$с^{-1}$	$2{,}42 \cdot 10^{14}$	$4{,}14 \cdot 10^{-15}$
$1\ а.е.м \cdot c^2 = eU$	а.е.м.	$1{,}07 \cdot 10^{-9}$	$9{,}32 \cdot 10^{8}$
$m_e c^2 = eU$	m_e	$1{,}96 \cdot 10^{-6}$	$5{,}11 \cdot 10^{5}$
$Rch = eU$	Ry	$7{,}35 \cdot 10^{-2}$	13,6

Связь между единицами эффективных сечений

Единица	$м^2$	$см^2$	барн	a_0^2	πa_0^2
$1\ м^2$	1	10^4	10^{28}	$3{,}57 \cdot 10^{20}$	$1{,}14 \cdot 10^{20}$
$1\ см^2$	10^{-4}	1	10^{24}	$3{,}57 \cdot 10^{16}$	$1{,}14 \cdot 10^{16}$
1 барн	10^{-28}	10^{-24}	1	$3{,}57 \cdot 10^{-8}$	$1{,}14 \cdot 10^{-8}$
a_0^2	$2{,}80\ 10^{-21}$	$2{,}80 \cdot 10^{-17}$	$2{,}80 \cdot 10^{7}$	1	0,318
πa_0^2	$8{,}80 \cdot 10^{-21}$	$8{,}80 \cdot 10^{-17}$	$8{,}80 \cdot 10^{7}$	3,14	1

XII. Некоторые физико-технические характеристики

Модуль упругости (модуль Юнга) некоторых материалов (средние округленные значения)

Материал	E	Материал	E
Алюминий	7	Резина	0,5
Медь	12	Кварц	5
Сталь	20	Свинец	1,6

Для получения значения модуля в Па следует числа столбца E умножить на 10^{10}, в дин/см^2 – на 10^{11}.

Вязкость некоторых жидкостей при 20 °C

Жидкость	Вязкость, 10^3 Па · с	Жидкость	Вязкость, 10^3 Па · с
Вода	1,01	Этиловый спирт	1,19
Ртуть	1,69		
Бензол	0,65	Эфир	0,23
Метиловый спирт		Глицерин	850,0

Шкала Бофорта

Баллы Бофорта	Скорость, м/с	Баллы Бофорта	Скорость, м/с
0	0–0,5	7	12,5–15,2
1	0,6–1,7	8	15,3–18,2
2	1,8–3,3	9	18,3–21,5
3	3,4–5,2	10	21,6–25,1
4	5,3–7,4	11	25,2–29,0
5	7,5–9,8	12	>29
6	9,9–12,4		

Шкалы твердости

Минералы	Показатель твердости		Минералы	Показатель твердости	
	По Мосу	По Брейтгаупту		По Мосу	По Брейтгаупту
Тальк	1	1	Апатит	5	6
Гипс	2	2	Роговая обманка	–	7
Слюда	–	3	Полевой шпат	6	8
Известковый шпат	3	4	Кварц	7	9
Плавиковый шпат	4	5	Топаз	8	10
			Корунд	9	11
			Алмаз	10	12

Международная практическая температурная шкала 1968 г.

Для практического воспроизведения термодинамической температурной шкалы определен ряд опорных температурных точек, представляющих собой температуры равновесия двух или трех фаз данного вещества. Равновесие двух фаз для всех веществ, кроме одной точки равновесного водорода (17,042 К), предполагается при нормальном давлении (101 325 Па).

Состояние равновесия	Присвоенные значения международной практической температуры	
	К	°С
Тройная точка равновесного водорода	13,81	– 259,34
Равновесие между жидкой и газообразной фазами водорода при давлении 33 330,6 Па	17,042	– 256,108
Равновесие между жидкой и газообразной фазами водорода	20,28	– 252,87

Состояние равновесия	Присвоенные значения международной практической температуры	
	К	°C
Равновесие между жидкой и газообразной фазами неона	27,102	− 246,048
Тройная точка кислорода	54,361	− 218,789
Равновесие между жидкой и газообразной фазами кислорода	90,188	− 182,962
Тройная точка воды	273,16	0,01
Равновесие между жидкой и парообразной фазами воды	373,15	100
Равновесие между твердой и жидкой фазами олова	505,118	231,968
Равновесие между твердой и жидкой фазами цинка	692,73	419,58
Равновесие между твердой и жидкой фазами серебра	1 235,08	961,93
Равновесие между твердой и жидкой фазами золота	1 337,58	1 064,43

Удельная теплоемкость некоторых веществ

Вещество	Теплоемкость		Вещество	Теплоемкость	
	10^{-2} Дж/(кг · К)	кал/(г · К)		10^{-2} Дж/(кг · К)	кал/(г · К)
Алюминий	8,8	0,21	Вода	41,9	1,00
Вольфрам	1,5	0,036	Ртуть	1,3	0,033
Германий	3,1	0,074	Кварц	8,4	0,20
Железо	4,6	0,11	Стекло	6,3	0,15
Медь	3,8	0,091			

Теплопроводность некоторых материалов

Материал	Теплопроводность		
	Вт/(м · К)	кал/(с · см · К)	ккал/(ч · м · К)
Медь	390	0,92	330
Алюминий	220	0,51	190
Графит	130	0,30	110
Латунь	110	0,26	94
Вольфрам	76	0,18	65
Сталь	46	0,11	40
Ртуть	6,7	$1,6 \cdot 10^{-2}$	5,8
Цемент	2,9	$7 \cdot 10^{-3}$	2,5
Кирпич	1,6	$4,1 \cdot 10^{-3}$	1,4
Стекло	0,84	$2 \cdot 10^{-3}$	0,7
Вода	0,63	$1,5 \cdot 10^{-3}$	0,54
Вата	0,25	$6 \cdot 10^{-4}$	0,2
Дерево	0,21	$5 \cdot 10^{-4}$	0,18
Войлок	0,038	$9 \cdot 10^{-5}$	0,032
Пенополиуретан	0,035	$8,3 \cdot 10^{-5}$	0,03

Удельное акустическое сопротивление некоторых сред

Среда	Удельное акустическое сопротивление, П · с/м	Среда	Удельное акустическое сопротивление, П · с/м
Воздух (при нормальных условиях)	43	Медь	$3,2 \cdot 10^{6}$
		Сталь	$4,1 \cdot 10^{6}$
		Резина	$2,9 \cdot 10^{3}$
Вода	$1,4 \cdot 10^{5}$		
Ртуть	$2,0 \cdot 10^{6}$		

Удельное электрическое сопротивление некоторых проводников

Проводник	Удельное электрическое сопротивление		Проводник	Удельное электрическое сопротивление	
	$Ом \cdot \frac{площадь}{длина}$	$СГС \cdot 10^{18}$		$Ом \cdot \frac{площадь}{длина}$	$СГС \cdot 10^{18}$
Алюминий	3,2	3,6	Медь	1,8	2,0
Висмут	120	130	Молибден	4,8	5,4
Сталь	20	22	Свинец	2,1	2,3
Серебро	1,6	1,8	Нихром	110	120
Тантал	15	17	Манганин	43	48
Латунь	8	8,9			

Для получения значения удельного электрического сопротивления, измеренного в Ом · м, Ом · см, следует числа столбца "$Ом \cdot \frac{площадь}{длина}$", умножить соответственно на 10^{-8}, 10^{-6}

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таблица перевода единиц измерений / *М.Г. Богуславский, Н.П. Кремлевский, Б.Н. Олейник и др.* – М.: Стандартгиз, 1963.
2. *Бриджмен П.В.* Анализ размерностей. – М.: ГТТИ, 1934.
3. *Бурдун Г.Д. и др.* Международная система единиц. – М.: Высшая школа, 1964.
4. *Бурдун Г.Д., Марков Б.Н.* Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1972.
5. *Гинкин Г.Г.* Логарифмы, децибелы, децилоги. – М.: Госэнергоиздат, 1962.
6. *Гордон А.Н.* Температурные шкалы. – М.: Изд-во стандартов, 1966.
7. *Калантаров П.Л.* Единицы измерения электрических и магнитных величин. – М.: Госэнергоиздат, 1948.
8. *Калашников Н.Б., Стоцкий Л.Р. и др.* Единицы измерений и обозначения физико-технических величин. – М.: Недра, 1966.
9. *Камке Д., Кремер К.* Физические основы единиц измерения. – М.: Мир, 1980.
10. *Коган Б.Ю.* Размерность физической величины. – М.: Наука, 1976.
11. *Маликов М.Ф.* Основы метрологии. – М.: Изд-во Комитета по делам мер и приборов, 1948.
12. *Маликов С.Ф.* Практические электрические единицы (международные и абсолютные). – М.: Госэнергоиздат, 1947.
13. *Пинский А.А.* Корректна ли международная система единиц? // Измерит. техн. – 1981. – № 9. – С. 26.
14. *Попов М.В.* Абсолютные и практические единицы. – СПб., 1913.
15. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1972.
16. *Сена Л.А.* Единицы измерения физических величин. – М.: Гостехиздат, 1951.

17. *Сивухин Д.В.* О международной системе физических величин// УФН. – 1979. – Т. 129. – С. 335.
18. *Тюрин Н.Н.* Введение в метрологию. – М.: Изд-во стандартов, 1976.
19. *Фролов Р.Н.* Система MTS (метр, тонна, секунда) и новые правила о механических измерениях. – М.: ГТТИ, 1932.
20. *Хвольсон О.Д.* Об абсолютных единицах, в особенности магнитных и электрических. – СПб., 1887.
21. *Чертов А.Г.* Единицы физических величин. – М.: Высшая школа, 1977.
22. О внедрении международной системы единиц / Под ред. К.П. Широкова. – М.: Изд-во стандартов, 1965.
23. Документ U.I.P. 20 (1978). Обозначения, единицы измерения и терминология в физике // УФН. – 1979. – Т. 129. – С. 290.
24. ГОСТ 16263–70. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1970.
25. ГОСТ 8.417–81 (СТ СЭВ 1052 – 78). – М.: Изд-во стандартов, 1982.
26. РД 50–160–79. Методические указания. Внедрение и применение СТ СЭВ 1052–78. – М.: Изд-во стандартов, 1979.
27. ГОСТ 8.157–75. Международная практическая температурная шкала – М.: Изд-во стандартов, 1975.
28. ГОСТ 15484–81. Излучения ионизирующие и их измерения. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1981.
29. ГОСТ 8.430–81. Обозначения единиц и десятичных приставок для печатающих устройств с ограниченным набором знаков. – М.: Изд-во стандартов, 1981.
30. *Бурдун Г.Д.* Справочник по международной системе единиц.– М.: Изд-во стандартов, 1980.
31. Словарь-справочник автора. – М.: Книга, 1974.
32. *Аристов Е.М.* Единицы физических величин. – Л.: Изд-во "Судостроение", 1972.
33. *Голубинцев О.Н.* Механические величины в международной системе единиц. – М.: Изд-во стандартов, 1983.
34. *Стоцкий Л.Р.* Физические величины и их единицы. – М.: Просвещение, 1984.
35. Справочная книга редактора и корректора: Редакционно-техническое оформление издания / Сост. и общ. ред. А.Э. Мильчина. – М.: Книга, 1985.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Сена Лев Аронович

**ЕДИНИЦЫ
ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН
И ИХ РАЗМЕРНОСТИ**

Редактор *Н.А. Михалина*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *С.Н. Баронина, С.В. Геворкян*
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12697

Сдано в набор 19.10.87. Подписано к печати 15.01.88
Формат 70 Х 100/32. Бумага книжно-журнальная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 17,55. Усл.кр.-отт. 17,55. Уч.-изд.л. 16,96
Тираж 110 000 экз. Тип. зак. 329. Цена 1 р.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ФПФ выполнены в республиканской ордена «Знак Почёта» типографии им. П. Ф. Анохина Государственного комитета Карельской АССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 185630, г. Петрозаводск, ул. Правды, 4.

Отпечатано в Сортавальской книжной типографии Государственного комитета Карельской АССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 186750, г. Сортавала, Карельская, 42.