

**И. П. Захаров**

**НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ  
ИЗМЕРЕНИЙ  
ДЛЯ ЧАЙНИКОВ  
И... НАЧАЛЬНИКОВ**

*Учебное пособие*

Харьков

2013

*Навчальне видання*

**ЗАХАРОВ Ігор Петрович**

**НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ ВИМІРЮВАНЬ ДЛЯ ЧАЙНИКІВ  
І... КЕРІВНИКІВ**

**Навчальний посібник**

**Формат 60 × 90  $\frac{1}{16}$ . Умов. друк. арк. 2,25. Тираж 100 прим.**

**Зам. № 235**

**Друк — ФОП Васильєва Н. В.  
61166, м. Харків, просп. Леніна, 14  
Тел. (057) 702-08-16**

УДК 006. 91.001

ББК 30.10Ц

З 38

**Захаров И. П.**

**З 38      Неопределенность измерений для чайников и... начальников:  
учеб. пособ. / И. П. Захаров, — Х. : 2013. — 36 с.**

В учебном пособии в популярной форме изложены основные вопросы оценивания неопределенности измерений. Рассматривается базовый алгоритм оценивания неопределенности, особенности учета законов распределения входных величин при вычислении коэффициента охвата, составление бюджета неопределенности, учет наблюдаемой корреляции, взаимный пересчет погрешностей и неопределенностей измерений. Изложение материала сопровождается простыми примерами. В приложении приведены справочные материалы и поясняющие иллюстрации

Рекомендуется широкому кругу читателей всех возрастных категорий и уровней математической подготовки для быстрого погружения в тему.

УДК 006. 91.001

ББК 30.10Ц

© Захаров И. П., 2013

«Нет ничего более противоречащего складу ума, памяти и соображению, чем то, что предлагают эти ученые. Абстракциям и пустым надеждам принесено в жертву благо теперешних поколений, ибо чтобы заставить старую нацию принять новые единицы необходимо переделать все административные правила, все расчеты промышленности. Такая работа утруждает разум».

Наполеон о метрической системе.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие «неопределенность» прочно вошло в жизнь современных метрологов как продукт неизбежного *процесса международной стандартизации оценивания качества измерений*. Концепция неопределенности болезненно вытесняет привычную, узаконенную в многочисленных отечественных нормативных документах теорию погрешности (см. эпиграф). Внедрение этой концепции требует проведения соответствующей методической работы. В 2002 году автором этой книги было издано учебное пособие [1], рассчитанное на студентов метрологических специальностей вузов.

Настоящее пособие предназначено для тех, кто, занимаясь метрологией, не обладает достаточной базой в области математической статистики, однако, в силу сложившихся жизненных обстоятельств, вынужден в сжатые сроки разобраться в основных принципах оценивания неопределенности измерений. Таковыми являются либо не учившие, либо подзабывшие, по роду деятельности много лет не применявшие полученные знания на практике.

С пониманием относясь к обеим категориям, автор предлагает им доступный и краткий вариант изложения основ неопределенности измерений. Этот вариант отработан на многочисленных курсах повышения квалификации и семинарах, проведенных автором для аудиторий с широким спектром начальной подготовки.

При изложении материала автор руководствовался известным изречением Галилея: *«Нельзя чему-нибудь обучить человека, можно только помочь ему обнаружить это внутри себя»*. Поэтому текст пособия сопровождается простыми примерами, известными на бытовом уровне, множеством иллюстраций и заданий для самоподготовки. Для сохранения ясности изложения, многие уточняющие подробности помещены в сноски и вынесены в приложения.

В конце пособия приведен список нормативной и научно-методической литературы, способствующий при необходимости более подробному изучению данного материала.

Автор заранее выражает благодарность всем читателям, которые будут присылать свои отзывы и замечания по адресу: [newzip@ukr.net](mailto:newzip@ukr.net).

## 1. Что такое неопределенность измерений?

Неопределенность измерений – это *характеристика недостоверности* измерений, принятая на международном уровне<sup>1</sup>.

Понятие «неопределенность» произошло от английского слова «*uncertainty*»<sup>2</sup>. Неопределенность отражает отсутствие точного знания (истинного) значения *измеряемой величины*  $Y$  и выражает сомнение в том, насколько точно *результат измерения*  $y$  представляет  $Y$ .

В соответствии с определением [2], неопределенность – это параметр, связанный с результатом измерений  $y$  и характеризующий разброс значений, которые можно обоснованно приписать измеряемой величине  $Y$ . Первая буква слова «uncertainty»  $U$  стала обозначением этого параметра.

Приведенное определение лучше всего иллюстрируется стандартной формой записи результата измерения:

$$Y = y \pm U, \quad p = 0,95. \quad (1)$$

Из выражения видно, что вероятный разброс значений  $Y$  находится в диапазоне  $\pm U$  относительно результата измерения  $y$  (рис. 1), а степень обоснованности нахождения значений  $Y$  в этом интервале определяется вероятностью (уровнем доверия)  $p = 0,95$ .

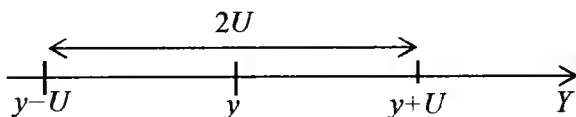


Рис. 1. К определению неопределенности измерения

<sup>1</sup> Руководство по выражению неопределенности измерений (GUM) [2] разрабатывали 7 ведущих международных организаций: Международное Бюро Мер и Весов (BIPM), Международная Организация по Стандартизации (ISO), Международная Организация по Законодательной Метрологии (OILM), Международная Электротехническая Комиссия (IEC), Международный Союз Чистой и Прикладной Физики (IUPAP), Международный Союз Чистой и Прикладной Химии (IUPAC), Международная Федерация Клинической Химии (IFCC).

<sup>2</sup> Uncertainty в переводе означает неопределенность, недостоверность, неуверенность, неясность, неизвестность, сомнительность, изменчивость.

## 2. Основные принципы оценивания неопределенности измерений

В данном пособии будет рассмотрен так называемый *модельный подход* к оцениванию неопределенности измерений. Суть его заключается в использовании модельного уравнения

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m), \quad (2)$$

связывающего между собой *входные величины*  $X_1, X_2, \dots, X_m$  измерительного процесса с измеряемой (*выходной*) величиной  $Y$ <sup>3</sup> (рис. 2). При этом по неопределенностям, связанным с входными величинами, вычисляют неопределенность измеряемой величины, поэтому модельный подход часто называют *восходящим*.

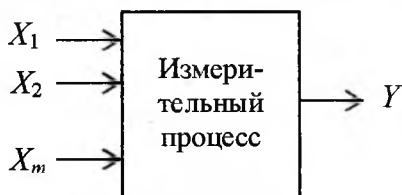


Рис. 2. Иллюстрация модельного подхода

В основу реализации модельного подхода положены пять основных принципов, приведенных в Рекомендациях INC-1 (1980) рабочей группы по оцениванию неопределенности.

В адаптированном к тексту выпущенного значительно позднее (1992) Руководства по выражению неопределенности измерений (GUM) [2] изложению их можно представить следующим образом:

1) Все составляющие неопределенности входных величин можно сгруппировать в две категории *в соответствии со способом их оценивания*<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Примером модельного уравнения может служить рассмотренное далее (п. 4.1) выражение, связывающее между собой скорость транспортного средства ( $V$ ) с длиной пройденного пути ( $L$ ) и времени его прохождения ( $T$ ).

<sup>4</sup> В отличие от теории погрешностей, где основным классификационным признаком является характер изменчивости составляющих (систематическая и случайная), в концепции неопределенности основным классификационным признаком является способ оценивания составляющих неопределенности (по типу  $A$  и  $B$ ).

- *категория А* – составляющие, оцениваемые путем применения статистических методов (путем обработки результатов многократных измерений);

- *категория В* – составляющие, оцениваемые другим способом (по характеристикам, взятым из паспорта на прибор, методик выполнения измерений, из предыдущих экспериментов, из справочников и т. д.).

2) Составляющие типа *А* оцениваются как стандартные неопределенности ( $u_A$ ), равные среднеквадратическим отклонениям (СКО) средних арифметических *многократных наблюдений*. Эти составляющие характеризуются *числами степеней свободы*  $\nu_A = n - 1$ , где  $n$  – число наблюдений.

3) Составляющие типа *В* ( $u_B$ ) оцениваются как стандартные (среднеквадратические) отклонения, получаемые из известных границ, в которых могут находиться значения измеряемых величин. Эти составляющие характеризуются *числами степеней свободы*  $\nu_B = \infty$ <sup>5</sup>.

4) Все составляющие формируют *суммарную стандартную неопределенность*  $u_c$ , которая вычисляется по правилу суммирования дисперсий<sup>6</sup>:

$$u_c^2 = u_A^2 + u_B^2, \quad (3)$$

откуда путем извлечения корня из обеих частей равенства, получаем выражение, называемое *законом распространения неопределенности*:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}. \quad (4)$$

Суммарная стандартная неопределенность характеризуются *эффективным числом степеней свободы*  $\nu_{eff}$ , которое определяется соотношением составляющих  $u_A$ ,  $u_B$  и числами их степеней свободы  $\nu_A$  и  $\nu_B$ .

---

<sup>5</sup> Предполагается, что для нахождения границ измеряемых величин было проделано бесконечное количество наблюдений.

<sup>6</sup> Дисперсия равна квадрату стандартной неопределенности. Правило суммирования дисперсий: дисперсия суммы нескольких независимых величин равна сумме их дисперсий.

5) Интервальной оценкой неопределенности является расширенная неопределенность  $U$ , которую получают путем умножения стандартной суммарной неопределенности  $u_c$  на коэффициент охвата  $k$ :

$$U = k \cdot u_c. \quad (5)$$

В общем случае коэффициент охвата находят как *коэффициент Стьюдента*<sup>7</sup> (см. Приложение 1) для вероятности 0,95 и эффективного числа степеней свободы  $\nu_{eff}$ :

$$k = t_{0,95}(\nu_{eff}). \quad (6)$$

В пределе, при  $\nu_{eff} \rightarrow \infty$ ,  $k = 2$ .

### 3. Источники неопределенности измерений

Источниками неопределенности измерений являются: *наблюдаемое рассеивание показаний* используемых при измерении средств измерительной техники (СИТ) (обуславливающие стандартные неопределенности типа  $A$ ) и поправки на *не исключенные систематические погрешности* (НСП) СИТ (обуславливающие стандартные неопределенности типа  $B$ ).

Кроме того, источниками неопределенности типа  $B$  может являться недостоверность используемых справочных данных, округление результатов измерения или применяемых констант.

#### 3.1. Наблюдаемое рассеивание показаний

Если при  $n$  – кратном измерении одного и того же значения измеряемой величины показания СИТ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  хаотически отличаются друг от друга (имеют разброс), то их можно рассматривать как реализации случайной величины. Наиболее полной характеристикой любой случайной величины является ее закон распределения. Экспериментально закон распределения можно построить в

---

<sup>7</sup> Стьюдент – псевдоним английского ученого-статистика Уильяма Госсета, работавшего на пивоваренной фабрике Гиннесс и занимавшегося оценкой качества пива и урожайности ячменя по малым выборкам.

виде *гистограммы* (столбиковой диаграммы) при наличии большого числа показаний СИТ ( $n \geq 40$ ) (рис. 3).

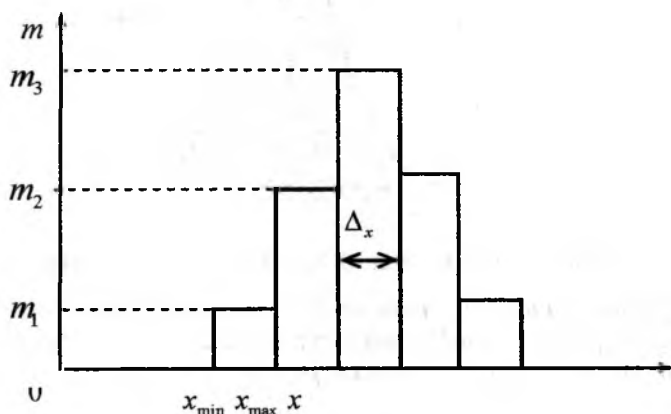


Рис. 3. Гистограмма распределения показаний СИТ

Высота каждого столбика равна количеству показаний СИТ, попавших на интервал его существования шириной  $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/L$ . Количество интервалов  $L$  зависит от числа измерений  $n$ <sup>8</sup>.

Принято считать, что закон распределения случайных погрешностей – нормальный (гауссов) (рис. 4)<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> В рекомендациях ВНИИМ [3] предлагают выбирать 7—9 интервалов при числе измерений 40—100; 8—12 интервалов при числе измерений 100—500; 10—16 интервалов при числе измерений 500—1000 и 12—22 интервала при числе измерений 1000—10000.

<sup>9</sup> Этот закон описан математически немецким математиком К.Ф. Гауссом в сочинении «Теория движения небесных тел» (1809). Центральная предельная теорема теории вероятности показывает, что в случае, когда результат измерения складывается под действием многих *независимых* причин, причем каждая из них вносит лишь малый вклад, а совокупный итог определяется путем сложения, то распределение результата измерения близко к нормальному. Считается, что получить нормальный закон можно уже при суммировании более четырех *равнозначных* составляющих, распределенных по любому другому закону. Сумма составляющих, распределенных нормально, также имеет нормальный закон распределения.

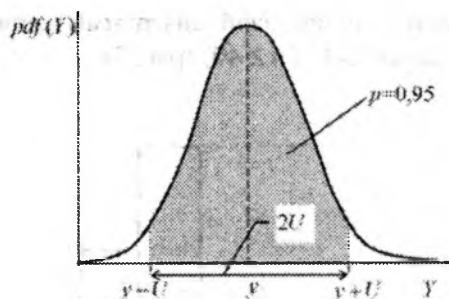


Рис. 4. Плотность распределения вероятности для нормального закона

*Характеристикой положения* такого закона распределения является *среднее арифметическое*  $\bar{x}$  отдельных показаний СИТ, принимаемое за *результат измерения*:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (7)$$

#### ПРИМЕР.

Показания весов при трехкратном взвешивания массы тела человека составили 81 кг, 79 кг и 80 кг. Среднее арифметическое значение этих показаний равно:

$$\bar{m} = \frac{81 + 79 + 80}{3} = 80 \text{ кг.}$$

Отклонение отдельных показаний СИТ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  от среднего значения  $\bar{x}$  описывается характеристикой, называемой *дисперсия*<sup>10</sup>:

$$D(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (8)$$

#### ПРИМЕР.

Для приведенных выше показаний весов дисперсия отдельных показаний составит:

$$D(m) = \frac{(81 - 80)^2 + (79 - 80)^2 + (80 - 80)^2}{3 - 1} = 1 \text{ кг}^2.$$

<sup>10</sup> От английского слова dispersion – разброс, рассеивание.

Из рассмотренного примера видно, что размерность результата измерения (кг) отлична от размерности дисперсии (кг<sup>2</sup>). Для согласования этих размерностей из значения дисперсии извлекается корень и получается СКО отдельных показаний:

$$S(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (9)$$

### ПРИМЕР.

Для приведенных выше показаний весов СКО отдельных показаний составит:

$$S(m) = \sqrt{\frac{(81-80)^2 + (79-80)^2 + (80-80)^2}{3-1}} = 1 \text{ кг}.$$

Поскольку за результат многократного измерения принимают среднее арифметическое отдельных показаний СИТ, то характеристикой разброса  $\bar{x}$  служит не СКО отдельных показаний  $S(x)$ , а СКО средних арифметических этих показаний  $S(\bar{x})$ , называемая стандартной (среднеквадратической) неопределенностью типа  $A(u_A)$ , которая оказывается в  $\sqrt{n}$  раз меньше  $S(x)$ :

$$u_A(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (10)$$

Этой неопределенности приписывают число степеней свободы  $\nu_A = n - 1$ .

### ПРИМЕР.

Для приведенных выше показаний весов стандартная неопределенность типа  $A$  составит:

$$u_A(\bar{m}) = \sqrt{\frac{(81-80)^2 + (79-80)^2 + (80-80)^2}{3(3-1)}} = 0,58 \text{ кг}.$$

Этой стандартной неопределенности приписывают число степеней свободы  $\nu_A(m) = 3 - 1 = 2$ .

### 3.2. Характеристики НСП

**Систематическая погрешность** – это погрешность, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях величины  $Y$ . Такая особенность систематической погрешности позволяет оценить ее значение (в результате проведения калибровки) и внести поправку в результат измерения.

Поскольку значение поправки определяется неточно, в исправленном результате измерения будет присутствовать неисключенная систематическая погрешность (НСП)  $\Delta_{\text{НСП}}$ , для которой известны границы  $\pm\theta$  интервала, в котором ее неизвестное значение может находиться *с равной вероятностью*.

Поэтому НСП СИТ приписывают равновероятный (равномерный) закон распределения НСП, плотность вероятности которого ( $pdf$ ) изображена на рис. 5.

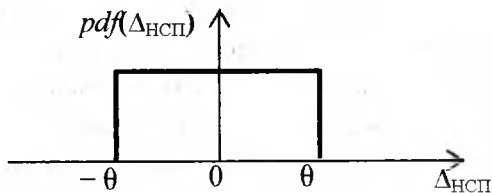


Рис. 5. Равномерный закон распределения НСП

Для такого закона распределения<sup>11</sup> СКО НСП (неопределенность типа  $B$ ) равна:

$$u_B = \frac{\theta}{\sqrt{3}}. \quad (11)$$

Для поверенных СИТ оценивание неопределенности типа  $B$  производится в соответствии с табл. 1. В таблице применены известные формулы, связывающие границы относительной  $\delta$  и приведенных  $\gamma$  и  $\lambda$  погрешностей, через которые выражается класс точности средства измерения [4], с границами абсолютной погрешности  $\theta$  в предположении равномерного распределения НСП внутри границ.

<sup>11</sup> Коэффициенты для других встречающихся на практике законов распределения приведены в п.п. 4.2.2.

Таблица 1. Формулы для расчета стандартной неопределенности типа *B*

| Пример обозначения класса точности | Вид и обозначение нормируемой погрешности          | Формула для расчета стандартной неопределенности типа <i>B</i>                                                                       |
|------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ⓐ<br>Рис. 6                        | Относительная, $\delta$                            | $u_B = \delta \frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3}100\%}$ (12)                                                                             |
| 1,0<br>Рис. 7                      | Приведенная, $\gamma$                              | $u_B = \gamma \frac{X_{\text{н}}}{\sqrt{3}100\%}$ (13)                                                                               |
| ⌋<br>Рис. 7                        | Приведенная к длине неравномерной шкалы, $\lambda$ | $u_B = \lambda \frac{(X_{\text{ср}} + X_{\text{изм}})^2}{X_{\text{ср}} \sqrt{3} \cdot 100\%}$ (14)                                   |
| 2,0/0,1<br>Рис. 8                  | Относительная, $c/d$                               | $u_B = \left[ c + d \left( \frac{X_{\text{н}}}{X_{\text{изм}}} - 1 \right) \right] \frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%}$ (15) |

В таблице использованы обозначения:  $X_{\text{изм}}$  – измеренное значение (показание СИТ),  $X_{\text{н}}$  – нормированное значение измеряемой величины (чаще всего – предел измерения);  $X_{\text{ср}}$  – значение измеряемой величины, соответствующее геометрической середине существенно неравномерной шкалы.

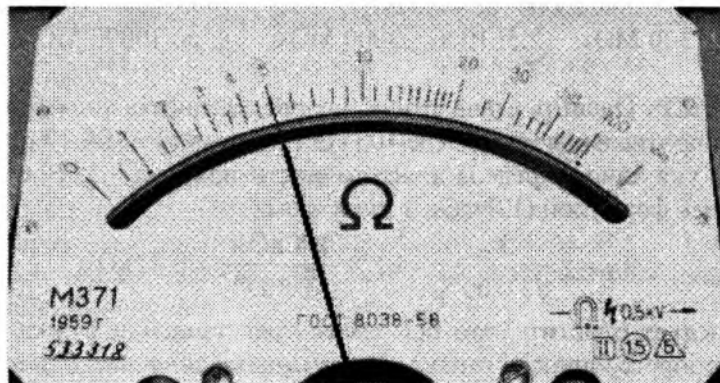


Рис. 6. Шкала омметра класса точности Ⓐ

### ПРИМЕР.

Необходимо оценить стандартную неопределенность типа *B* измерения сопротивления омметром М371 (рис. 6).

Показания прибора 5 Ом. Класс точности прибора (1,5). Воспользовавшись формулой (12) табл. 1, получаем:

$$u_B = \delta \frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 1,5\% \frac{5 \text{ Ом}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 0,043 \text{ Ом}.$$

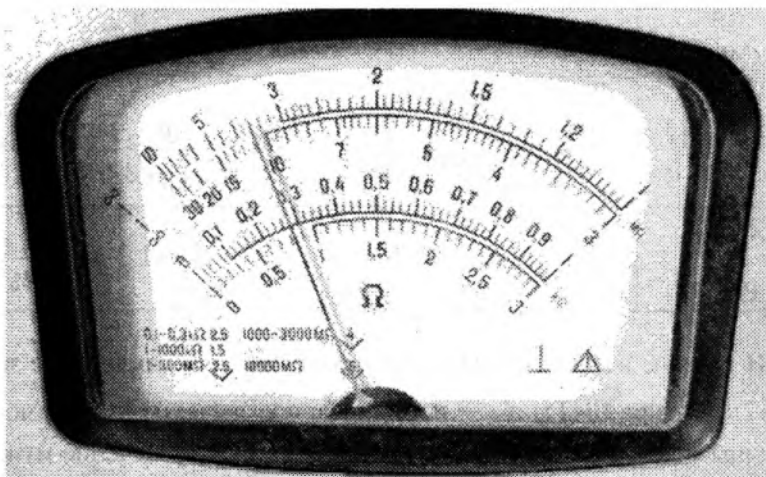


Рис. 7. Классы точности мегомметра Е6-17:

в диапазоне 0,1...0,3 кОм – 2,5; 1...1000 кОм – 1,5;  
1...300 МОм – 2,5; 1000...3000 МОм – 4; до 10000 МОм – 6

**ПРИМЕР:** Оценить стандартную неопределенность типа *B* измерения сопротивления на пределе 100 кОм мегомметром Е6-17 (рис. 7).

На указанном пределе класс точности прибора 1,5. Воспользовавшись формулой (13) табл. 1, получаем:

$$u_B = \gamma \frac{X_{\text{н}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 1,5\% \frac{100 \text{ кОм}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 0,87 \text{ кОм}.$$

Следует отметить, что при таком представлении класса точности неопределенность типа *B* не зависит от значения измеряемой величины.

### ПРИМЕР.

Необходимо оценить стандартную неопределенность типа *B* измерения сопротивления на пределе 10 МОм мегомметром Е6-17 (рис. 7). На указанном пределе класс точности прибора 2,5. Геометрическая середина шкалы на этом пределе составляет 20 МОм. Показания прибора 36 МОм. Воспользовавшись формулой (14) табл. 1, получаем:

$$u_B = \lambda \frac{(X_{\text{ср}} + X_{\text{изм}})^2}{X_{\text{ср}} \sqrt{3} \cdot 100\%} = 2,5\% \frac{(20 \text{ МОм} + 36 \text{ МОм})^2}{20 \text{ МОм} \sqrt{3} \cdot 100\%} = 2,3 \text{ МОм}.$$

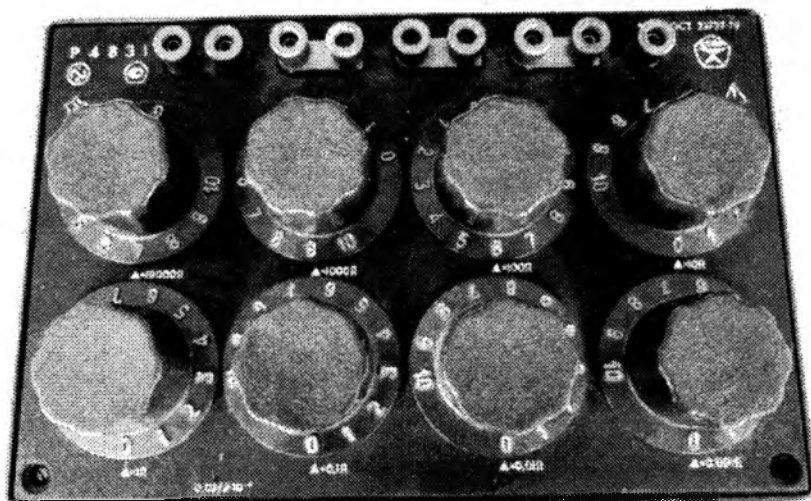


Рис. 8. Магазин сопротивлений класса точности  $0,02/2 \cdot 10^{-6}$

### ПРИМЕР.

Необходимо оценить стандартную неопределенность типа *B* воспроизведения сопротивления магазином Р4831 (рис. 8).

Установленное значение сопротивления на магазине 79,6 кОм. Нормированное значение сопротивления составляет 111110 Ом. Класс точности магазина  $0,02/2 \cdot 10^{-6}$ . Воспользовавшись формулой (15) табл. 1, получаем:

$$u_B = \left[ c + d \left( \frac{X_{\text{н}}}{X_{\text{изм}}} - 1 \right) \right] \frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = \left[ 0,02 + 2 \cdot 10^{-6} \left( \frac{111110}{79600} - 1 \right) \right] \frac{79600}{\sqrt{3} \cdot 100} = 9,2 \text{ Ом}.$$

Для калиброванных СИТ стандартная неопределенность рассчитывается из данных о расширенной неопределенности  $U$  и коэффициенте охвата  $k$ , взятых из сертификата о калибровке по формуле:

$$u_B = \frac{U}{k}. \quad (16)$$

#### **ПРИМЕР:**

Оценить стандартную неопределенность типа  $B$  воспроизведения сопротивления катушкой Р321.

В сертификате о калибровке указано, что значению сопротивления приписана расширенная неопределенность 1 мОм с коэффициентом охвата  $k = 2$  для уровня доверия  $p = 0,95$ . Используя формулу (16) получаем стандартную неопределенность типа  $B$ :

$$u_B = \frac{1 \text{ мОм}}{2} = 0,5 \text{ мОм}.$$

### **4. Базовый алгоритм оценивания неопределенности измерений**

Этот алгоритм описан в GUM [1] и включает в себя следующие операции.

#### **4.1. Составление модельного уравнения**

Модельное уравнение (2) выражает зависимость между выходной (измеряемой) величиной  $Y$  и входными величинами  $X_1, X_2, \dots, X_m$ :

$$Y = f(X_1, \dots, X_m)$$

#### **ПРИМЕР.**

Определение скорости  $V$  транспортного средства, проходящего расстояние  $L$  за время  $T$ :

$$V = \frac{L}{T}.$$

#### **4.2. Оценивание входных величин**

Значения входных величин находят путем их измерения с одно-

кратными или многократными наблюдениями или берут из внешних источников.

При проведении многократных измерений за значение входной величины принимают среднее арифметическое результатов ряда отдельных наблюдений (7):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

#### **ПРИМЕР.**

Путь, проходимый транспортным средством  $l=1000$  м известен априори.

Время прохождения этого отрезка пути измерялось 3-хкратно секундомером, при этом были получены следующие результаты:

$$t_1=100,1 \text{ с}; t_2=99,9 \text{ с}; t_3=100,0 \text{ с}.$$

Среднее значение этих измерений равно:

$$\bar{t} = \frac{100,1 + 99,9 + 100,0}{3} = 100 \text{ с}.$$

### **4.3. Вычисление оценки результата измерения**

Оценку выходной величины  $y$  получают при подстановке в модельное уравнение оценок входных величин  $x_1, \dots, x_m$ :

$$y = f(x_1, \dots, x_m). \quad (17)$$

#### **ПРИМЕР.**

Скорость транспортного средства будет равна:

$$v = \frac{1000 \text{ м}}{100 \text{ с}} = 10 \text{ м/с}.$$

### **4.4. Вычисление стандартных неопределенностей входных величин**

**4.4.1. Стандартная неопределенность измерения типа  $A_i$ -й входной величины  $x_i$  находится по формуле:**

$$u_A(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i(n_i - 1)}}, \quad (18)$$

где  $n_i$  – количество наблюдений, выполняемых при измерении  $x_i$ .

### ПРИМЕР.

Стандартная неопределенность типа  $A$  оценки времени прохождения отрезка пути  $L$  транспортным средством будет равна:

$$u_A(\bar{t}) = \sqrt{\frac{(100,1 - 100)^2 + (99,9 - 100)^2 + (100 - 100)^2}{3(3 - 1)}} = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,058 \text{ с.}$$

**4.4.2. Стандартная неопределенность типа  $B$**   $i$ -й входной величины находится в зависимости от априорной информации о изменчивости входной величины. Если  $i$ -я входная величина является неисключенной систематической погрешностью (НСП) с границами  $\pm\theta_i$ , то ее неопределенность вычисляется по формуле:

$$u_B(x_i) = \theta_i / \alpha_i$$

где  $\alpha_i$  – коэффициент, соответствующий принимаемому закону распределения внутри границ НСП:

- для равномерного (или неизвестного) закона распределения  $\alpha = \sqrt{3}$ ;
- для нормального закона распределения (для вероятности  $p=0,95$ )  $\alpha=2$ ;
- для треугольного закона распределения  $\alpha = \sqrt{6}$ ;
- для закона арксинуса  $\alpha = \sqrt{2}$ ;

### ПРИМЕР.

Стандартная неопределенность типа  $B$  оценки времени прохождения отрезка пути  $L$  транспортным средством будет вычисляться из границ НСП секундомера  $\theta_t=0,1$  с, откуда  $u_B(t) = 0,1/\sqrt{3} = 0,058$  с.

Стандартная неопределенность типа  $B$  оценки отрезка пути  $L$  транспортным средством будет вычисляться из границ НСП задания  $L$ :  $\theta_l=1$  м, откуда  $u_B(l) = 1/\sqrt{3} = 0,58$  м.

#### **4.5. Вычисление вклада неопределенности входной величины в неопределенность измеряемой величины**

Вклад неопределенности каждой входной величины в неопределенность измеряемой величины (суммарную стандартную неопределенность)  $u_i(y)$  определяют как произведение неопределенности входной величины  $u(x_i)$  на коэффициент чувствительности  $c_i$ :

$$u_i(y) = c_i u(x_i). \quad (19)$$

Коэффициенты чувствительности  $c_i$  показывают, как оценка выходной величины будет изменяться с изменением оценок входных величин  $x_i$ . Их находят как частные производные выходной величины по каждой из входной величин<sup>12</sup>:

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_m} \quad (20)$$

Таблица частных производных и правила дифференцирования приведены в Приложении 3.

#### **ПРИМЕР.**

Коэффициент чувствительности скорости транспортного средства к изменению пройденного пути будет равен:

$$c_l = \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial L} = \frac{1}{T} \Big|_{t=100\text{ с}} = 0,01\text{ с}^{-1};$$

Коэффициент чувствительности скорости транспортного средства к изменению времени будет равен:

$$c_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{L}{T^2} \Big|_{l=1000\text{ м}, t=100\text{ с}} = -\frac{1000}{100^2} = -0,1\text{ м/с}^2.$$

Следовательно, вклад неопределенности задания пути в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_l(v) = c_l u_B(l) = 0,01\text{ с}^{-1} \cdot 0,58\text{ м} = 0,0058\text{ м/с}.$$

Вклад неопределенности измерения времени типа A в неопределенность измерения скорости равен:

<sup>12</sup> Графическая иллюстрация коэффициента чувствительности приведена в приложении 2.

$$u_{\text{Л}}(v) = c_i u_A(\bar{t}) = -0,1 \text{ м/с}^2 \cdot 0,058 \text{ с} = 0,0058 \text{ м/с}$$

Вклад неопределенности измерения времени типа *B* в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_{\text{Л}}(v) = c_i u_B(t) = -0,1 \text{ м/с}^2 \cdot 0,058 \text{ с} = 0,0058 \text{ м/с}.$$

**4.5.1. Для модельного уравнения в виде линейной комбинации входных величин вида**

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m,$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — постоянные коэффициенты, коэффициенты чувствительности равны коэффициентам при входных величинах:

$$c_1 = a_1, c_2 = a_2, \dots, c_m = a_m.$$

**4.5.2. Для модельного уравнения в виде произведения или частного от деления входных величин, например:**

$$Y = \frac{X_1 X_2}{X_3}$$

модули коэффициентов чувствительности равны модулям отношения значения измеряемой величины  $y$  к значению соответствующей входной величины:

$$|c_1| = \left| \frac{y}{x_1} \right|, |c_2| = \left| \frac{y}{x_2} \right|, |c_3| = \left| \frac{y}{x_3} \right|.$$

#### **ПРИМЕР.**

Модуль коэффициента чувствительности скорости транспортного средства к изменению пройденного пути будет равен:

$$|c_l| = \left| \frac{v}{l} \right| = \frac{10 \text{ м/с}}{1000 \text{ м}} = 0,01 \text{ с}^{-1},$$

что совпадает со значением коэффициента чувствительности, полученным выше путем дифференцирования.

Модуль коэффициента чувствительности скорости транспортного средства к изменению времени будет равен:

$$|c_t| = \left| \frac{v}{t} \right| = \frac{10 \text{ м/с}}{100 \text{ с}} = 0,1 \text{ м/с}^2,$$

что совпадает со значением коэффициента чувствительности, полученным выше путем дифференцирования.

#### **4.6. Определение стандартной неопределенности выходной величины (суммарной стандартной неопределенности)**

Определение суммарной стандартной неопределенности осуществляется по формулам, называемым законом распространения неопределенности. При отсутствии корреляций между входными величинами стандартная неопределенность выходной величины определяется как

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y)} = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \dots + c_m^2 u^2(x_m)}. \quad (21)$$

**ПРИМЕР:** Суммарная стандартная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет равна:

$$u_c(v) = \sqrt{0,0058^2 + 0,0058^2 + 0,0058^2} = 0,0058 \cdot \sqrt{3} = 0,01 \text{ м/с}.$$

#### **4.7. Вычисление коэффициента охвата**

Коэффициент охвата представляет собой множитель, на который умножают стандартную суммарную оценку неопределенности для получения расширенной неопределенности. Его приближенное значение для уровня доверия 0,95 равно 2. При наличии вкладов неопределенности типа A, GUM рекомендует брать в качестве коэффициента охвата коэффициент Стьюдента для уровня доверия 0,95 и эффективного числа степеней свободы  $\nu_{\text{eff}}$ , определяемого по формуле Велча–Саттерсвейта [1]:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^m \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}. \quad (22)$$

Для прямых многократных измерений (или для косвенных многократных измерений с одной входной величиной, измеряемой по типу A) с числом наблюдений  $n$  эта формула может быть представлена в виде:

$$\nu_{\text{eff}} = (n-1) \left[ \frac{u_c(y)}{u_A} \right]^4. \quad (23)$$

**ПРИМЕР:** Эффективное число степеней свободы при измерении скорости транспортного средства будет равно:

$$\nu_{\text{eff}} = (3-1) \left[ \frac{0,1}{0,058} \right]^4 = 2 \cdot (\sqrt{3})^4 = 18.$$

Тогда коэффициент охвата будет вычисляться как коэффициент Стьюдента для уровня доверия 0,95 и эффективного числа степеней свободы 18:

$$k = t_{0,95}(\nu_{\text{eff}}) = 2,1.$$

При отсутствии вкладов неопределенности типа *A* формула (22) дает бесконечность, поэтому коэффициент охвата формально должен быть равен коэффициенту Стьюдента от бесконечности для вероятности 0,95, т.е.  $k = t_{0,95}(\infty) = 2,0$ . Однако такое значение коэффициента охвата соответствует случаю, когда значениям измеряемой величины  $Y$  приписывают нормальный закон распределения (рис. 4), являющийся результатом влияния на нее большого числа факторов (источников неопределенности).

Нормальный закон для вероятности 100 % имеет бесконечные границы. Для ограничения интервала возможных значений  $Y$  при указании расширенной неопределенности используют вероятность (уровень доверия)  $p = 0,95$ .

Если среди вкладов неопределенности имеется доминирующий (отличающийся не менее чем в 3 раза от остальных), распределенный по равномерному закону, закон распределения выходной величины уже нельзя считать нормальным. В этом случае коэффициент охвата можно взять из табл. 2[5].

Таблица 2. Значения коэффициентов охвата для заданного соотношения двух доминирующих равномерно распределенных вкладов неопределенности типа *B*,

| $u_{B2}/u_{B1}$ | 0–<br>0,1 | 0,2  | 0,3  | 0,4 | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9–<br>1,0 |
|-----------------|-----------|------|------|-----|------|------|------|------|-------------|
| $k$             | 1,65      | 1,70 | 1,75 | 1,8 | 1,83 | 1,86 | 1,88 | 1,89 | 1,90        |

В табл.  $2u_{B1}$  и  $u_{B2}$  – соответственно значения наибольшего и второго по величине вкладов неопределенности типа *B*.

#### **4.8. Вычисление расширенной неопределенности**

Расширенную неопределенность  $U$  получают путем умножения неопределенности выходной величины (суммарной стандартной неопределенности) на коэффициент охвата (5):

$$U(y) = k \cdot u_c(y).$$

#### **ПРИМЕР.**

Расширенная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет равна:

$$U(v) = 2,1 \cdot 0,01 = 0,021 \text{ м/с}.$$

#### **4.9. Запись полного результата измерения**

Полный результат измерения включает в себя оценку выходной величины и приписанное ей значение расширенной неопределенности с указанием уровня доверия (1):

$$Y = y \pm U, p = 0,95.$$

Значение расширенной неопределенности указывается с числом значащих цифр, не больше двух. Результат измерения, как и значения входных величин, округляют так, чтобы они соответствовали своим неопределенностям.

#### **ПРИМЕР.**

Результат измерения скорости транспортного средства будет записан в виде:

$$V = (10,00 \pm 0,21) \text{ м/с}, p = 0,95.$$

#### **4.10. Составление бюджета неопределенности**

Полученные в процессе реализации базового алгоритма промежуточные результаты удобно представлять в виде бюджета неопределенности (табл. 3), который включает в себя список всех входных величин, их оценок вместе с приписанными им стандартными неопределенностями измерения, коэффициентами чувствительности и числами степеней свободы.

Кроме информации о входных величинах в бюджет удобно включать информацию об измеряемой величине: результат измерения, суммарную стандартную неопределенность, эффективное число степеней свободы, коэффициент охвата и расширенную неопределенность.

Таблица 3. Бюджет неопределенности

| Входная величина    | Оценка входной величины | Стандартная неопределенность           | Число степеней свободы             | Коэффициент чувствительности | Вклад неопределенности       |
|---------------------|-------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $X_1$               | $x_1$                   | $u(x_1)$                               | $\nu_1$                            | $c_1$                        | $u_1(y)$                     |
| $X_2$               | $x_2$                   | $u(x_2)$                               | $\nu_2$                            | $c_2$                        | $u_2(y)$                     |
| ...                 | ...                     | ...                                    | ...                                | ...                          | ...                          |
| $X_m$               | $x_m$                   | $u(x_m)$                               | $\nu_m$                            | $c_m$                        | $u_m(y)$                     |
| Измеряемая величина | Результат измерения     | Суммарная стандартная неопределенность | Эффективное число степеней свободы | Коэффициент охвата           | Расширенная неопределенность |
| $Y$                 | $y$                     | $u(y)$                                 | $\nu_{eff}$                        | $k$                          | $U$                          |

**ПРИМЕР.**

Бюджет неопределенности измерения скорости (табл. 4).

Таблица 4. Бюджет неопределенности измерения скорости

| Входная величина    | Оценка входной величины | Стандартная неопределенность           | Число степеней свободы             | Коэффициент чувствительности | Вклад неопределенности, м/с  |
|---------------------|-------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $L$                 | 1000 м                  | 0,58 м                                 | $\infty$                           | $0,01 \text{ с}^{-1}$        | 0,0058                       |
| $T$                 | 100 с                   | 0,58 с                                 | 2                                  | $-0,1 \text{ м/с}^2$         | -0,0058                      |
|                     |                         | 0,58 с                                 | $\infty$                           |                              | -0,0058                      |
| Измеряемая величина | Результат измерения     | Суммарная стандартная неопределенность | Эффективное число степеней свободы | Коэффициент охвата           | Расширенная неопределенность |
| $V$                 | 10 м/с                  | 0,01 м/с                               | 18                                 | 2,1                          | 0,021 м/с                    |

## **5. Учет корреляции при оценивании неопределенности входных величин**

Результаты измерения входных величины могут быть попарно коррелированы (статистически зависимы). Степень их корреляции выражается с помощью коэффициента корреляции  $r$ , значение которого лежит в пределах от  $-1$  до  $1$ . При  $r=0$  корреляция отсутствует<sup>13</sup>.

Корреляция возникает при одновременном наблюдении обеих входных величин в одном измерительном эксперименте (наблюдаемая корреляция).

В этом случае коэффициент корреляции вычисляется по типу  $A$  по формуле:

$$r_{i,k} = \frac{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k)}{u(x_i)u(x_k)}. \quad (23)$$

### **5.1. Расчет суммарной стандартной неопределенности для коррелированных данных**

Если в модельном уравнении

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$$

присутствуют две входных величины (например,  $X_i, X_j$ ), результаты многократных измерений которых выполнены одновременно и коррелируют между собой с коэффициентом корреляции  $r_{ij}$ , то выражение для суммарной стандартной неопределенности будет иметь следующий вид:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m c_k^2 u_k^2(y) + 2r_{ij} c_i c_j u(x_i) u(x_j)}. \quad (24)$$

<sup>13</sup> Графическая иллюстрация наличия корреляции приведена в приложении 2.

### ПРИМЕР.

При одновременном трехкратном измерении массы двух человек  $m_1$  и  $m_2$  были получены внесенные в табл. 5 результаты измерений:

Таблица 5. Результаты измерения масс

|          |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|
| $m_{1i}$ | 61 кг | 60 кг | 59 кг |
| $m_{2i}$ | 80 кг | 81 кг | 79 кг |

Эти результаты по постановке задачи не должны быть коррелированы<sup>14</sup>, однако их обработка дала следующие результаты:

- средние значения масс:  $\bar{m}_1 = 60$  кг,  $\bar{m}_2 = 80$  кг;
- стандартные неопределенности типа А измерения масс:  
 $u_A(\bar{m}_1) = 0,58$  кг,  $u_A(\bar{m}_2) = 0,58$  кг;
- коэффициент корреляции между результатами измерения масс:

$$r_{1,2} = \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{[(61 - 60)(80 - 80) + (60 - 60)(81 - 80) + (59 - 60)(79 - 80)]}{0,58 \cdot 0,58} = 0,5.$$

При учете корреляции стандартная неопределенность суммарной массы двух человек будет равна:

$$u(y) = \sqrt{0,58^2 + 0,58^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,58 \cdot 0,58} = 1 \text{ кг.}$$

### **5.2. Проверка значимости коэффициента корреляции вычисленного по ограниченному количеству наблюдений**

Проверить значимость коэффициента корреляции для его дальнейшего учета (или неучета) позволяет применение критерия Стьюдента):

<sup>14</sup> Следует отметить, что любые перестановки результатов измерений в табл. 5 *всегда будут давать коэффициент корреляции отличный от 0*. Его значения будут равны:  $-0,5$ ;  $-1$ ;  $0,5$ ;  $1$ .

$$\frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \geq t_p(n-2), \quad (26)$$

где  $t_p(n-2)$  – коэффициент Стьюдента для числа степеней свободы  $(n-2)$ .

### **ПРИМЕР.**

Оценим значимость коэффициента корреляции при одновременном многократном измерении массы двух человек:

$$\frac{|0,5|}{\sqrt{1-0,5^2}} \sqrt{3-2} = 0,58 \square t_{0,95}(3-2) = 12,7.$$

При отсутствии корреляции стандартная неопределенность суммарной массы двух человек будет равна:

$$u(m) = \sqrt{0,58^2 + 0,58^2} = 0,82 \text{ кг.}$$

Таким образом, учет несуществующей корреляции увеличивает стандартную суммарную неопределенность на 22 %.

## **6 Взаимный пересчет характеристик погрешности и неопределенности измерений**

### **6.1. Пересчет от характеристик погрешности к оценкам неопределенности измерений**

Пересчет от характеристик погрешности к оценкам неопределенности измерений приведен в [6].

Исходными данными для расчета неопределенности являются

- оценка СКО  $S$  результата измерения<sup>15</sup>;
- оценка НСП в виде границ  $\theta(p)$  для заданной доверительной вероятности  $p$ ;
- число составляющих НСП  $m$ .
- количество результатов наблюдений  $n$ , взятых для вычисления среднего арифметического в качестве оценки результата измерения.

<sup>15</sup> В качестве результата измерения принимается среднее арифметическое результатов многократных наблюдений измеряемой величины.

Используя эти исходные данные, получаем:

- оценку стандартной неопределенности по типу A  $\hat{u}_A = S$ ;
- оценку стандартной неопределенности по типу B

$$\hat{u}_B = \frac{\theta(p)}{K(p)\sqrt{3}},$$

где коэффициент  $K(p) = 1,1$  для  $p = 0,95$ ;  $K(p) = 1,4$  для  $p = 0,99$  и  $m > 4$ <sup>16</sup>.

- оценку суммарной неопределенности  $\hat{u}_c = \sqrt{\hat{u}_A^2 + \hat{u}_B^2}$ ;
- оценку эффективного числа степеней свободы

$$\hat{\nu}_{eff} = (n-1) \left[ 1 + \frac{\hat{u}_B^2}{\hat{u}_A^2} \right]^2;$$

- оценку коэффициента охвата  $k$  как коэффициента Стьюдента  $t_{0,95}(\hat{\nu}_{eff})$  для вероятности 0,95 и полученной оценки числа степеней свободы  $\hat{\nu}_{eff}$ ;
- оценку расширенной неопределенности  $\hat{U}_p = k\hat{u}_c$ .

## **6.2. Пересчет от неопределенности к характеристикам погрешности измерений**

Пересчет от неопределенности к характеристикам погрешности измерений приведен в [1].

Исходными данными при представлении неопределенности для расчета оценок характеристик погрешности являются:

- расширенная неопределенность  $U$ ;
- коэффициент охвата  $k$ ;
- количество результатов наблюдений  $n$ .

В этом случае можно получить:

---

<sup>16</sup> При невыполнении этого неравенства следует находить коэффициент  $K(p)$  в результате деления доверительного коэффициента, полученного из композиции равновероятных законов распределения составляющих НСП на  $\sqrt{3}$  [1].

- оценку СКО, характеризующего суммарную погрешность

$$\hat{S}_{\Sigma} = \frac{U_p}{k} = u_c;$$

- оценку СКО случайной погрешности результата измерений

$$\hat{S} = u_A = \hat{S}_{\Sigma} \cdot \sqrt{4(n-1)/v_{eff}}^{17};$$

- оценку СКО, характеризующего НСП

$$\hat{S}_{\theta} = u_B = \sqrt{\hat{S}_{\Sigma}^2 - \hat{S}^2};$$

- оценку доверительных границ НСП  $\hat{\theta}(p) = K_p \sqrt{3\hat{S}_{\theta}}$ ,

где коэффициент  $K(p) = 1,1$  для  $p = 0,95$ ;  $K(p) = 1,4$  для  $p = 0,99$  и  $m > 4$ .

- оценку доверительных границ погрешности

$$\Delta_p = \frac{t_p(n-1)\hat{S} + \hat{\theta}(p)}{\hat{S} + \hat{S}_{\theta}} \hat{S}_{\Sigma},$$

где  $t_p(n-1)$  - коэффициент Стьюдента для заданной вероятности  $p$  и числа степеней свободы  $(n-1)$ .

---

<sup>17</sup> Значение  $v_{eff}$  находят из таблицы Стьюдента для известного коэффициента охвата  $k = t_{0,95}(v_{eff})$ .

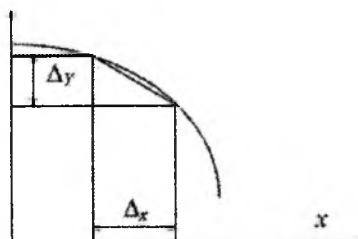
## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Коэффициенты Стьюдента для вероятностей 0,95 и заданного числа степеней свободы  $\nu$ <sup>18</sup>

| $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$    | $t_{0,95}$ |
|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|----------|------------|
| 1,0   | 12,7       | 2,0   | 4,30       | 3,0   | 3,18       | 9,0   | 2,26       | 19    | 2,09       | 29       | 2,04       |
| 1,1   | 10,3       | 2,1   | 4,11       | 3,5   | 2,94       | 10    | 2,23       | 20    | 2,09       | 30       | 2,04       |
| 1,2   | 8,65       | 2,2   | 3,95       | 4,0   | 2,78       | 11    | 2,20       | 21    | 2,08       | 35       | 2,03       |
| 1,3   | 7,50       | 2,3   | 3,81       | 4,5   | 2,66       | 12    | 2,18       | 22    | 2,07       | 40       | 2,02       |
| 1,4   | 6,66       | 2,4   | 3,68       | 5,0   | 2,57       | 13    | 2,16       | 23    | 2,07       | 50       | 2,01       |
| 1,5   | 6,02       | 2,5   | 3,56       | 5,5   | 2,50       | 14    | 2,14       | 24    | 2,06       | 60       | 2,00       |
| 1,6   | 5,52       | 2,6   | 3,48       | 6,0   | 2,45       | 15    | 2,13       | 25    | 2,06       | 70       | 1,99       |
| 1,7   | 5,12       | 2,7   | 3,39       | 6,5   | 2,40       | 16    | 2,12       | 26    | 2,06       | 100      | 1,98       |
| 1,8   | 4,80       | 2,8   | 3,32       | 7,0   | 2,37       | 17    | 2,11       | 27    | 2,05       | 200      | 1,97       |
| 1,9   | 4,53       | 2,9   | 3,25       | 8,0   | 2,31       | 18    | 2,10       | 28    | 2,05       | $\infty$ | 1,96       |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Графическая иллюстрация коэффициентов чувствительности  $\gamma$



$$u(y) = u(x) \cdot \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \right) = u(x) \frac{\partial(y)}{\partial(x)} = u(x) \cdot c_x$$

<sup>18</sup> Значения коэффициентов Стьюдента для дробных степеней свободы получены в работе [6].

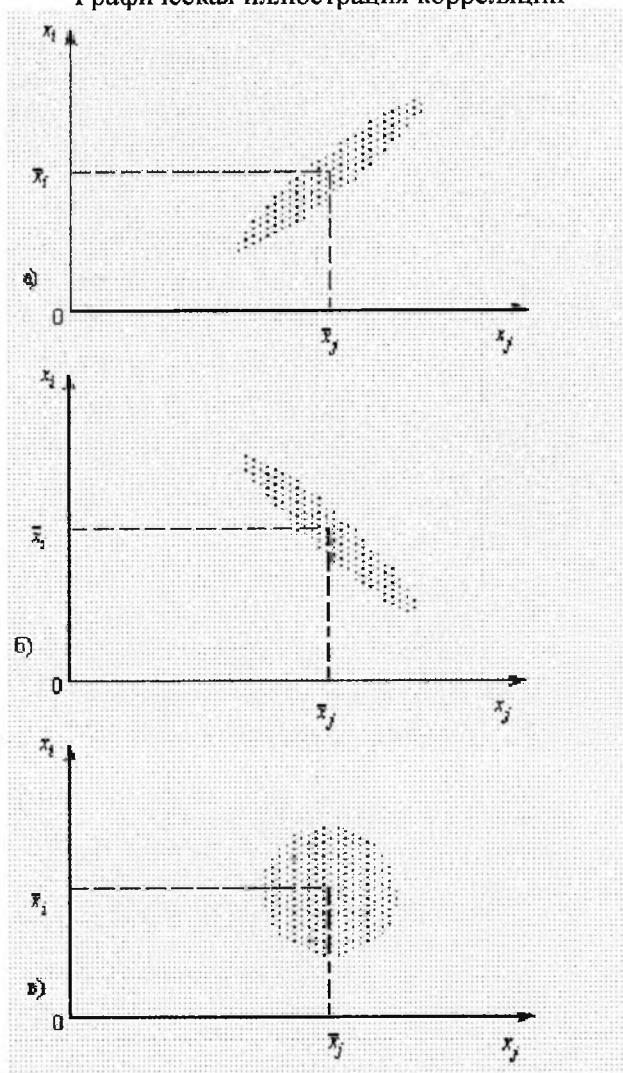
### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица производных

| Функция $f(x)$                   | Производная $f'(x)$     |
|----------------------------------|-------------------------|
| $C$ (константа)                  | 0                       |
| $x$                              | 1                       |
| $x^2$                            | $2x$                    |
| $x^n$                            | $nx^{n-1}$              |
| $\sqrt{x}$                       | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$   |
| $\frac{1}{x}$                    | $-\frac{1}{x^2}$        |
| $\sin(x)$                        | $\cos(x)$               |
| $\cos(x)$                        | $-\sin(x)$              |
| $\operatorname{tg}(x)$           | $\frac{1}{\cos^2(x)}$   |
| $\operatorname{ctg}(x)$          | $-\frac{1}{\sin^2(x)}$  |
| $e^x$                            | $e^x$                   |
| $a^x$                            | $a^x \ln a$             |
| $\ln x$                          | $\frac{1}{x}$           |
| $\log_a x$                       | $\frac{1}{x \ln a}$     |
| <b>Правила дифференцирования</b> |                         |
| $[Cf(x)]'$                       | $Cf'(x)$                |
| $(u \pm v)'$                     | $u' \pm v'$             |
| $(u \cdot v)'$                   | $u'v + uv'$             |
| $\left(\frac{u}{v}\right)'$      | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### Графическая иллюстрация корреляции



Изображение на корреляционной плоскости пар одновременно измеренных результатов наблюдений двух величин  $x_i$  и  $x_j$ : а)  $r_{ij} > 0$ ;

б)  $r_{ij} < 0$ ; в)  $r_{ij} = 0$

## Литература

1. Захаров И. П. Теория неопределенности в измерениях. – Харьков: Консум, 2002, 256 с.
2. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.
3. Бурдун Г. Д., Марков Б. Н. Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 120 с.
4. ГОСТ 8.401-80. Государственная система обеспечения единства измерений. Классы точности средств измерений. Общие требования. – М.: Государственный комитет СССР по стандартам, 1980. – 12 с.
5. Захаров И. П. Расчет коэффициента охвата для нормально и равномерно распределенных составляющих неопределенности // Системи обробки інформації, 2005, вип. 6, стор. 52-57.
6. ДСТУ РМГ 43:2006. Застосування «Руководства по оцениванию неопределенности измерений».
7. Захаров И. П., Климова Е. А. Расчет значений коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы // Системи обробки інформації, 2010, вип. 4(85), с. 43-47.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие                                                                                             |    |
| 1 Что такое неопределенность измерений?                                                                 | 5  |
| 2 Основные принципы оценивания неопределенности измерений                                               | 6  |
| 3 Источники неопределенности измерений                                                                  | 8  |
| 3.1 Наблюдаемое рассеивание показаний                                                                   | 8  |
| 3.2 Характеристики НСП                                                                                  | 12 |
| 4 Базовый алгоритм оценивания неопределенности измерений                                                | 16 |
| 4.1 Составление модельного уравнения                                                                    | 16 |
| 4.2 Оценивание входных величин                                                                          | 16 |
| 4.3 Вычисление оценки результата измерения                                                              | 17 |
| 4.4 Вычисление стандартных неопределенностей входных величин                                            | 17 |
| 4.5 Вычисление вклада неопределенности входной величины в неопределенность измеряемой величины          | 19 |
| 4.6 Определение стандартной неопределенности выходной величины (суммарной стандартной неопределенности) | 21 |
| 4.7 Вычисление коэффициента охвата                                                                      | 21 |
| 4.8 Вычисление расширенной неопределенности                                                             | 23 |
| 4.9 Запись полного результата измерения                                                                 | 23 |
| 4.10 Составление бюджета неопределенности                                                               | 23 |
| 5 Учет корреляции при оценивании неопределенности входных величин                                       | 25 |
| 5.1 Расчет суммарной стандартной неопределенности для коррелированных данных                            | 25 |
| 5.2 Проверка значимости коэффициента корреляции вычисленного по ограниченному количеству наблюдений     | 25 |
| 6 Взаимный пересчет характеристик погрешности и неопределенности измерений                              | 27 |
| 6.1 Пересчет от характеристик погрешности к оценкам неопределенности измерений                          | 27 |
| 6.2 Пересчет от неопределенности к характеристикам погрешности измерений                                | 28 |
| Приложения                                                                                              | 33 |
| Литература                                                                                              | 33 |

## **Уважаемые коллеги!**

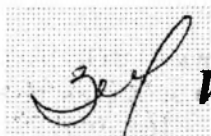
Кафедра метрологии и измерительной техники Харьковского национального университета радиоэлектроники на хоздоговорной основе предлагает осуществить:

- **Разработку процедур оценивания неопределенности** всех видов измерений при проведении **испытаний и калибровок** любых типов средств измерительной техники (СИТ) в соответствии с требованиями стандарта ДСТУ ISO/IEC 17025:2006 и «Положению НААУ про переходной период по обеспечению прослеживаемости измерений» от 02.01.2012 г.

- **обучение персонала на базе Вашего предприятия по оцениванию неопределенности измерений** при испытаниях и калибровках СИТ.

Для получения подробной информации обращаться к автору этой книги (контактная информация имеется на сайте [www.uncertainty.com.ua](http://www.uncertainty.com.ua)).

***Желаю всем полной определенности  
в работе и личной жизни!***



**И.П. Захаров**