



**ЗАХАРОВ ИГОРЬ ПЕТРОВИЧ** -  
д.т.н., профессор, автор книг:  
Теория неопределенности в измерениях;  
Неопределенность измерений для чай-  
ников и ... начальников;  
Калибровка-17025;  
Погрешность vs. неопределенность.

Генеральный партнер издания  
центр научно-технического сотрудничества «Диалог».

[www.cnts-dialog.ru](http://www.cnts-dialog.ru)  
[orgkomitet@cnts-dialog.ru](mailto:orgkomitet@cnts-dialog.ru)  
(812) 921-42-85

**Захаров И.П.**

# **НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ**

Учебное пособие



**ДЛЯ ЧАЙНИКОВ  
И ... НАЧАЛЬНИКОВ**

**И.П. Захаров**

# **НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ЧАЙНИКОВ И... НАЧАЛЬНИКОВ**

Учебное пособие

Издание 5-е  
переработанное и дополненное

г. Санкт-Петербург

Политехника-Сервис

2018

УДК 006.91.001  
ББК 30.10Ц  
3 38

И. П. Захаров

**Захаров И. П.** Неопределенность измерений для чайников и ... начальников: учеб. пособие, 5-е изд., перераб. и дополн. / И. П. Захаров. – Санкт-Петербург: Политехника-Сервис, 2018. – 60 с.

ISBN 978-5-906555-84-7

В учебном пособии в популярной форме изложены основные вопросы оценивания неопределенности измерений. Рассматриваются основные принципы, составляющие и базовый алгоритм оценивания неопределенности измерений, особенности оценивания суммарной стандартной и расширенной неопределенности, составление бюджета неопределенности, учет наблюдаемой корреляции (в том числе и методом приведений), взаимный пересчет погрешностей и неопределенностей измерений. Рассмотрены вопросы автоматизации оценивания неопределенности измерений на основе программы Excel, а также повышение точности оценивания неопределенности измерений методом Монте-Карло. Изложение материала сопровождается простыми примерами. В приложении приведены справочные материалы и поясняющие иллюстрации.

Рекомендуется широкому кругу читателей всех возрастных категорий и уровней математической подготовки для быстрого погружения в тему.

УДК 006.91.001  
ББК 30.10Ц

ISBN 978-5-906555-84-7

© И. П. Захаров, 2018



*«Нет ничего более противоречащего складу ума, памяти и соображению, чем то, что предлагают эти ученые. Абстракциям и пустым надеждам принесено в жертву благо теперешних поколений, ибо чтобы заставить старую нацию принять новые единицы необходимо переделать все административные правила, все расчеты промышленности. Такая работа устрашает разум».*

*Наполеон о метрической системе*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие «неопределенность» прочно вошло в жизнь современных метрологов как продукт неизбежного *процесса международной стандартизации оценивания качества измерений*. Этому способствовало внедрение стандарта ISO/IEC 17025 «Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий» [1], определяющего международное признание результатов испытаний и калибровок лабораторий, получивших аккредитацию от органов, которые заключили MRA<sup>1</sup> с органами других стран. Он законодательно закрепил необходимость наличия процедур оценивания неопределенности измерений, проводимых в аккредитованных лабораториях.

Концепция неопределенности болезненно вытесняет привычную, узаконенную в многочисленных отечественных нормативных документах теорию погрешности. Внедрение этой концепции требует проведения соответствующей методической работы. В 2002 году автором этой книги было издано учебное пособие [2], рассчитанное на студентов метрологических специальностей вузов. В 2013 году, к 10-летию проводимых кафедрой метрологии и измерительной техники Харьковского национального университета радиоэлектроники (ХНУРЕ) семинаров по неопределенности измерений<sup>2</sup>, было опубликовано первое издание настоящего пособия, предназначенного для тех, кто, занимаясь метрологией, не обладает достаточной базой в области математической статистики, однако, в силу сложившихся жизненных обстоятельств, вынужден в сжатые сроки разобраться в основных принципах оценивания неопределенности измерений. Таковыми являются либо не учившие, либо подзабывшие, по роду деятельности много лет не применявшие полученные знания на практике. С пониманием относясь к обеим

категориям, автор попытался предложить им доступный и краткий вариант изложения основ неопределенности измерений.

Идея написания этой книги принадлежит заместителю Генерального директора по метрологии ГП «Харьковстандартметрология» Чепеле Владимиру Николаевичу (начальнику!) и возникла в процессе проведения обучения персонала его предприятия в период аккредитации калибровочной лаборатории. Благодарность ему за это автора пособия безмерна в пределах разумного.

Следует отметить, что краткое и доступное изложение любого материала – задача неблагодарная, поскольку должна учитывать степень подготовленности и непредсказуемую логику обучаемого, а также требует порой несовместимого сочетания простоты и точности изложения. Поэтому автор признателен тем специалистам, чьи ценные критические замечания способствовали улучшению последующих изданий книги: Ефремовой Н.Ю. (Беларусь), Данилову А.А., Кадису Р.Л., Нежиховскому Г.Р., (Россия), Варше З.Л. (Польша), Коцюбе А.Н., Чалому В.П. (Украина).

Учитывая то, что ничто так не улучшает взаимопонимание между автором и читателем, как живой контакт, излагаемый материал постоянно отрабатывался на многочисленных курсах повышения квалификации и семинарах, проводимых автором для аудиторий с широким спектром начальной подготовки. Идя навстречу пожеланиям слушателей, в настоящее четвертое издание включены материалы по методам приведения и Монте-Карло.

При изложении материала автор руководствовался известным изречением Галилея: *«Нельзя чему-нибудь обучить человека, можно только помочь ему обнаружить это внутри себя»*. Поэтому текст пособия сопровождается простыми примерами, известными на бытовом уровне, и множеством иллюстраций, в том числе и юмористических. Для сохранения ясности изложения, многие уточняющие подробности помещены в сноски и вынесены в приложения.

В конце пособия приведены необходимые справочные сведения, а также список нормативной и научно-методической литературы, способствующей, при необходимости, более подробному изучению данного материала.

Автор заранее выражает благодарность всем читателям, которые пришлют отзывы и замечания по адресу: [newzip@ukr.net](mailto:newzip@ukr.net).

<sup>1</sup> MRA – The Mutual Recognition Arrangement – соглашение о взаимном признании национальных эталонов и сертификатов о калибровках и измерениях, выпускаемых Национальными метрологическими институтами, подготовленное CIPM.

<sup>2</sup> Информация о семинарах «Неопределенность измерения: научные, нормативные, прикладные и методические аспекты» приведена на сайте [www.uncertainty.com.ua](http://www.uncertainty.com.ua).

## 1. Что такое неопределенность измерений?

Неопределенность измерений – это *характеристика неточности* измерений, принятая на международном уровне<sup>3</sup>.

Понятие «неопределенность» (перевод английского термина «uncertainty»<sup>4</sup>) отражает отсутствие точного знания (истинного) значения *измеряемой величины*  $Y$  и выражает сомнение в том, насколько точно *измеренное значение*  $y$  представляет  $Y$ .

В соответствии с определением [3], неопределенность – это параметр, связанный с результатом измерений и характеризующий разброс значений, которые можно обоснованно приписать измеряемой величине. Первая буква слова «uncertainty»  $U$  стала обозначением этого параметра.

Приведенное определение лучше всего иллюстрируется стандартной формой записи результата измерения:

$$Y = y \pm U, \quad p = 0,95. \quad (1)$$

Из выражения видно, что вероятный разброс значений  $Y$  находится в диапазоне  $\pm U$  относительно измеренного значения  $y$  (рис. 1), а степень обоснованности нахождения значений  $Y$  в этом интервале определяется вероятностью (уровнем доверия)  $p = 0,95$ .

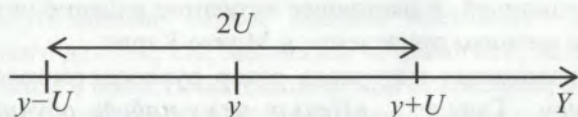


Рис. 1. К определению понятия «неопределенность измерения»

<sup>3</sup> Руководство по выражению неопределенности измерений (GUM) [3] разрабатывали 7 ведущих международных организаций: Международное Бюро Мер и Весов (BIPM), Международная Организация по Стандартизации (ISO), Международная Организация по Законодательной Метрологии (OIML), Международная Электротехническая Комиссия (IEC), Международный Союз Теоретической и Прикладной Физики (IUPAP), Международный Союз Теоретической и Прикладной Химии (IUPAC), Международная Федерация Клинической Химии (IFCC).

<sup>4</sup> Uncertainty в переводе означает неопределенность, недостоверность, неуверенность, неясность, неизвестность, сомнительность, изменчивость.

## 2. Основные принципы оценивания неопределенности измерений

В данном пособии будет рассмотрен так называемый *модельный подход* к оцениванию неопределенности измерений. Суть его заключается в использовании *модельного уравнения*<sup>5</sup> (уравнения измерения):

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m), \quad (2)$$

связывающего между собой *входные величины*  $X_1, X_2, \dots, X_m$  измерительного процесса с измеряемой (*выходной*) величиной  $Y$  (рис. 2). При этом по неопределенностям, связанным с входными величинами, вычисляют неопределенность измеряемой величины, поэтому модельный подход часто называют *восходящим*.

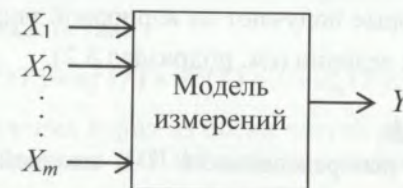


Рис. 2. Иллюстрация модельного подхода

В основу реализации модельного подхода положены шесть нижеперечисленных основных принципов.

### ПРИНЦИП 1.

Все составляющие неопределенности входных величин можно сгруппировать в две категории *в соответствии со способом их оценивания*<sup>6</sup>:

<sup>5</sup> Примером модельного уравнения может служить рассмотренное далее (п. 4.1) выражение, связывающее между собой скорость транспортного средства ( $V$ ) с длиной пройденного пути ( $L$ ) и временем его прохождения ( $T$ ).

<sup>6</sup> В отличие от теории погрешностей, где основным классификационным признаком является характер изменчивости составляющих (систематическая и случайная), в концепции неопределенности основным классификационным признаком является способ оценивания составляющих неопределенности (по типу  $A$  и  $B$ ).

- **категория А** – составляющие, оцениваемые путем применения статистических методов (путем обработки результатов многократных измерений);

- **категория В** – составляющие, оцениваемые другим способом (по характеристикам, взятым из спецификации на средство измерения (СИ), сертификата калибровки, методики выполнения измерений, из предыдущих экспериментов, из справочников и т.д.).

### ПРИНЦИП 2.

Составляющие типа А выражаются стандартными неопределенностями ( $u_A$ ), которые равны средним квадратичным (стандартным) отклонениям (СКО) средних арифметических повторных (многократных) наблюдений (см. подраздел 3.1).

### ПРИНЦИП 3.

Составляющие типа В выражаются стандартными неопределенностями ( $u_B$ ), которые получают из априорной информации об изменчивости входных величин (см. подраздел 3.2).

### ПРИНЦИП 4.

Стандартная неопределенность  $i$ -й входной величины  $u(X_i)$ , формирует пропорциональный вклад в неопределенность измеряемой величины  $u_i(Y)$  (рис. 3):

$$u_i(Y) = c_i u(X_i), \quad (3)$$

где  $c_i$  – т.н. коэффициент чувствительности.

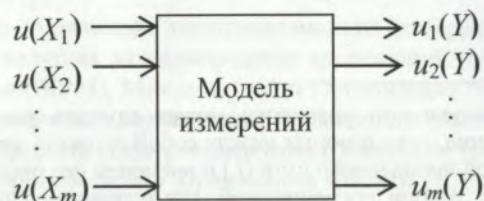


Рис. 3. Формирование вкладов неопределенности

### ПРИНЦИП 5.

Все вклады неопределенностей входных величин образуют стандартную неопределенность измеряемой величины  $u(Y)$  (суммарную стандартную неопределенность  $u_c$ ), которая вычисляется по правилу суммирования дисперсий<sup>7</sup> (рис. 4).

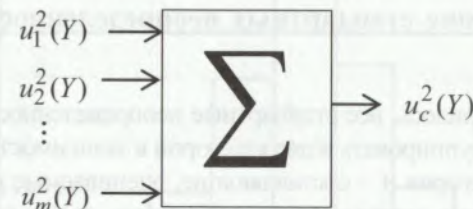


Рис. 4. Образование суммарной стандартной неопределенности

Для приведенных на рис. 4 вкладов неопределенности  $u_i(Y)$  это правило будет выглядеть так:

$$u_c^2(Y) = u_1^2(Y) + u_2^2(Y) + \dots + u_m^2(Y),$$

откуда путем извлечения корня из обеих частей равенства, получаем выражение, называемое в GUM **законом распространения неопределенности**:

$$u_c(Y) = \sqrt{u_1^2(Y) + u_2^2(Y) + \dots + u_m^2(Y)}. \quad (4)$$

### ПРИНЦИП 6.

Интервальной оценкой неопределенности является расширенная неопределенность  $U$ , которую получают путем умножения стандартной суммарной неопределенности  $u_c$  на коэффициент охвата  $k$ :

$$U = k \cdot u_c. \quad (5)$$

Коэффициент охвата зависит от закона распределения измеряемой величины и выбираемого уровня доверия  $p$ . В большинстве случаев коэффициент охвата для вероятности 0,95 принимается

<sup>7</sup> Правило суммирования дисперсий: дисперсия суммы нескольких независимых величин равна сумме их дисперсий. Дисперсия входной величины равна квадрату ее стандартной неопределенности.

равным 2, исходя из предположения о нормальном законе распределения измеряемой величины. Менее распространенные, но все же встречаемые на практике случаи оценки коэффициента охвата (например, через эффективное число степеней свободы) приведены в подразделе 4.7.

### 3. Оценивание стандартных неопределенностей входных величин

Как уже говорилось, все стандартные неопределенности входных величин можно сгруппировать в две категории в зависимости от способа их оценивания: категория *A* – составляющие, оцениваемые путем применения статистических методов (путем обработки результатов повторных измерений), категория *B* – составляющие, оцениваемые на основе априорной информации другими (нестатистическими) методами.

#### 3.1. Стандартные неопределенности типа *A*



Источником составляющих неопределенности измерений типа *A* является **наблюдаемое рассеивание показаний** используемых при измерении СИ. Если при  $n$  – кратном измерении одного и того же значения измеряемой величины показания СИ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  хаотически отличаются друг от друга (имеют разброс), то их можно рассматривать как реализации случайной величины.

Наиболее полной характеристикой любой случайной величины является ее закон распределения. Экспериментально закон распределения можно построить в виде **гистограммы** (столбиковой диаграммы) при наличии большого числа повторных показаний СИ ( $n \geq 40$ ) (рис. 5) величины одного и того же размера. Высота каждого столбика равна количеству показаний, попавших на интервал его существования шириной  $\Delta_x = (x_{\max} - x_{\min})/L$ . Количество интервалов  $L$  зависит от числа измерений  $n$ <sup>8</sup>.

Принято считать, что закон распределения повторных показаний СИ – нормальный (гауссов) (рис. 6)<sup>9</sup>.

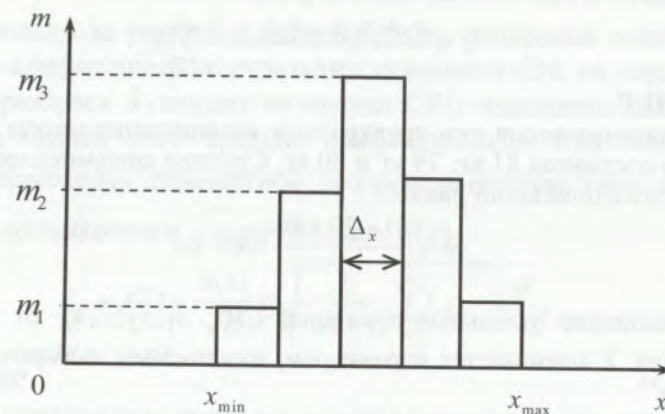


Рис. 5. Гистограмма распределения показаний СИ

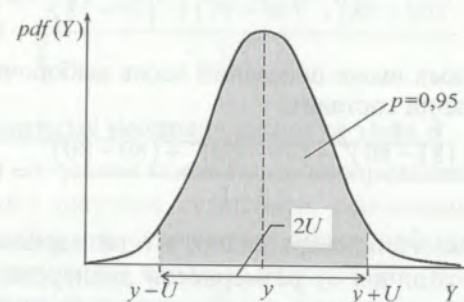


Рис. 6. Плотность распределения для нормального закона

<sup>8</sup> Этот закон описан математически немецким математиком К.Ф. Гауссом в сочинении «Теория движения небесных тел» (1809). Центральная предельная теорема теории вероятности показывает, что в случае, когда результат измерения складывается под действием многих **независимых** причин, причем каждая из них вносит лишь малый вклад, а совокупный итог определяется путем сложения, то распределение результата измерения близко к нормальному. Считается, что получить нормальный закон можно уже при суммировании более четырех **равнозначных** составляющих, распределенных по любому другому закону. Сумма составляющих, распределенных нормально, также имеет нормальный закон распределения.

<sup>9</sup> В рекомендациях ВНИИМ [4] предлагают выбирать 7-9 интервалов при числе измерений 40-100; 8-12 интервалов при числе измерений 100-500; 10-16 интервалов при числе измерений 500-1000 и 12-22 интервала при числе измерений 1000-10000.

Оценкой характеристики положения повторных показаний СИ с таким законом распределения является их **среднее арифметическое**  $\bar{x}$ , принимаемое за **измеренное значение**:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n x_q. \quad (6)$$

#### ПРИМЕР.

Показания весов при трехкратном взвешивании массы тела человека составили 81 кг, 79 кг и 80 кг. Среднее арифметическое значение этих показаний равно:

$$\bar{m} = \frac{81 + 79 + 80}{3} = 80 \text{ кг.}$$

Отклонение отдельных показаний СИТ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  от среднего значения  $\bar{x}$  оценивается параметром, называемым **выборочная дисперсия**<sup>10</sup>:

$$D(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (x_q - \bar{x})^2. \quad (7)$$

#### ПРИМЕР.

Для приведенных выше показаний весов выборочная дисперсия отдельных показаний составит:

$$D(m) = \frac{(81-80)^2 + (79-80)^2 + (80-80)^2}{3-1} = 1 \text{ кг}^2.$$

Из рассмотренного примера видно, что размерность измеренного значения (кг) отлична от размерности дисперсии (кг<sup>2</sup>). Для согласования этих размерностей из значения выборочной дисперсии извлекается корень и получается оценка СКО отдельных показаний:

$$S(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (x_q - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

#### ПРИМЕР.

Для приведенных выше показаний весов оценка СКО отдельных показаний составит:

<sup>10</sup> От английского слова dispersion – разброс, рассеивание.

$$S(m) = \sqrt{\frac{(81-80)^2 + (79-80)^2 + (80-80)^2}{3-1}} = 1 \text{ кг.}$$

Поскольку за результат многократного измерения принимают среднее арифметическое отдельных показаний СИ, то характеристикой разброса  $\bar{x}$  служит не оценка СКО отдельных показаний  $S(x)$ , а оценка СКО средних арифметических этих показаний  $S(\bar{x})$ , называемая стандартной неопределенностью типа  $A$  ( $u_A$ ), которая оказывается в  $\sqrt{n}$  раз меньше  $S(x)$ :

$$u_A(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{q=1}^n (x_q - \bar{x})^2}. \quad (9)$$

#### ПРИМЕР.

Для приведенных выше показаний весов стандартная неопределенность типа  $A$  составит:

$$u_A(\bar{m}) = \sqrt{\frac{(81-80)^2 + (79-80)^2 + (80-80)^2}{3(3-1)}} = 0,58 \text{ кг.}$$

### 3.2. Стандартные неопределенности типа $B$



В основе оценивания неопределенности типа  $B$  лежит «научное суждение», основанное на всей имеющейся в распоряжении априорной информации об изменчивости входных величин. Их основными источниками являются: объект измерения, процедура измерения, средство измерения, оператор, окружающая среда, расчеты и программное обеспечение.

#### 3.2.1. Детализация источников неопределенности типа $B$

##### 1. Объект измерения:

• неполное определение измеряемой величины (порождающее так называемую дефиниционную (собственную) неопределенность, являющуюся результатом ограниченной детализации в определении измеряемой величины), например, не указана температура окружающей среды и температурный коэффициент сопротивления резистора при измерении его сопротивления омметром;

- несовершенная реализация определения измеряемой величины, например, неточные значения, приписанные эталонам или стандартным образцам при калибровке СИ;

- нерепрезентативная выборка (измерения проводят на образце, не представляющем измеряемую величину), например, проведена несовершенная процедура пробоотбора.

## 2. Процедура измерения:

- аппроксимация и предположения, используемые в методе и методике измерения (измерительной процедуре), например, не учет влияния СИ (входное сопротивление вольтметра) на объект измерения (источник напряжения);

- неточная модель измерения, например, при измерении площади земельного участка в качестве его модели принимается прямоугольник без проверки адекватности этой модели.

## 3. Средство измерения:

- пределы максимальной основной и дополнительных погрешностей СИ, например, класс точности СИ, его температурная, частотная или динамическая погрешности;

- неопределенность калибровки СИ;

- квантование измеряемой величины цифровым СИ или разрешающая способность аналогового прибора.

## 4. Оператор:

- неточность выполнения измерительных операций, например, воспроизведения заданного объема жидкости с помощью мерной посуды;

- субъективная систематическая погрешность, вносимая оператором при снятии показаний аналоговых приборов (погрешности из-за параллакса и позиционирования).

## 5. Окружающая среда:

- неточное знание влияния условий окружающей среды на результат измерения, например неточное знание коэффициента линейного расширения материала штангенциркуля при измерении толщины материала в условиях, отличных от нормальных;

- неточные измерения величин, характеризующих условия измерений, например, неопределенность измерения температуры окружающей среды термометром.

## 6. Расчеты и программное обеспечение:

- неточное задание физических и математических констант и других параметров, полученных из сторонних источников и используемых при обработке данных;

- погрешности вычислительных процедур (разложение функций в ряд, численное интегрирование, интерполяция, конечная разрядная сетка компьютера);

- погрешности округления промежуточных результатов.

### 3.2.2. Оценивание стандартных неопределенностей типа B

Исходные данные об изменчивости входной величин могут выражаться стандартным отклонением  $s$ , нижней  $a^-$  и верхней  $a^+$  границами интервала, в пределах которого находятся возможные ее значения, доверительным интервалом (расширенной неопределенностью)  $U$ .

**Вариант 1.** Если изменчивость входной величины  $X_i$  представлена стандартным отклонением  $s_i$ , то оно принимается равным ее стандартной неопределенности  $u_B(X_i)$ :

$$u_B(X_i) = s_i.$$

### ПРИМЕР.

При приготовлении градуировочного раствора имеет место неопределенность, связанная со случайными отклонениями воспроизведения оператором заданного объема при заполнении колбы раствором [5]. Для ее нахождения заранее выполняют  $n$  опытов по заполнению колбы водой (с плотностью  $\rho=1$ ) и определению массы получаемых навесок  $m_q$  с расчетом стандартного отклонения  $s(m)$  по формуле:

$$s(m) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (m_q - \bar{m})^2}, \quad \text{где } \bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n m_q.$$

Это стандартное отклонение и будет численно равно стандартной неопределенности типа B однократно воспроизводимого впоследствии объема раствора  $V$ :

$$s(m) = \rho s(V) = \rho u_B(V).$$

**Вариант 2.** Если известно, что входная величина  $X_i$  обладает изменчивостью в пределах интервала  $[a^-; a^+]$ , то ее стандартную неопределенность можно определить по формуле:

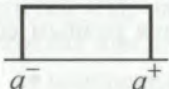
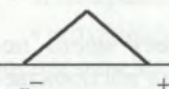
$$u_B(X_i) = (a^+ - a^-) / 2\alpha, \quad (10)$$

где коэффициент  $\alpha$  выбирается в зависимости от принимаемого закона распределения возможных значений  $X_i$  внутри этих границ. Если границы интервала  $[a^-; a^+]$  симметричны относительно нуля, т.е.  $a^- = -a$ ;  $a^+ = a$ , то

$$u_B(X_i) = a/\alpha. \quad (11)$$

Виды некоторых ограниченных законов распределения, их значения коэффициента  $\alpha$  и случаи их применения приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Законы распределения для ограниченных интервалов

| Закон                                                                                                                      | Случаи применения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <br>Равномерный,<br>$\alpha = \sqrt{3}$   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• спецификация указывает границы без указания уровня доверия, например, предел допускаемой погрешности СИ<sup>11</sup>;</li> <li>• сделано предположение в виде максимального интервала границ <math>\pm a</math> без каких-либо знаний о законе распределения, например, границы изменения температуры в лаборатории.</li> </ul>                                                                                         |
| <br>Треугольный,<br>$\alpha = \sqrt{6}$   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• когда можно считать, что значения входной величины вблизи оцененного значения более вероятны, чем возле границ, например, при воспроизведении объема жидкостей с помощью мерной посуды;</li> <li>• входная величина является суммой двух величин с равномерным законом распределения одинаковой ширины, например, в методе замещения погрешность отсчета входит в уравнение измерения дважды.</li> </ul>                |
| <br>Арксинусный,<br>$\alpha = \sqrt{2}$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>• когда входная величина является параметром синусоидально изменяющейся функции, в частности, при электрических измерениях синусоидального напряжения или при угловых измерениях (например, погрешность отсчета времени по циферблату секундомера, вызванная эксцентриситетом оси его стрелки);</li> <li>• для получения максимально возможного значения стандартной неопределенности из известных границ [6].</li> </ul> |

<sup>11</sup> К этому случаю относится и рассматриваемое ниже оценивание неопределенности измерений поверенными СИ исходя из их классов точности.

Для поверенных СИ с заданным классом точности оценивание неопределенности типа В производится в соответствии с табл. 2. В таблице применены известные формулы, связывающие пределы допускаемых относительной  $\delta$  и приведенных  $\gamma$  и  $\lambda$  погрешностей, через которые выражается класс точности СИТ [7], с пределами допускаемой абсолютной погрешности  $\theta$  в предположении ее равномерного распределения.

**Таблица 2.** Формулы для расчета стандартной неопределенности типа В

| Пример обозначения класса точности                                                            | Вид и обозначение нормируемой погрешности          | Формула для расчета стандартной неопределенности типа В                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <br>Рис. 7 | Относительная, $\delta$                            | $u_B = \delta \frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} \quad (12)$                                                             |
| 1,0<br>Рис. 8                                                                                 | Приведенная, $\gamma$                              | $u_B = \gamma \frac{X_H}{\sqrt{3} 100\%} \quad (13)$                                                                              |
| <br>Рис. 8 | Приведенная к длине неравномерной шкалы, $\lambda$ | $u_B = \lambda \frac{(X_{\text{ср}} + X_{\text{изм}})^2}{X_{\text{ср}} \sqrt{3} \cdot 100\%} \quad (14)$                          |
| 2,0/0,1<br>Рис. 9                                                                             | Относительная, $c/d$                               | $u_B = \left[ c + d \left( \frac{X_H}{X_{\text{изм}}} - 1 \right) \right] \frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} \quad (15)$ |

В таблице использованы обозначения:  $X_{\text{изм}}$  – измеренное значение (показание СИ),  $X_H$  – нормированное значение измеряемой величины (чаще всего – предел измерения);  $X_{\text{ср}}$  – значение измеряемой величины, соответствующее геометрической середине существенно неравномерной шкалы.

#### ПРИМЕР.

Необходимо оценить стандартную неопределенность типа В измерения сопротивления омметром М371 (рис. 7).

Показания прибора  $R_{\text{изм}} = 5$  Ом. Класс точности прибора 1,5. Воспользовавшись формулой (12) табл. 2, получаем:

$$u_B(R_{\text{изм}}) = \delta \frac{R_{\text{изм}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 1,5\% \frac{5 \text{ Ом}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 0,043 \text{ Ом}.$$

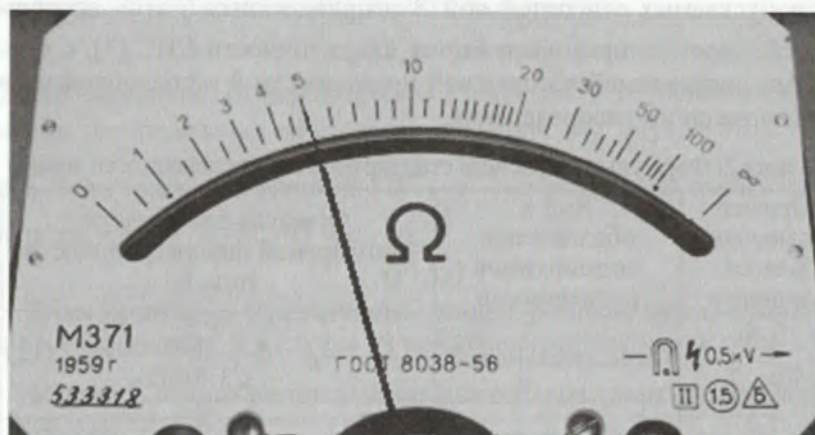


Рис. 7. Шкала омметра класса точности (1,5)

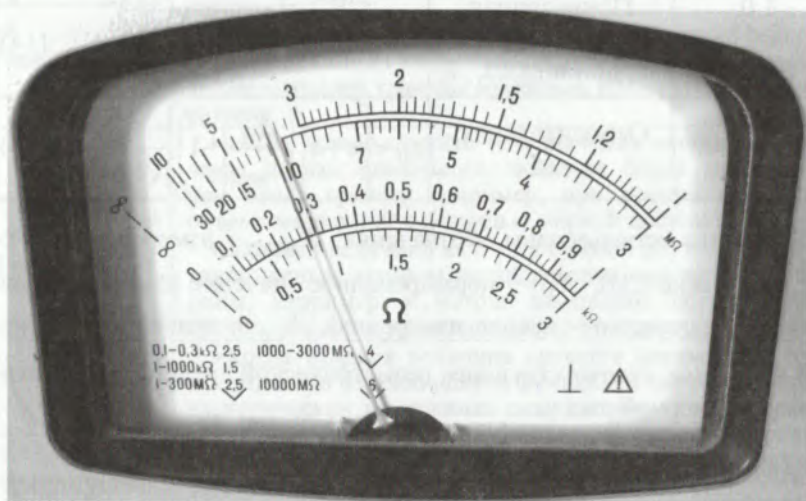


Рис. 8. Классы точности мегомметра Е6-17:  
в поддиапазоне (0,1...0,3) кОм — 2,5; (1...1000) кОм — 1,5;  
(1...300) МОм — 2,5; (1000...3000) МОм — 4; до 10000 МОм — 6

### ПРИМЕР 1.

Необходимо оценить стандартную неопределенность типа *B* измерения сопротивления мегомметром Е6-17 в поддиапазоне с конечным значением  $R_H = 100 \text{ кОм}$  (рис. 8). В указанном поддиапазоне класс точности прибора 1,5. Воспользовавшись формулой (13) табл. 2, получаем:

$$u_B(R_{\text{изм}}) = \gamma \frac{R_H}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 1,5\% \frac{100 \text{ кОм}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = 0,87 \text{ кОм}.$$

Следует отметить, что при таком представлении класса точности неопределенность типа *B* не зависит от значения измеряемой величины.

### ПРИМЕР 2.

Необходимо оценить стандартную неопределенность типа *B* измерения сопротивления мегомметром Е6-17 в поддиапазоне с начальным значением 10 МОм (рис. 8). В указанном поддиапазоне класс точности прибора 2,5. Геометрическая середина шкалы на этом пределе составляет  $R_{\text{ср}} = 20 \text{ МОм}$ . Показания прибора  $R_{\text{изм}} = 36 \text{ МОм}$ . Воспользовавшись формулой (14) табл. 2, получаем:

$$u_B(R_{\text{изм}}) = \lambda \frac{(R_{\text{ср}} + R_{\text{изм}})^2}{R_{\text{ср}} \sqrt{3} \cdot 100\%} = 2,5\% \frac{(20 \text{ МОм} + 36 \text{ МОм})^2}{20 \text{ МОм} \sqrt{3} \cdot 100\%} = 2,3 \text{ МОм}.$$

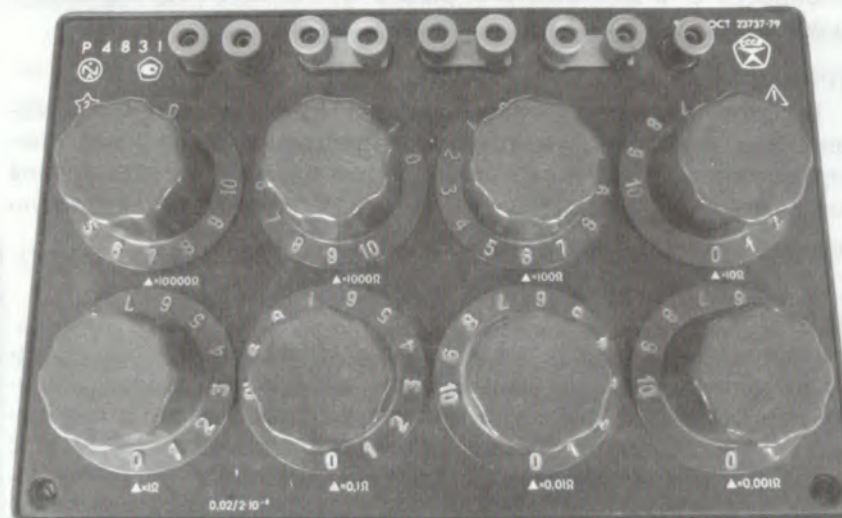


Рис. 9. Магазин сопротивлений класса точности  $0,02/2 \cdot 10^{-6}$

### ПРИМЕР.

Необходимо оценить стандартную неопределенность типа *B* воспроизведения сопротивления магазином Р4831 (рис. 9).

Установленное значение сопротивления на магазине  $R_{\text{изм}} = 79,6$  кОм. Нормированное значение сопротивления составляет  $R_{\text{н}} = 111110$  Ом. Класс точности магазина  $0,02/2 \cdot 10^{-6}$ . Воспользовавшись формулой (15) табл. 2, получаем:

$$u_B(R_{\text{изм}}) = \left[ c + d \left( \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{изм}}} - 1 \right) \right] \frac{R_{\text{изм}}}{\sqrt{3} \cdot 100\%} = \left[ 0,02 + 2 \cdot 10^{-6} \left( \frac{111110}{79600} - 1 \right) \right] \frac{79600}{\sqrt{3} \cdot 100} = 9,2 \text{ Ом}.$$

**Вариант 3.** Границы изменчивости величины выражены расширенной неопределенностью  $U$ , рассчитанной для уровня доверия  $p=0,95$ .

В этой ситуации для оценивания стандартной неопределенности типа *B* следует разделить значение  $U$  на соответствующий для данного случая коэффициент охвата  $k$ :

$$u_B = \frac{U}{k}. \quad (16)$$

Так, для **калиброванных СИ** стандартная неопределенность рассчитывается по формуле (16) из данных о расширенной неопределенности  $U$  и коэффициенте охвата  $k$ , взятых из сертификата о калибровке.

### ПРИМЕР 1.

В сертификате о калибровке катушки сопротивления Р321 указано, что значению сопротивления приписана расширенная неопределенность 1 мОм с коэффициентом охвата  $k=2$  для уровня доверия  $p=0,95$ . Используя формулу (16) получаем стандартную неопределенность типа *B*:  $u_B = 1 \text{ мОм} / 2 = 0,5 \text{ мОм}$ .

### ПРИМЕР 2.

Полученный ранее результат многократных измерений напряжения используется для дальнейших вычислений неопределенности измерения электрической мощности. Известно, что этому результату соответствует расширенная неопределенность 0,24 В с коэффициентом охвата  $k=2,2$  для уровня доверия  $p=0,95$ . Используя формулу (16) получаем стандартную неопределенность типа *B*:  $u_B = 0,24 \text{ В} / 2,2 = 0,11 \text{ В}$ .

## 4. Базовый алгоритм оценивания неопределенности измерений

Этот алгоритм описан в GUM [3] и включает в себя следующие операции.

### 4.1. Составление модельного уравнения

Модельное уравнение (2) выражает зависимость между выходной (измеряемой) величиной  $Y$  и входными величинами  $X_1, X_2, \dots, X_m$ :

$$Y = f(X_1, \dots, X_m).$$

### ПРИМЕР.

Определение скорости  $V$  транспортного средства, проходящего расстояние  $L$  за время  $T$ :

$$V = \frac{L}{T}.$$

### 4.2. Оценивание входных величин

Значения входных величин находят путем их измерения с однократными (единичными) или многократными (повторными) наблюдениями или берут из внешних источников.

При проведении многократных измерений за значение входной величины принимают среднее арифметическое результатов ряда отдельных наблюдений (7):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n x_q.$$

### ПРИМЕР.

Путь, проходимый транспортным средством  $l=100$  м известен априори. Время прохождения этого отрезка пути измерялось 3 раза секундомером, при этом были получены следующие результаты:

$$t_1=9,9 \text{ с}; \quad t_2=10,0 \text{ с}; \quad t_3=9,8 \text{ с}.$$

Среднее значение этих измерений равно:

$$\bar{t} = \frac{9,9 + 10,0 + 9,8}{3} = 9,9 \text{ с}.$$

### 4.3. Вычисление оценки результата измерения

Оценку измеряемой величины  $y$  получают при подстановке в модельное уравнение оценок входных величин  $x_1, \dots, x_m$ :

$$y = f(x_1, \dots, x_m). \quad (17)$$

#### ПРИМЕР.

Скорость транспортного средства будет равна:

$$v = \frac{100 \text{ м}}{9,9 \text{ с}} = 10,101 \text{ м/с.}$$

### 4.4. Вычисление стандартных неопределенностей входных величин

**4.4.1. Стандартная неопределенность измерения типа А**  $i$ -й входной величины  $x_i$  находится по формуле (см. подраздел 3.1):

$$u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i(n_i - 1)}}, \quad (18)$$

где  $n_i$  - количество наблюдений, выполняемых при измерении  $x_i$ .

#### ПРИМЕР.

Стандартная неопределенность типа А оценки времени прохождения отрезка пути  $L$  транспортным средством будет равна:

$$u_A(\bar{t}) = \sqrt{\frac{(9,9 - 9,9)^2 + (10,0 - 9,9)^2 + (9,8 - 9,9)^2}{3(3 - 1)}} = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,0577 \text{ с.}$$

**4.4.2. Стандартная неопределенность измерения типа В**  $i$ -й входной величины находится в зависимости от априорной информации об изменчивости входной величины, выраженная стандартным отклонением  $s$ , нижней  $a^-$  и верхней  $a^+$  границами интервала, в пределах которого находятся возможные ее значения, или расширенной неопределенностью  $U$  (см. подраздел 3.2).

#### ПРИМЕР.

Стандартная неопределенность типа В оценки времени прохождения отрезка пути  $L$  транспортным средством будет вычисляться исходя из предела допускаемой погрешности секундомера  $\theta_t = 0,1 \text{ с}$ , откуда  $u_B(t) = 0,1/\sqrt{3} = 0,0577 \text{ с}$ .

Стандартная неопределенность типа В оценки отрезка пути  $L$  транспортным средством будет вычисляться из предела допускаемой погрешности задания  $L$ :  $\theta_l = 1 \text{ м}$ , откуда  $u_B(l) = 1/\sqrt{3} = 0,577 \text{ м}$ .

### 4.5. Вычисление вклада неопределенности входной величины в неопределенность измеряемой величины



Вклад неопределенности каждой входной величины  $u(x_i)$  в неопределенность измеряемой величины  $u(y)$  (суммарную стандартную неопределенность) определяют как произведение  $u(x_i)$  на коэффициент чувствительности  $c_i$ :

$$u_i(y) = c_i u(x_i). \quad (19)$$

Коэффициенты чувствительности  $c_i$  показывают, как оценка выходной величины  $y$  будет изменяться с изменением оценок входных величин  $x_i$ . Их находят как частные производные выходной величины по каждой из входной величин:

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \bigg|_{x_1, x_2, \dots, x_m}. \quad (20)$$

Таблица частных производных и правила дифференцирования приведены в Приложении 3.

#### ПРИМЕР.

Коэффициент чувствительности неопределенности измерения скорости транспортного средства к неопределенности задания пройденного пути будет равен:

$$c_l = \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial L} = \frac{1}{T} \bigg|_{t=9,9 \text{ с}} = 0,101 \text{ с}^{-1};$$

Коэффициент чувствительности неопределенности измерения скорости транспортного средства к неопределенности измерения времени будет равен:

$$c_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{L}{T^2} \Big|_{l=100 \text{ м}, t=9,9 \text{ с}} = -\frac{100}{9,9^2} = -1,02 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, вклад неопределенности задания пути в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_l(v) = c_l u_B(l) = 0,101 \text{ с}^{-1} \cdot 0,577 \text{ м} = 0,0583 \text{ м/с}.$$

Вклад неопределенности измерения времени типа *A* в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_{t,A}(v) = c_t u_A(t) = -1,02 \text{ м/с}^2 \cdot 0,0577 \text{ с} = -0,0589 \text{ м/с}.$$

Вклад неопределенности измерения времени типа *B* в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_{t,B}(v) = c_t u_B(t) = -1,02 \text{ м/с}^2 \cdot 0,0577 \text{ с} = -0,0589 \text{ м/с}.$$

#### **4.5.1. Для модельного уравнения в виде линейной комбинации входных величин** вида

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m,$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – постоянные коэффициенты, коэффициенты чувствительности равны коэффициентам при входных величинах:

$$c_1 = a_1, c_2 = a_2, \dots, c_m = a_m.$$

#### **4.5.2. Для модельного уравнения в виде произведения степенных одночленов:**

$$Y = b \cdot X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} \cdot \dots \cdot X_m^{a_m}$$

коэффициент чувствительности  $c_j$  равен отношению значения измеряемой величины  $y$  к значению соответствующей входной величины  $x_j$ , умноженному на соответствующую степень  $a_j$ :

$$c_1 = a_1 \frac{y}{x_1}, c_2 = a_2 \frac{y}{x_2}, \dots, c_m = a_m \frac{y}{x_m}.$$

#### **ПРИМЕР.**

Коэффициент чувствительности скорости транспортного средства к изменению пройденного пути будет равен:

$$c_l = 1 \cdot \frac{v}{l} = \frac{10,1 \text{ м/с}}{100 \text{ м}} = 0,101 \text{ с}^{-1},$$

что совпадает со значением коэффициента чувствительности, по-

лученным выше путем дифференцирования.

Коэффициент чувствительности скорости транспортного средства к изменению времени будет равен:

$$c_t = -1 \cdot \frac{v}{t} = -\frac{10,1 \text{ м/с}}{9,9 \text{ с}} = -1,02 \text{ м/с}^2,$$

что совпадает со значением коэффициента чувствительности, полученным выше путем дифференцирования.

### **4.6. Вычисление стандартной неопределенности выходной величины (суммарной стандартной неопределенности)**

#### **4.6.1. Через вклады неопределенности**

Вычисление суммарной стандартной неопределенности осуществляется по формуле, называемой законом распространения неопределенности. При отсутствии корреляций<sup>12</sup> между результатами измерения входных величин стандартная неопределенность выходной величины определяется как

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i^2 u^2(x_i)}. \quad (21)$$

**ПРИМЕР:** Суммарная стандартная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет равна:

$$u_c(v) = \sqrt{0,0583^2 + 0,0589^2 + 0,0589^2} = 0,1017 \text{ м/с}.$$

#### **4.6.2. Через относительные неопределенности входных величин**

Для уравнения, описанного в пп. 4.5.2 *можно избежать вычисления коэффициентов чувствительности*, если суммарную стандартную неопределенность вычислять через *относительные неопределенности входных величин*  $\tilde{y}(x_i) = u(x_i)/|x_i|$  по формуле:

$$u_c(y) = y \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \tilde{u}^2(x_i)}. \quad (22)$$

Действительно, подставляя в выражение (21) коэффициенты

<sup>12</sup> Учет корреляции при оценивании неопределенности измерений рассмотрен в разделе 5.

чувствительности, приведенные в пп. 4.5.2, имеем:

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{a_1 y}{x_1} u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{a_2 y}{x_2} u(x_2)\right]^2 + \dots + \left[\frac{a_m y}{x_m} u(x_m)\right]^2} = y \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \tilde{u}^2(x_i)}.$$

**ПРИМЕР:** Суммарная стандартная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет равна:

$$u_c(v) = 10,101 \sqrt{(0,577/100)^2 + (-0,0577/9,9)^2 + (-0,0577/9,9)^2} = 0,1017 \text{ м/с}.$$

#### 4.7. Вычисление коэффициента охвата

Коэффициент охвата  $k$  представляет собой множитель, на который умножают оценку стандартной суммарной неопределенности  $u_c$  для получения расширенной неопределенности  $U$ . Его приближенное значение для уровня доверия 0,95 равно 2.

##### 4.7.1. Вычисление коэффициента охвата при наличии существенных вкладов неопределенности типа A

При наличии вкладов неопределенности типа A, GUM рекомендует брать в качестве коэффициента охвата *коэффициент Стьюдента*<sup>13</sup> (см. Приложение 1) для вероятности 0,95 и эффективного числа степеней свободы  $\nu_{eff}$ :

$$k = t_{0,95}(\nu_{eff}). \quad (23)$$

В пределе, при  $\nu_{eff} \rightarrow \infty$ ,  $k=2$  (коэффициент для нормального закона распределения для вероятности 0,95).

Эффективное число степеней свободы определяется по формуле Велча-Саттерсвейта [3]:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^m \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}. \quad (24)$$

где  $\nu_i$  – число степеней свободы  $i$ -й входной величины.

Значения чисел степеней свободы для разных видов стандартных неопределенностей входных величин приведены в табл. 3.

<sup>13</sup> Стьюдент – псевдоним английского ученого-статистика Уильяма Госкета, работавшего на пивоваренной фабрике Гиннесс и занимавшегося оценкой качества пива и урожайности ячменя по малым выборкам.

Для прямых многократных измерений (или для косвенных многократных измерений с одной входной величиной, оцениваемой по типу A) с числом наблюдений  $n$  формула (24) может быть представлена в виде:

$$\nu_{eff} = (n-1) \left[ \frac{u_c(y)}{u_A} \right]^4. \quad (25)$$

**Таблица 3.** Значение чисел степеней свободы стандартных неопределенностей входных величин

| Стандартная неопределенность входной величины, формула                                                                                                                                          | $\nu_i$     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Типа A, для $n$ измерений (9)                                                                                                                                                                   | $n-1$       |
| Типа B, СКО однократных измерений, определенное по ранее проведенным $n$ измерениям (8)                                                                                                         | $n-1$       |
| Типа B, вычисленная через границы, приведенные без указания уровня доверия, например пределы допускаемой погрешности СИ (10) (11)                                                               | $\infty$    |
| Типа B, вычисленная через расширенную неопределенность $U$ и коэффициент охвата $k$ , равный коэффициенту Стьюдента для эффективного числа степеней свободы $\nu_{eff}$ и вероятности 0,95 (16) | $\nu_{eff}$ |

**ПРИМЕР:** Эффективное число степеней свободы при измерении скорости транспортного средства будет равно:

$$\nu_{eff} = (n-1) \left[ \frac{u_c(v)}{u_{tA}(v)} \right]^4 = (3-1) \left[ \frac{0,1017}{0,0589} \right]^4 = 17,8.$$

Тогда коэффициент охвата будет вычисляться как коэффициент Стьюдента для уровня доверия 0,95 и эффективного числа степеней свободы 18:

$$k = t_{0,95}(\nu_{eff}) = 2,11.$$

##### 4.7.2. Вычисление коэффициента охвата при отсутствии вкладов неопределенности типа A

При отсутствии вкладов неопределенности типа A формула (25) дает бесконечность, поэтому коэффициент охвата формально должен быть равен коэффициенту Стьюдента от бесконечности для

вероятности 0,95, т.е.  $k = t_{0,95}(\infty) = 2,0$ . Однако такое значение коэффициента охвата соответствует случаю, когда значениям измеряемой величины  $Y$  приписывают **нормальный закон распределения** (рис. 6), имеющий место тогда, когда все вклады неопределенности типа  $B$  распределены по нормальному закону, либо когда имеется более четырех **равнозначных** вкладов, распределенных по любому другому закону.

Нормальный закон для вероятности 1,0 имеет бесконечные границы. Для ограничения интервала возможных значений  $Y$  при указании расширенной неопределенности используют вероятность (уровень доверия)  $p = 0,95$ .

Если среди вкладов неопределенности имеется доминирующее (отличающийся не менее чем в 3 раза от остальных), распределенные по равномерному закону, закон распределения выходной величины уже нельзя считать нормальным. В этом случае коэффициент охвата можно взять из табл. 4 [8]<sup>14</sup>.

**Таблица 4.** Значения коэффициентов охвата для двух доминирующих равномерно распределенных вкладов неопределенности типа  $B$

| $u_{B2}/u_{B1}$ | 0-0,1 | 0,2  | 0,3  | 0,4 | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9-1,0 |
|-----------------|-------|------|------|-----|------|------|------|------|---------|
| $k$             | 1,65  | 1,70 | 1,75 | 1,8 | 1,83 | 1,86 | 1,88 | 1,89 | 1,90    |

В табл. 4  $u_{B1}$  и  $u_{B2}$  – соответственно значения наибольшего и второго по величине вкладов неопределенности типа  $B$ .

#### 4.8. Вычисление расширенной неопределенности

Расширенную неопределенность  $U$  получают путем умножения неопределенности выходной величины (суммарной стандартной неопределенности) на коэффициент охвата (5):

$$U(y) = k \cdot u_c(y).$$

#### ПРИМЕР.

Расширенная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет равна:

$$U(v) = 2,11 \cdot 0,1017 = 0,2145 \text{ м/с.}$$

<sup>14</sup> Максимальные значения коэффициентов охвата для композиции равномерно и нормально распределенных входных величин приведены в Приложении 2.

#### 4.9. Запись полного результата измерения

Полный результат измерения включает в себя оценку выходной величины и приписанное ей значение расширенной неопределенности с указанием уровня доверия (1):

$$Y = y \pm U, p = 0,95.$$

При записи результата следует придерживаться следующих **правил округления**:



1. Значение расширенной неопределенности указывается **не более, чем с двумя значащими цифрами**<sup>15</sup>. При этом используется правило округления: если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остающиеся цифры в числе не изменяют; если же эта цифра равна или больше 5, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу<sup>16</sup>.

2. Измеренное значение должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и округленная расширенная неопределенность.

#### ПРИМЕР.

Результат измерения скорости транспортного средства будет записан в виде:

$$V = (10,10 \pm 0,21) \text{ м/с, } p = 0,95.$$

Запись 10,10 для измеренного значения скорости означает, что верны и сотые доли.

#### 4.10. Составление бюджета неопределенности

*Бюджет – это математическое подтверждение наших подозрений.*



Все полученные в процессе реализации базового алгоритма результаты удобно представлять в виде бюджета неопределенности (табл. 5), который включает в себя список всех входных величин, их оценок вместе с приписанными им стандартными неопреде-

<sup>15</sup> Значащие цифры данного числа – все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней справа. Все промежуточные значения неопределенности измерений записываются с числом значащих цифр 3-4.

<sup>16</sup> При округлении до двух значащих цифр это правило обеспечивает уменьшение расширенной неопределенности не более чем на 5 %, что соответствует требованиям [9].

ленностями измерения, коэффициентами чувствительности и числами степеней свободы. Кроме информации о входных величинах в бюджет удобно включать информацию об измеряемой величине: измеренное значение, суммарную стандартную неопределенность, эффективное число степеней свободы, коэффициент охвата и расширенную неопределенность.

**Таблица 5.** Бюджет неопределенности

| Входная величина    | Оценка входной величины | Стандартная неопределенность           | Число степеней свободы             | Коэффициент чувствительности | Вклад неопределенности       |
|---------------------|-------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $X_1$               | $x_1$                   | $u(x_1)$                               | $\nu_1$                            | $c_1$                        | $u_1(y)$                     |
| $X_2$               | $x_2$                   | $u(x_2)$                               | $\nu_2$                            | $c_2$                        | $u_2(y)$                     |
| ...                 | ...                     | ...                                    | ...                                | ...                          | ...                          |
| $X_m$               | $x_m$                   | $u(x_m)$                               | $\nu_m$                            | $c_m$                        | $u_m(y)$                     |
| Измеряемая величина | Измеренное значение     | Суммарная стандартная неопределенность | Эффективное число степеней свободы | Коэффициент охвата           | Расширенная неопределенность |
| $Y$                 | $y$                     | $u(y)$                                 | $\nu_{eff}$                        | $k$                          | $U$                          |

#### ПРИМЕР.

Бюджет неопределенности измерения скорости (табл. 6).

**Таблица 6.** Бюджет неопределенности измерения скорости

| Входная величина    | Оценка входной величины | Стандартная неопределенность           | Число степеней свободы             | Коэффициент чувствительности | Вклад неопределенности, м/с  |
|---------------------|-------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $L$                 | 100 м                   | 0,577 м                                | $\infty$                           | $0,101 \text{ с}^{-1}$       | 0,0583                       |
| $T$                 | 9,9 с                   | 0,0577 с                               | 2                                  | $-1,02 \text{ м/с}^2$        | -0,0589                      |
|                     |                         | 0,0577 с                               | $\infty$                           |                              | -0,0589                      |
| Измеряемая величина | Измеренное значение     | Суммарная стандартная неопределенность | Эффективное число степеней свободы | Коэффициент охвата           | Расширенная неопределенность |
| $V$                 | 10,101 м/с              | 0,1017 м/с                             | 17,8                               | 2,11                         | 0,2145 м/с                   |

Все величины должны приводиться в бюджете с указанием единиц измерения.

## 5. Автоматизация расчетов неопределенности измерений



*Shut up and calculate.*

*David Mermin*

Упростить рутинные расчеты оценивания неопределенности измерений можно, разработав на основе бюджета неопределенности измерений программу в среде «Excel».

Преимуществом использования программы «Excel» для автоматизации расчетов неопределенности измерения является возможность непосредственного вычисления вкладов неопределенности без определения коэффициентов чувствительности. Для этого используется метод частных приращений (рис.3).

Его суть заключается в использовании формулы:

$$u_i(y) = f \left[ x_1, \dots, \left( x_i + \frac{u(x_i)}{2} \right), \dots, x_m \right] - f \left[ x_1, \dots, \left( x_i - \frac{u(x_i)}{2} \right), \dots, x_m \right] \quad (26)$$

и иллюстрируется рис. 10.

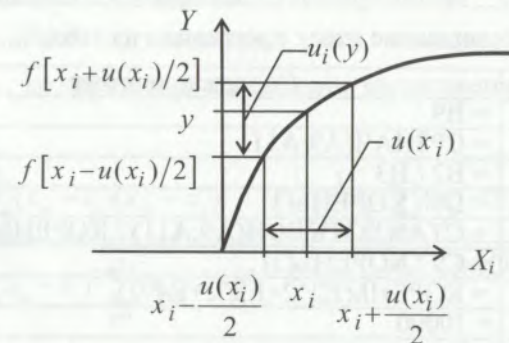


**Рис. 10.** Вычисление вклада неопределенности методом частных приращений

#### ПРИМЕР.

Вклад неопределенности измерения пути в неопределенность измерения скорости, вычисленный по формуле (26) будет равен:

$$u_i(v) = [l + u_B(l)/2]/\bar{t} - [l - u_B(l)/2]/\bar{t} = \\ = (100 + 0,577/2)/9,9 - (100 - 0,577/2)/9,9 = 0,0583.$$

Удобнее всего описывать составление такой программы на конкретном примере. В табл. 7. приведен фрагмент окна в программе «Excel» для бюджета измерения скорости (табл. 4).

#### ПРИМЕР.

Таблица 7. Бюджет неопределенности измерения скорости в программе «Excel»

|    | A                | B              | C                     | D                     | E        |
|----|------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| 1  | $X_i$            | $x_i$          | $u(x_i)$              | $v_i$                 | $u_i(y)$ |
| 2  | $L, \text{ м}$   | 100            | 0,5774                | 10000                 | 0,0583   |
| 3  | $T, \text{ с}$   | 9,9            | 0,0577                | 2                     | -0,0589  |
| 4  |                  |                | 0,0577                | 10000                 | -0,0589  |
| 5  | $Y$              | $y$            | $u(y)$                | $v_{eff}$             | $U(y)$   |
| 6  | $V, \text{ м/с}$ | 10,101         | 0,1017                | 17,8                  | 0,2145   |
| 7  |                  |                |                       |                       |          |
| 8  | $t_i, \text{ с}$ | $l, \text{ м}$ | $\theta_i, \text{ с}$ | $\theta_l, \text{ м}$ |          |
| 9  | 10,1             | 100            | 0,1                   | 1,0                   |          |
| 10 | 9,9              |                |                       |                       |          |
| 11 | 10,0             |                |                       |                       |          |

Содержание ячеек программы из табл. 7.

| Ячейки | Содержание ячеек                         |
|--------|------------------------------------------|
| B2     | = B9                                     |
| B3     | = СРЗНАЧ(A9:A11)                         |
| B6     | = B2 / B3                                |
| C2     | = D9 / КОРЕНЬ(3)                         |
| C3     | = СТАНДОТКЛОН(A9:A11) / КОРЕНЬ(3)        |
| C4     | = C9 / КОРЕНЬ(3)                         |
| C6     | = КОРЕНЬ(E2^2+E3^2+E4^2)                 |
| D2     | = 10000                                  |
| D3     | = 2                                      |
| D4     | = 10000                                  |
| D6     | = C6^4 / (E2^4 / D2+E3^4 / D3+E4^4 / D4) |
| E2     | = (B2+C2 / 2)/B3-(B2-C2 / 2) / B3        |
| E3     | = B2 / (B3+C3/2)- B2 / (B3-C3 / 2)       |
| E4     | = B2 / (B3+C4 / 2)- B2 / (B3-C4 / 2)     |
| E6     | = СТЬЮДРАСПОБР(0,05;D6)*C6               |

## 6. Учет корреляции при оценивании неопределенности измерений

Результаты измерения входных величины могут быть попарно коррелированы (статистически зависимы). Корреляция возникает при одновременном наблюдении обеих входных величин в одном измерительном эксперименте (наблюдаемая корреляция). Степень их корреляции выражается с помощью коэффициента корреляции  $r$ , значение которого лежит в пределах от  $-1$  до  $1$ . При  $r=0$  корреляция отсутствует (рис.11).

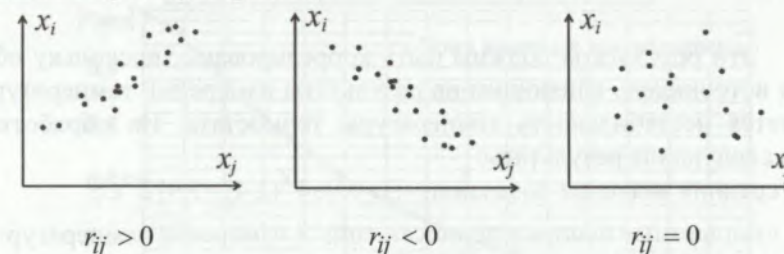


Рис. 11. Изображение на корреляционной плоскости пар одновременно измеренных результатов наблюдений двух величин  $x_i$  и  $x_j$

### 6.1 Вычисление коэффициента корреляции

При наличии согласованных пар измерений  $x_{iq}$  и  $x_{jq}$ ,  $q = 1, 2, \dots, n$ , коэффициент корреляции вычисляется по типу A по формулам:

$$r_{i,j} = \frac{\sum_{q=1}^n (x_{iq} - \bar{x}_i)(x_{jq} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{q=1}^n (x_{iq} - \bar{x}_i)^2 \sum_{q=1}^n (x_{jq} - \bar{x}_j)^2}} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\sum_{q=1}^n (x_{iq} - \bar{x}_i)(x_{jq} - \bar{x}_j)}{u_A(\bar{x}_i)u_A(\bar{x}_j)}. \quad (27)$$

На практике вычисление коэффициента корреляции можно осуществить в программе «Excel», используя функцию КОРРЕЛ (см. Приложение 4).

Коэффициенты корреляции должны даваться с точностью до третьей значащей цифры, если их абсолютные значения близки к единице [3].

### ПРИМЕР.

При калибровке термометра были проведены одновременные пятикратные измерения температуры в термостате эталонным  $t_s$  и калибруемым  $t_c$  термометрами (табл. 8).

Таблица 8. Результаты измерения температуры

| $q$                      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|--------------------------|------|------|------|------|------|
| $t_{cq}, ^\circ\text{C}$ | 9,97 | 9,95 | 9,94 | 9,95 | 9,96 |
| $t_{sq}, ^\circ\text{C}$ | 9,98 | 9,97 | 9,96 | 9,97 | 9,98 |

Эти результаты должны быть коррелированы, поскольку общим источником, влияющим на результаты измерений температур, является нестабильность температуры термостата. Их обработка дала следующие результаты:

- средние значения показаний:  $\bar{t}_c = 9,954 ^\circ\text{C}$ ,  $\bar{t}_s = 9,972 ^\circ\text{C}$ ;
- стандартные неопределенности типа A измерения температур:  $u_A(\bar{t}_c) = 0,0051 ^\circ\text{C}$ ,  $u_A(\bar{t}_s) = 0,00374 ^\circ\text{C}$ ;
- коэффициент корреляции между результатами измерения температур:

$$r_{c,s} = \frac{1}{5 \cdot 4(0,0051 \cdot 0,00374)} [(9,97 - 9,954)(9,98 - 9,972) + (9,95 - 9,954)(9,97 - 9,972) + (9,94 - 9,954)(9,96 - 9,972) + (9,95 - 9,954)(9,97 - 9,972) + (9,96 - 9,954)(9,98 - 9,972)] = 0,94.$$

### 6.2. Проверка значимости коэффициента корреляции, вычисленного по ограниченному количеству наблюдений

При ограниченном числе наблюдений рассчитанное значение коэффициента корреляции может отличаться от нуля даже тогда, когда корреляция должна отсутствовать по общефизическим соображениям. Проверить значимость коэффициента корреляции для его дальнейшего учета (или игнорирования) позволяет применение критерия Стьюдента:

$$\frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \geq t_p(n-2), \quad (28)$$

где  $t_p(n-2)$  – коэффициент Стьюдента для числа степеней свободы  $(n-2)$ . При выполнении неравенства (28) коэффициент корреляции является значимым и должен учитываться при вычислении неопределенности измерений.

Из выражения (28) легко получить зависимость максимального значения коэффициента мнимой корреляции, которая может присутствовать для двух наборов некоррелированных данных с одинаковым числом наблюдений  $n$  (рис. 12).



Рис. 12. Определение наличия (отсутствия) корреляции для вероятности 0,95

### ПРИМЕР.

Оценим значимость коэффициента корреляции при калибровке термометра:

$$\frac{|0,94|}{\sqrt{1-0,94^2}} \sqrt{5-2} = 4,77 > t_{0,95}(3) = 3,18.$$

Т.о., коэффициент корреляции между показаниями двух термометров является значимым и должен учитываться при расчете неопределенности измерений.

Этот же вывод можно сделать, воспользовавшись рис. 12, из которого видно, что для  $n=5$  максимальный коэффициент мнимой корреляции равен 0,88. Поскольку оцененное значение коэффициента корреляции  $0,94 > 0,88$ , можно считать его значимым.

### 6.3. Расчет суммарной стандартной неопределенности для коррелированных данных

Если в модельном уравнении

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$$

присутствуют две входные величины (например,  $X_i, X_j$ ), результаты многократных измерений которых выполнены одновременно и коррелируют между собой с коэффициентом корреляции  $r_{ij}$ , то выражение для суммарной стандартной неопределенности будет иметь следующий вид:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m c_k^2 u^2(x_k) + 2r_{ij} c_i c_j u(x_i) u(x_j)} = \sqrt{\sum_{k=1}^m u_k^2(y) + 2r_{ij} u_i(y) u_j(y)}. \quad (29)$$

#### ПРИМЕР.

В процессе калибровки термометра оценивают разницу  $\Delta$  между результатом измерения  $T_c$  калибруемого термометра и значением эталонного термометра  $T_s$ , определяя систематическую погрешность калибруемого прибора, в точке калибровки:

$$\Delta = (T_c + \Delta_c) - (T_s + \Delta_s) + \Delta_T, \quad (30)$$

где  $\Delta_s$  – поправка на калибровку эталонного термометра;  $\Delta_c$  – поправка на погрешность отсчета показаний калибруемого термометра;  $\Delta_T$  – поправка на неравномерность распределения температуры в термостате.

Поскольку математические ожидания  $\Delta_s, \Delta_c$  и  $\Delta_T$  равны нулю, то измеренное значение  $\Delta$  будет равно:

$$\Delta = \bar{t}_c - \bar{t}_s = 9,954 - 9,972 = -0,018^\circ\text{C}.$$

Дискретность отсчета по шкале калибруемого термометра составляет  $q = 0,01^\circ\text{C}$ , поэтому, в предположении равномерного распределения внутри границ, стандартная неопределенность отсчета калибруемого термометра будет определяться по формуле (10):

$$u(\Delta_c) = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{0,01}{2\sqrt{3}} = 0,0029^\circ\text{C}.$$

Стандартная неопределенность эталонного термометра будет вычисляться через расширенную неопределенность  $U_s = 0,005^\circ\text{C}$ , взятую из сертификата о калибровке, по формуле (16):

$$u(\Delta_s) = \frac{0,005}{2} = 0,0025^\circ\text{C}.$$

Стандартная неопределенность неравномерности температуры термостата определяется через границы неравномерности температуры  $\theta_T = 0,004^\circ\text{C}$ , взятой из нормативной документации на термостат, по формуле (11):

$$u(\Delta_T) = \frac{\theta_T}{\sqrt{3}} = \frac{0,004}{\sqrt{3}} = 0,0023^\circ\text{C}.$$

Суммарная стандартная неопределенность будет равна:

$$\begin{aligned} u(\Delta) &= \sqrt{u_A^2(\bar{t}_c) + u^2(\Delta_c) + u_A^2(\bar{t}_s) + u^2(\Delta_s) + u^2(\Delta_T) - 2r_{c,s} u_A(\bar{t}_c) u_A(\bar{t}_s)} = \\ &= (0,0051^2 + 0,0029^2 + 0,00374^2 + 0,0025^2 + 0,0023^2 - \\ &\quad - 2 \cdot 0,94 \cdot 0,0051 \cdot 0,00374)^{0,5} = 0,0049^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Игнорирование корреляции в этом случае привело бы к увеличению значения суммарной стандартной неопределенности:

$$\begin{aligned} u(\Delta) &= \sqrt{u_A^2(\bar{t}_c) + u^2(\Delta_c) + u_A^2(\bar{t}_s) + u^2(\Delta_s) + u^2(\Delta_T)} = \\ &= \sqrt{0,0051^2 + 0,0029^2 + 0,00374^2 + 0,0025^2 + 0,0023^2} = 0,0077^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

### 6.4. Расчет расширенной неопределенности для коррелированных данных

При расчете расширенной неопределенности для коррелированных данных используется формула (5):

$$U(\Delta) = k \cdot u_c(y).$$

Поскольку в суммарной стандартной неопределенности имеются вклады неопределенности, рассчитанные по типу A, коэффициент охвата должен определяться по формуле (23):

$$k = t_{0,95}(v_{eff}),$$

в которой эффективное число степеней свободы будет равно (25):

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i, j}}^m \frac{u_k^4(y)}{v_k} + \frac{u_{Aij}^4(y)}{n-1}},$$

где  $v_k$  – число степеней свободы для  $k$ -й входной величины;

$u_{Aij}(y) = \sqrt{u_{iA}^2(y) + u_{jA}^2(y) + 2r_{ij}u_{iA}(y)u_{jA}(y)}$  – суммарная стандартная неопределенность типа  $A$  общего вклада  $i$ -й и  $j$ -й коррелированных входных величин.

#### ПРИМЕР.

При калибровке термометра для имеющихся исходных данных получаем суммарную стандартную неопределенность типа  $A$ :

$u_A(\Delta) = \sqrt{0,0051^2 + 0,00374^2 - 2 \cdot 0,94 \cdot 0,0051 \cdot 0,00374} = 0,002 \text{ } ^\circ\text{C}$ ;  
и эффективное число степеней свободы:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{0,0049^4}{\frac{0,002^4}{5-1}} = 143,$$

для которого

$$k = t_{0,95}(143) = 1,98.$$

Следовательно, расширенная неопределенность измерения будет равна:

$$U(\Delta) = 1,98 \cdot 0,0049 = 0,0097 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Игнорирование корреляции привело бы к следующим оценкам суммарной стандартной неопределенности:

$u_A(\Delta) = \sqrt{0,0051^2 + 0,00374^2} = 0,00632 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  
эффективного числа степеней свободы:

$$\nu_{\text{eff}} = (5-1) \left[ \frac{0,0077}{0,0063} \right]^4 = 8,9,$$

для которого

$$k = t_{0,95}(8,9) = 2,26$$

и расширенной неопределенности:

$$U(\Delta) = 2,26 \cdot 0,0077 = 0,0175 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Таким образом, игнорирование корреляции привело бы к неоправданному увеличению расширенной неопределенности в рассматриваемом случае в 1,8 раза.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подытоживая сказанное в книге, хочется обратить внимание читателей на несколько важных моментов:

- оценивание неопределенности измерений в большинстве практических ситуаций не представляет архисложной задачи, ее многие стадии аналогичны элементам оценивания погрешностей измерений;

- использование частных случаев модельных уравнений (пп. 4.5.1, 4.5.2) позволяет в ряде случаев упростить задачу вычисления суммарной стандартной неопределенности измерений, этому же способствует применение относительных неопределенностей входных величин;

- в большинстве практических случаев достаточно достоверную оценку расширенной неопределенности измерений позволяет получить использование коэффициента охвата, равного 2, однако, в некоторых случаях (при малом числе результатов измерений, при наличии аномальных доминирующих вкладов неопределенности), его следует вычислять более тщательно, используя рекомендации пп. 4.7.1, 4.7.2;

- облегчить и ускорить рутинную работу по оцениванию неопределенности измерений, в том числе и избежать наиболее неприятных моментов по взятию производных при расчете коэффициентов чувствительности, позволяет разработка простого программного средства в среде «Excel» (раздел 5, Приложение 4);

- учет корреляции данных важен для оценивания неопределенности измерений, однако не следует видеть корреляцию там, где ее не должно быть: ненулевое значение коэффициента корреляции не всегда означает ее наличие, для его установления следует пользоваться критерием Стьюдента (п. 6.2);

- упростить оценку стандартной неопределенности типа  $A$  при наличии корреляции позволяет применение метода приведенных, описанного в приложении П6.

- уточнить оценки расширенной неопределенности измерений позволяет применение метода Монте-Карло, описанного в приложении П.7.

В заключении автор желает всем читателям *полной определенности в работе и личной жизни!*

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Коэффициенты Стьюдента для вероятностей 0,95 и заданного числа степеней свободы  $\nu$  [10]

| $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$ | $t_{0,95}$ | $\nu$    | $t_{0,95}$ |
|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|----------|------------|
| 1,0   | 12,7       | 2,0   | 4,30       | 3,0   | 3,18       | 9,0   | 2,26       | 19    | 2,09       | 29       | 2,04       |
| 1,1   | 10,3       | 2,1   | 4,11       | 3,5   | 2,94       | 10    | 2,23       | 20    | 2,09       | 30       | 2,04       |
| 1,2   | 8,65       | 2,2   | 3,95       | 4,0   | 2,78       | 11    | 2,20       | 21    | 2,08       | 35       | 2,03       |
| 1,3   | 7,50       | 2,3   | 3,81       | 4,5   | 2,66       | 12    | 2,18       | 22    | 2,07       | 40       | 2,02       |
| 1,4   | 6,66       | 2,4   | 3,68       | 5,0   | 2,57       | 13    | 2,16       | 23    | 2,07       | 50       | 2,01       |
| 1,5   | 6,02       | 2,5   | 3,56       | 5,5   | 2,50       | 14    | 2,14       | 24    | 2,06       | 60       | 2,00       |
| 1,6   | 5,52       | 2,6   | 3,48       | 6,0   | 2,45       | 15    | 2,13       | 25    | 2,06       | 70       | 1,99       |
| 1,7   | 5,12       | 2,7   | 3,39       | 6,5   | 2,40       | 16    | 2,12       | 26    | 2,06       | 100      | 1,98       |
| 1,8   | 4,80       | 2,8   | 3,32       | 7,0   | 2,37       | 17    | 2,11       | 27    | 2,05       | 200      | 1,97       |
| 1,9   | 4,53       | 2,9   | 3,25       | 8,0   | 2,31       | 18    | 2,10       | 28    | 2,05       | $\infty$ | 1,96       |

### ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Максимальные значения коэффициентов охвата для композиции равномерно ( $u_1, u_2$ ) и нормально ( $u_n$ ) распределенных входных величин

| $u_2(y)$<br>$u_1(y)$ | $u_n(y)/u_1(y)$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                      | 0               | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1    |
| 0                    | 1,65            | 1,65 | 1,69 | 1,73 | 1,77 | 1,81 | 1,84 | 1,87 | 1,89 | 1,91 | 1,92 |
| 0,1                  | 1,65            | 1,68 | 1,7  | 1,74 | 1,78 | 1,82 | 1,85 | 1,87 | 1,89 | 1,91 | 1,92 |
| 0,2                  | 1,70            | 1,73 | 1,75 | 1,78 | 1,81 | 1,84 | 1,86 | 1,88 | 1,9  | 1,91 | 1,92 |
| 0,3                  | 1,75            | 1,8  | 1,81 | 1,82 | 1,84 | 1,86 | 1,88 | 1,89 | 1,91 | 1,92 | 1,93 |
| 0,4                  | 1,80            | 1,85 | 1,85 | 1,86 | 1,87 | 1,88 | 1,89 | 1,91 | 1,92 | 1,92 | 1,93 |
| 0,5                  | 1,83            | 1,88 | 1,89 | 1,89 | 1,9  | 1,9  | 1,91 | 1,92 | 1,92 | 1,93 | 1,94 |
| 0,6                  | 1,86            | 1,91 | 1,91 | 1,91 | 1,91 | 1,92 | 1,92 | 1,93 | 1,93 | 1,93 | 1,94 |
| 0,7                  | 1,88            | 1,92 | 1,92 | 1,92 | 1,92 | 1,93 | 1,93 | 1,93 | 1,94 | 1,94 | 1,94 |
| 0,8                  | 1,89            | 1,93 | 1,93 | 1,93 | 1,93 | 1,93 | 1,93 | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 |
| 0,9-1,0              | 1,90            | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 | 1,94 |

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Таблица производных

| Функция $f(x)$              | Производная $f'(x)$     |
|-----------------------------|-------------------------|
| $C$ (константа)             | 0                       |
| $x$                         | 1                       |
| $x^2$                       | $2x$                    |
| $x^n$                       | $nx^{n-1}$              |
| $\sqrt{x}$                  | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$   |
| $\frac{1}{x}$               | $-\frac{1}{x^2}$        |
| $\sin(x)$                   | $\cos(x)$               |
| $\cos(x)$                   | $-\sin(x)$              |
| $\operatorname{tg}(x)$      | $\frac{1}{\cos^2(x)}$   |
| $\operatorname{ctg}(x)$     | $-\frac{1}{\sin^2(x)}$  |
| $e^x$                       | $e^x$                   |
| $a^x$                       | $a^x \ln a$             |
| $\ln x$                     | $1/x$                   |
| $\log_a x$                  | $\frac{1}{x \ln a}$     |
| Правила дифференцирования   |                         |
| $[Cf(x)]'$                  | $Cf'(x)$                |
| $(u \pm v)'$                | $u' \pm v'$             |
| $(u \cdot v)'$              | $u'v + uv'$             |
| $\left(\frac{u}{v}\right)'$ | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $\{y[u(x)]\}'$              | $y'(u) \cdot u'(x)$     |

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 4.

##### Часто употребляемые функции программы "Excel"

| Наименование функции                    | Обозначение русское           | Обозначение английское |
|-----------------------------------------|-------------------------------|------------------------|
| Арккосинус                              | ACOS                          | ACOS                   |
| Арксинус                                | ASIN                          | ASIN                   |
| Арктангенс                              | ATAN                          | ATAN                   |
| Дисперсия                               | ДИСП                          | VAR                    |
| Количество чисел в списке               | СЧЁТ                          | COUNT                  |
| Корень квадратный                       | КОРЕНЬ                        | SQRT                   |
| Косинус                                 | COS                           | COS                    |
| Коэффициент корреляции                  | КОРРЕЛ                        | CORREL                 |
| Коэффициент Стьюдента                   | СТЮДРАСПОБР<br>СТЮДЕНТ.ОБР.2X | TINV                   |
| Логарифм десятичный                     | LOG10                         | LOG10                  |
| Логарифм натуральный                    | LN                            | LN                     |
| Логарифм по заданному основанию         | LOG                           | LOG                    |
| Максимум                                | МАКС                          | MAX                    |
| Минимум                                 | МИН                           | MIN                    |
| Модуль выражения                        | ABS                           | ABS                    |
| Наибольшее значение из множества данных | НАИБОЛЬШИЙ                    | LARGE                  |
| Определитель матрицы                    | МОПРЕД                        | MDETERM                |
| Округление                              | ОКРУГЛ                        | NROUND                 |
| Пи                                      | ПИ()                          | PI()                   |
| Синус                                   | SIN                           | SIN                    |
| СКО                                     | СТАНДОТКЛОН                   | STDEV                  |
| Среднее арифметическое                  | СРЗНАЧ                        | AVERAGE                |
| Степень числа                           | СТЕПЕНЬ                       | POWER                  |
| Сумма                                   | СУМ                           | SUM                    |
| Сумма квадратов                         | СУМКВ                         | SUMSQ                  |
| Сумма квадратов отклонений от среднего  | КВАДРОТКЛ                     | DEVSQ                  |
| Тангенс                                 | TAN                           | TAN                    |
| Экспонента                              | EXP                           | EXP                    |

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 5.

##### Взаимный пересчет характеристик погрешности и неопределенности измерений

##### П5.1. Пересчет от характеристик погрешности к оценкам неопределенности измерений [11]

Исходными данными для расчета неопределенности являются:

- оценка СКО  $S$  результата измерения<sup>17</sup>;
- оценка НСП в виде границ  $\theta(p)$  для заданной доверительной вероятности  $p$ ;
- число составляющих НСП  $m$ .
- количество результатов наблюдений  $n$ , взятых для вычисления среднего арифметического в качестве оценки результата измерения.

Используя эти исходные данные, получаем:

- оценку стандартной неопределенности по типу  $A$ :  $\hat{u}_A = S$ ;
- оценку стандартной неопределенности по типу  $B$ :

$$\hat{u}_B = \frac{\theta(p)}{K(p)\sqrt{3}},$$

где коэффициент  $K(p) = 1,1$  для  $p = 0,95$ ;  $K(p) = 1,2$  для  $p = 0,99$  и  $m = 2$ ;  $K(p) = 1,3$  для  $p = 0,99$  и  $m = 3$ ;  $K(p) = 1,4$  для  $p = 0,99$  и  $m = 4$ ;  $K(p) = 1,45$  для  $p = 0,99$  и  $m > 4$ .

- оценку суммарной неопределенности:  $\hat{u}_c = \sqrt{\hat{u}_A^2 + \hat{u}_B^2}$ ;
- оценку эффективного числа степеней свободы:

$$\hat{\nu}_{eff} = (n-1) \left[ 1 + \frac{\hat{u}_B^2}{\hat{u}_A^2} \right]^2;$$

- оценку коэффициента охвата  $k$  как коэффициента Стьюдента  $t_{0,95}(\hat{\nu}_{eff})$  для вероятности 0,95 и полученной оценки числа степеней свободы  $\hat{\nu}_{eff}$ ;

<sup>17</sup>В качестве результата измерения принимается среднее арифметическое результатов многократных наблюдений измеряемой величины.

- оценку расширенной неопределенности:  $\hat{U}_p = k\hat{u}_c$ .

### П5.2. Пересчет от неопределенности к характеристикам погрешности измерений [2]

Исходными данными при представлении неопределенности для расчета оценок характеристик погрешности являются:

- расширенная неопределенность  $U$ ;
- коэффициент охвата  $k$ ;
- количество результатов наблюдений  $n$ .

В этом случае можно получить:

- оценку СКО, характеризующего суммарную погрешность:

$$\hat{S}_\Sigma = \frac{U_p}{k} = u_c;$$

- оценку СКО случайной погрешности результата измерений:

$$\hat{S} = u_A = \hat{S}_\Sigma \cdot \sqrt{4(n-1)/v_{eff}}^{18};$$

- оценку СКО, характеризующего НСП:

$$\hat{S}_\theta = u_B = \sqrt{\hat{S}_\Sigma^2 - \hat{S}^2};$$

- оценку доверительных границ НСП:

$$\hat{\theta}(p) = K_p \sqrt{3} \hat{S}_\theta,$$

где коэффициент  $K(p) = 1,1$  для  $p = 0,95$ ;  $K(p) = 1,2$  для  $p = 0,99$  и  $m = 2$ ;  $K(p) = 1,3$  для  $p = 0,99$  и  $m = 3$ ;  $K(p) = 1,4$  для  $p = 0,99$  и  $m = 4$ ;  $K(p) = 1,45$  для  $p = 0,99$  и  $m > 4$ .

- оценку доверительных границ погрешности:

$$\Delta_p = \frac{t_p(n-1)\hat{S} + \hat{\theta}(p)}{\hat{S} + \hat{S}_\theta} \hat{S}_\Sigma,$$

где  $t_p(n-1)$  – коэффициент Стьюдента для заданной вероятности  $p$  и числа степеней свободы  $(n-1)$ .

<sup>18</sup> Значение  $v_{eff}$  находят из таблицы Стьюдента для известного коэффициента охвата  $k = t_{0,95}(v_{eff})$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6.

### Применение метода приведения для оценивания неопределенности типа A коррелированных измерений



Метод приведения (редукции) разработан С.Г. Рабиновичем [12], возглавлявшим в 60-х – 70-х годах прошлого века лабораторию теоретической метрологии ВНИИМ им. Менделеева. Суть метода заключается в приведении косвенных измерений к прямым.

Пусть в модельном уравнении

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (\text{П6.1})$$

присутствуют две входные величины (например,  $X_i, X_j$ ), результаты  $n$ -кратных измерений которых выполнены одновременно и коррелируют между собой со значимым коэффициентом корреляции  $r_{ij}$ . Эти результаты записаны в первые два столбца табл. П6.1. Для всех остальных входных величин  $X_k$  ( $k = 1, \dots, m; k \neq i, j$ ), выполненных с однократными или многократными измерениями, определяют их числовые значения  $x_k$ , которые подставляют в выражение (П6.1). В это же выражение подставляют сначала первую пару выборочных значений  $i$ -й и  $j$ -й входных величин ( $x_{i1}, x_{j1}$ ), получая первое выборочное значение измеряемой величины  $y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_{i1}, x_{j1}, \dots, x_m)$  (табл. П6.1). Аналогично получают остальные выборочные значения  $y_2, \dots, y_n$ .

Таблица П6.1. Схема реализации метода приведений

| $X_i$    | $X_j$    | $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$                          |
|----------|----------|--------------------------------------------------------|
| $x_{i1}$ | $x_{j1}$ | $y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_{i1}, x_{j1}, \dots, x_m)$ |
| $x_{i2}$ | $x_{j2}$ | $y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_{i2}, x_{j2}, \dots, x_m)$ |
| ...      | ...      | ...                                                    |
| $x_{in}$ | $x_{jn}$ | $y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_{in}, x_{jn}, \dots, x_m)$ |

По полученным выборочным значениям  $y_1, \dots, y_n$  вычисляют числовое значение измеряемой величины:

$$y = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n y_i,$$

и ее стандартную неопределенность

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m u_k^2(y) + u_{Aij}^2(y)},$$

где  $u_{Aij}(y)$  – общий вклад в неопределенность измеряемой величины стандартной неопределенности измерений коррелированной пары  $i$  и  $j$  входных величин:

$$u_{Aij}(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{q=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

### ПРИМЕР.

При калибровке термометра были проведены одновременные пятикратные измерения температуры в термостате эталонным  $t_s$  и калибруемым  $t_c$  термометрами (табл.8). Как показано в примерах пп. 6.1, 6.2 эти результаты коррелированы. Поэтому их обработка методом приведения дает выборочные результаты определения систематической погрешности  $\Delta_q$ , полученные в соответствии с выражением  $\Delta_q = t_{cq} - t_{sq}$  и приведенные в нижней строке табл. П6.1.

Таблица П6.1. Результаты измерения температуры

| $q$                        | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $t_{cq}, ^\circ\text{C}$   | 9,97  | 9,95  | 9,94  | 9,95  | 9,96  |
| $t_{sq}, ^\circ\text{C}$   | 9,98  | 9,97  | 9,96  | 9,97  | 9,98  |
| $\Delta_q, ^\circ\text{C}$ | -0,01 | -0,02 | -0,02 | -0,02 | -0,02 |

При этом числовое значение результата измерения и его стандартная неопределенность типа A, соответственно равны:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{5}(-0,01 - 0,02 - 0,02 - 0,02 - 0,02) = -0,018 ^\circ\text{C},$$

$$u_A(\bar{\Delta}) = \left\{ \frac{1}{5 \cdot 4} [(-0,01 + 0,018)^2 + (-0,02 + 0,018)^2 + (-0,02 + 0,018)^2 + (-0,02 + 0,018)^2 + (-0,02 + 0,018)^2] \right\}^{0,5} = 0,002 ^\circ\text{C},$$

что совпадает со значениями, полученными в примерах к пп. 6.3, 64.

Применение метода приведений позволяет не только облегчить задачу оценивания неопределенности коррелированных измерений, но и получать несмещенную оценку измеряемой величины [12].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 7.

### Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности измерений



Метод Монте-Карло (ММК) описан в ГОСТ Р 54500.3.1 – 2011 [28]. В ММК входные величины  $X_1, X_2, \dots, X_m$  представляются как случайные величины с плотностями распределения  $g_1, g_2, \dots, g_m$  (рис. П7.1). Математические ожидания и стандартные отклонения этих распределений вероятности задаются равными оценкам входных величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и их стандартным неопределенностям  $u_1, u_2, \dots, u_m$  соответственно.



Рис. П7.1. Реализация метода Монте-Карло

Реализация ММК заключается в выполнении следующих операций:

- 1) генерация массивов случайных чисел  $x_j$ ,  $j=1, 2, \dots, m$  объема  $M=10^5-10^6$ , подчиняющихся законам распределения входных величин;
- 2) вычисление массива выборочных значений измеряемой величины:

$$f(x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{mq}), \quad q=1, 2, \dots, M;$$

- 3) сортировка массива выборочных значений измеряемой величины по возрастанию  $y_1, y_2, \dots, y_M$ ;

3) вычисление оценок параметров полученного массива  $E(y)$ ,  $u_c(y)$ ,  $U(y)$  по формулам, приведенным на рис. П7.1, где  $y_{M(1+p)/2}$  и  $y_{M(1-p)/2}$ , соответственно  $M(1+p)/2$  и  $M(1-p)/2$  члены упорядоченного массива данных выходной величины для заданного уровня доверия  $p$ . Так, для  $p=0,95$  и  $M=10^5$  расширенная неопределенность оценивается через 97500-й и 2500-й члены упорядоченного ряда.

При моделировании распределения  $n$  повторяющихся наблюдений необходимо воспроизводить распределение Стюдента с числом степеней свобода  $\nu = n - 1$ .

Для получения массива случайных чисел, распределенных по закону Стюдента, необходимо выполнить следующие операции:

1) генерирование выборки из  $n$  случайных чисел  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1n}$ , распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией;

2) вычисление значения среднего арифметического  $\bar{\varepsilon}_1$ , его неопределенности  $u_A(\bar{\varepsilon}_1)$  выборки по известным формулам (6) и (9) и расчет значения первой реализации параметра  $\tau$  по формуле:

$$\tau_1 = \frac{\bar{\varepsilon}_1}{u_A(\bar{\varepsilon}_1)}, \quad (\text{П7.1})$$

статистика которого дописывается несмещенным и немасштабированным распределением Стюдента с числом степеней свободы  $\nu = n - 1$ ;

3) повторение шагов 1) и 2)  $M$  раз для последовательного вычисления  $M$  реализаций параметра  $\tau_1, \dots, \tau_M$ ;

4) вычисление  $M$  значений параметра  $x_j = \bar{x}_j + u(\bar{x}_j) \cdot \tau_j$ , имеющего искомое масштабированное и смещенное распределение Стюдента с числом степеней свободы  $\nu = n - 1$ .

#### ПРИМЕР.

При реализации ММК примера по определению скорости  $V$  транспортного средства, проходящего расстояние  $L$  за время  $T$ , модель вычисления будет иметь вид:

$$\dot{V} = \dot{L} / (\dot{T} + \dot{\Delta}_T), \quad (\text{П7.2})$$

где  $\dot{L}$  – случайная величина, имеющая равномерный закон распределения с границами 99 и 101 м;  $\dot{T}$  – случайная величина,

имеющая равномерный закон распределения с границами  $[-\theta_T; +\theta_T] = [-0,1; 0,1]$  с;  $\dot{\Delta}_T$  – случайная величина, имеющая закон распределения Стюдента с числом степеней свободы 2, математическим ожиданием  $\bar{T} = 9,9$  с и масштабным коэффициентом  $u_A(\bar{T}) = 0,05773$  с.

Первые две строки реализации этого примера в программе Excel для  $M=10^4$  имеют вид, приведенный в табл. П7.1. Ниже приведено содержание ячеек программы.

**Табл. П7.1.** Реализация примера по определению скорости транспортного средства с помощью ММК в программе Excel

|   | A        | B        | C       | D        | E        | F       | G       | H       | I       | J       |
|---|----------|----------|---------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | -0,30023 | -1,27768 | 0,24426 | -0,99847 | -0,05764 | 99,4134 | 9,97256 | 10,0267 | 3,04015 | 10,1001 |
| 2 | 1,27647  | 1,19835  | 1,73313 | 8,41058  | 0,48554  | 100,492 | 9,87201 | 9,70225 | 6,52946 | 0,28819 |

Содержание ячеек программы из табл. П7.1

| Ячейка | Формула (содержание ячеек)                                                                                                                                                                            |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A1     | (случайные числа, имеющие нормальный закон распределения с нулевым средним значением и единичным стандартным отклонением)                                                                             |
| B1     | (случайные числа, имеющие нормальный закон распределения с нулевым средним значением и единичным стандартным отклонением)                                                                             |
| C1     | (случайные числа, имеющие нормальный закон распределения с нулевым средним значением и единичным стандартным отклонением)                                                                             |
| D1     | =СРЗНАЧ(A1:C1)/(СТАНДОТКЛОН(A1:C1)/КОРЕНЬ(3))<br>(случайное число, вычисленное по формуле (П7.1) и имеющее несмещенный и немасштабированный закон распределения Стюдента с числом степеней свободы 2) |
| E1     | =D1*0,05773<br>(случайное число $\dot{\Delta}_T$ , имеющее распределение Стюдента с масштабным коэффициентом 0,05773)                                                                                 |
| F1     | (случайное число $\dot{L}$ , имеющее равномерный закон распределения с границами 99 и 101 м;)                                                                                                         |
| G1     | (случайное число $\dot{T}$ , имеющее равномерный закон распределения с границами -9,8 и 10,0 с;)                                                                                                      |
| H1     | =F1/(G1+E1)<br>(первая реализация значений скорости по формуле (П7.2))                                                                                                                                |
| I1     | (первая реализация отсортированных значений скорости)                                                                                                                                                 |
| J1     | =СРЗНАЧ(J1:J10000) (числовое значение скорости)                                                                                                                                                       |
| J2     | =(I9750-I250)/2<br>(расширенная неопределенность измерения скорости)                                                                                                                                  |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 8.

### Выбор минимального количества многократных измерений

При заданных значениях требуемой расширенной неопределенности измерения  $U(y)$  и известных значениях суммарной стандартной неопределенности типа B  $u_B(y)$ , а также СКО отдельных результатов повторных измерений  $s(8)$ , можно определить минимально необходимое число многократных измерений  $n$  по номограмме, изображенной на рис. П.8.1. Для этого нужно рассчитать параметры  $\gamma = U(y)/u_B(y)$  и  $\alpha = s/u_B(y)$  и отложить их на соответствующих осях рис. П.8.1. Перпендикуляры, проведенные из этих точек, пересекутся в точке, находящейся между двумя линиями номограммы. Минимальное значение числа повторных наблюдений будет равно значению  $n$ , соответствующему ближайшей линии номограммы, расположенной ниже точки пересечения.

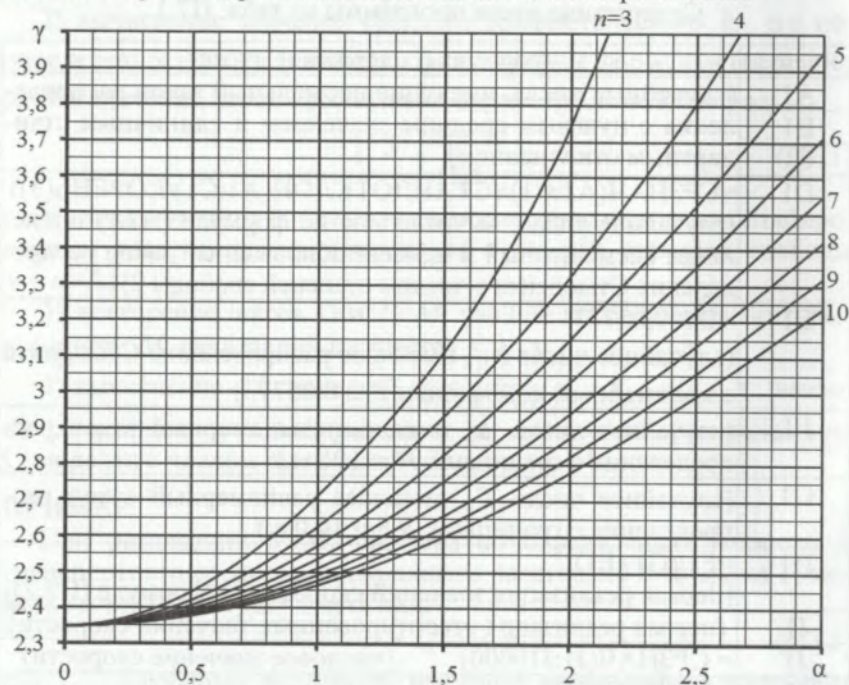
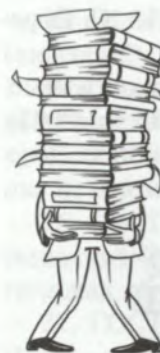


Рис. П.8.1. Зависимость параметра  $\gamma$  от  $\alpha$  и  $n$



### Литература основная

1. ISO/IEC 17025:2005. General requirements for the competence of testing and calibration laboratories.
2. Захаров И.П., Кукуш В.Д. Теория неопределенности в измерениях. – Харьков: Консум, 2002, 256 с.
3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.
4. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 120 с.
5. EURACHEM/CITAC Guide CG 4. Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement. Third Edition. QUAM:2012.
6. BS EN ISO 14253-3:2011. Geometrical product specifications (GPS). Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment. Guidance for the estimation of uncertainty in GPS measurement, in calibration of measuring equipment and in product verification.
7. ГОСТ 8.401-80. Государственная система обеспечения единства измерений. Классы точности средств измерений. Общие требования. – М.: Государственный комитет СССР по стандартам, 1980. – 12 с.
8. Захаров И.П. Расчет коэффициента охвата для нормально и равномерно распределенных составляющих неопределенности // Системи обробки інформації, 2005, вип. 6, стор. 52-57.
9. ISO 80000-1:2009. Quantities and units — Part 1: General.
10. Захаров И.П. и др. Некоторые случаи оценивания неопределенности измерений // Измерительная техника, 2013. – № 6. – С. 12 – 15.
11. РМГ 43:2001. Применение «Руководства по оцениванию неопределенности измерений».
12. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Л.: Энергия, 1978. – 262 с.

### Литература дополнительная

13. Оценка неопределенности в измерениях: Практическое пособие/Н. Ю. Ефремова. – Минск.: БелГИМ, 2003. – 50 с.
14. Примеры оценивания неопределенностей из различных об-

ластей измерений и испытаний: Практическое пособие/Н. Ю. Ефремова, С.А. Качур. Мн.: БелГИМ, 2006. – 60 с.

15. Альтернативные подходы к оценке неопределенности измерения (на основании технического отчета EUROLAB, №1/2007): Методическое пособие/С. А. Качур; под общ. ред. д-ра техн. наук Н. А. Жагоры. – Минск: БелГИМ, 2011 – 66 с.

## **НОРМАТИВНЫЕ ДОКУМЕНТЫ ПО НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ**

### **ГОСТ, ГОСТ Р**

16. ГОСТ Р ИСО 13752-2005. Качество воздуха. Оценка неопределенности метода измерений в условиях применения с использованием референтного метода.

17. ГОСТ 8.586.5-2005. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерение расхода и количества жидкостей и газов с помощью стандартных сужающих устройств. Часть 5. Методика выполнения измерений.

18. ГОСТ Р ИСО 11222-2006. Качество воздуха. Оценка неопределенности измерений характеристик качества воздуха, полученных усреднением по времени.

19. ГОСТ Р 51318.16.4.2-2006. Совместимость технических средств электромагнитная. Неопределенность измерений в области электромагнитной совместимости (отменен).

20. ГОСТ Р 54502-2011/ISO/TS 19036:2006. Микробиология пищевых продуктов и кормов для животных. Руководство по оценке неопределенности измерений при количественных определениях.

21. ГОСТ Р ИСО 14956:2007. Качество воздуха. Оценка применимости методики выполнения измерений на основе степени ее соответствия требованиям к неопределенности измерения.

22. ГОСТ 31371—2008 (часть 1-7). Газ природный. Определение состава методом газовой хроматографии с оценкой неопределенности.

23. ГОСТ 8.381 – 2009. ГСИ. Эталоны. Способы выражения точности. М.: Стандартинформ, 2011.

24. ГОСТ OIML R 111-1-2009. Государственная система обеспе-

чения единства измерений. Гири классов точности Е (индекса 1), Е (индекса 2), F (индекса 1), F (индекса 2), М (индекса 1), М (индекса 1-2), М (индекса 2), М (индекса 2-3) и М (индекса 3). Часть 1. Метрологические и технические требования. – 102 с.

25. ГОСТ 8.461-2009 ГСИ. Термопреобразователи сопротивления из платины, меди и никеля. Методика поверки.

26. ГОСТ Р 8.694-2010 ГСИ. Стандартные образцы материалов (веществ). Общие статистические принципы определения метрологических характеристик.

27. ГОСТ Р 54500.1 – 2011. Руководство ИСО/МЭК 98-1:2009. Неопределенность измерения. Часть 1. Введения в руководства по неопределенности измерений.

28. ГОСТ Р 54500.3 – 2011. Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерений.

29. ГОСТ Р 54500.3.1 – 2011. Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008/Дополнение 1:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерений. Дополнение 1. Трансформирование распределений с использованием метода Монте-Карло.

30. ГОСТ Р ИСО 21748-2012 — Статистические методы. Руководство по использованию оценок повторяемости, воспроизводимости и правильности при оценке неопределенности измерений.

31. ГОСТ Р МЭК 61189-1-2012. Методы испытаний электрических материалов, структуры межсоединений и сборочных узлов. Часть 1. Общие методы испытаний и методология.

32. ГОСТ 30805.16.4.2-2013. Совместимость технических средств электромагнитная. Неопределенность измерений в области электромагнитной совместимости (действует до 01.01.2015).

33. ГОСТ CISPR 16-4-2-2013. Совместимость технических средств электромагнитная. Требования к аппаратуре для измерения параметров промышленных радиопомех и помехоустойчивости и методы измерений. Часть 4-2. Неопределенности, статистика и моделирование норм. Неопределенность измерений, вызываемая измерительной аппаратурой (будет действовать с 01.01.2015).

34. ГОСТ Р 54500.3.2 – 2013. Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008/Дополнение 2:2011. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерений. Дополнение

2. Обобщение на случай произвольного числа выходных величин.

35. ГОСТ ИСО/ИЕС 17043. Оценка соответствия. Основные требования к проверке квалификации.

36. ГОСТ Р 8.878-2014. Государственная система обеспечения единства измерений. Учет и контроль ядерных материалов. Система измерений. Оценивание неопределенности пробоотбора.

37. ГОСТ OIML R 111-2-2014. Государственная система обеспечения единства измерений. Гири классов E1, E2, F1, F2, M1, M1-2, M2, M2-3 и M3. Часть 2. Формы протоколов испытаний. – 49 с.

#### Переводы международных и европейских документов

38. Руководство по выражению неопределенности измерений. Пер. с англ. – С.-Петербург: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999 – 126 с.

39. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК. Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях. Второе издание. Перевод с англ. С.-Петербург.: ВНИИМ им. Д.И.Менделеева, 2002 – 149 с.

40. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК. Руководство по качеству в аналитической химии. Помощь при аккредитации. Перевод с англ. Ассоциации аналитических центров «Аналитика», М.: ААЦ «Аналитика», 2002 – 61 с.

41. ILAC G 17:2002. Представление концепции неопределенности измерения в испытаниях совместно с применением стандарта ИСО/МЭК 17025. Пер. с англ. Ассоциации аналитических центров «Аналитика», М.: ААЦ «Аналитика», 2003 – 6 с.

42. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК. Прослеживаемость в химических измерениях. Руководство по достижению сопоставимых результатов анализа. Перевод с англ. С.-Петербург: ВНИИМ им. Д.И.Менделеева, 2005 – 149 с.

43. Оценивание данных измерений – Роль неопределенности измерения при оценке соответствия. Пер. с англ. документа JCGM 106:2012. С.-Петербург, «Профессионал», 2014 – 82 с.

44. Международный словарь по метрологии. Основные и общие понятия и соответствующие термины. Пер. с англ. ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, БелГИМ. С.-Петербург: НПО «Профессионал», 2010 – 81 с.

45. ЕА-4/02. Выражение неопределенности измерения при калибровках. Пер. с англ. ВНИИМ им. Д.И. Менделеева. С.-Петербург. – 72 с.

46. Внутренний контроль качества (тролльбук) Руководство для аналитических лабораторий/пер. с англ. 4-го изд.; под ред И.В. Болдырева. – СПб.: ЦОП «Профессия», 2015 – 80 с.

47. Руководства ЕВРАХИМ/СИТАК. **Валидация аналитических методик:** пер. с англ. яз. 2-го изд. под ред. Г.Р. Нежиховского. **Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях:** пер. с англ. 3-го издания под ред. Р.Л. Кадиса. СПб.: ЦОП «Профессионал», 2016 – 312 с.

#### Методики институтов

48. МИ 2552-99. Рекомендации ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений». С.-Петербург: ВНИИМ им. Менделеева, 1999, – 26 с. (заменены на РМГ 43-2001).

49. МИ 1317-2004. Рекомендации ГСИ. Результаты и характеристики погрешностей измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров. М.: ВНИИМС, 2004 – 50 с.

50. МИ 3281-2010. Рекомендации ГСИ. Оценка результатов измерений - Пояснения к «Руководству по выражению неопределенности измерений». М.: ВНИИМС, 2010, – 19 с.

#### Рекомендации и правила по межгосударственной стандартизации

51. РМГ 43–2001. Рекомендации ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений». Минск: ИПК Издательство стандартов, 2003, – 19 с. (отменены на территории РФ).

52. РМГ 91–2009. ГСИ. Совместное использование понятий «погрешность измерения» и «неопределенность измерения». М.: Стандартиформ, 2009, – 12 с.

53. РМГ 93–2009. ГСИ. Оценивание метрологических характеристик стандартных образцов. – 32 с.

54. ПМГ 96–2009. ГСИ. Результаты и характеристики качества измерений. Формы представления. Минск: Евразийский совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 2009, – 18 с.

55. РМГ 115-2011. ГСИ. Калибровка средств измерений. Алгоритмы обработки результатов измерений и оценивания неопределенности (введены с 01.01.2015).

56. РМГ 29-2013 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения (взамен РМГ 29-99, ГОСТ 16263-70, МИ 2247-93).

57. РМГ 76-2014 ГСИ. Внутренний контроль качества результатов количественного химического анализа. – 114 с.

### **Рекомендации по метрологии**

58. Р 50.2.028 – 2003. ГСИ. Алгоритмы построения градуировочных характеристик средств измерений состава веществ и материалов и оценивание их погрешностей (неопределенностей). Оценивание погрешности (неопределенности) линейных градуировочных характеристик при использовании метода наименьших квадратов. М.: Госстандарт России, 2003 – 11 с.

59. Р 50.2.038 – 2004. ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результатов измерений. М.: Госстандарт России, 2004 – 7 с.

60. Р 50.1.060-2006. Статистические методы. Руководство по использованию оценок повторяемости, воспроизводимости и правильности при оценке неопределенности измерений (заменен ГОСТ Р ИСО 21748-2012).

61. Р 50.2.058-2007. Рекомендации по метрологии. ГСИ. Оценивание неопределенностей аттестованных значений стандартных образцов. М.: Стандартиформ, 2008, – 31 с.

62. Р 50.1.062-2007. Статистические методы. Неопределенность при повторных измерениях и иерархических экспериментах. М.: Стандартиформ, 2008, – 17 с.

### **Рекомендации KOOMET**

63. COOMET R/GM/14:2006. Руководство по оцениванию данных ключевых сличений KOOMET.

64. COOMET R/GM/19:2008. Руководство по оцениванию данных дополнительных сличений KOOMET.

65. COOMET R/GM/21:2011. Использование понятий “погрешность измерения” и “неопределенность измерения”. Общие принципы.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие                                                                                            | 4  |
| 1 Что такое неопределенность измерений?                                                                | 6  |
| 2 Основные принципы оценивания неопределенности измерений                                              | 7  |
| 3 Оценивание стандартных неопределенностей                                                             | 10 |
| 3.1 Стандартные неопределенности типа <i>A</i>                                                         | 10 |
| 3.2 Стандартные неопределенности типа <i>B</i>                                                         | 13 |
| 3.2.1 Детализация стандартных неопределенностей типа <i>B</i>                                          | 13 |
| 3.2.2 Оценивание стандартных неопределенностей типа <i>B</i>                                           | 15 |
| 4 Базовый алгоритм оценивания неопределенности измерений                                               | 21 |
| 4.1 Составление модельного уравнения                                                                   | 21 |
| 4.2 Оценивание входных величин                                                                         | 21 |
| 4.3 Вычисление оценки результата измерения                                                             | 22 |
| 4.4 Вычисление стандартных неопределенностей входных величин                                           | 22 |
| 4.4.1 Стандартная неопределенность измерения типа <i>A</i>                                             | 22 |
| 4.4.2 Стандартная неопределенность измерения типа <i>B</i>                                             | 22 |
| 4.5 Вычисление вклада неопределенности входной величины в неопределенность измеряемой величины         | 23 |
| 4.5.1 Для модельного уравнения в виде линейной комбинации входных величин                              | 24 |
| 4.5.2 Для модельного уравнения в виде произведения степенных одночленов                                | 24 |
| 4.6 Вычисление стандартной неопределенности выходной величины (суммарной стандартной неопределенности) | 25 |
| 4.6.1 Через вклады неопределенности                                                                    | 25 |
| 4.6.2 Через относительные неопределенности входных величин                                             | 25 |
| 4.7 Вычисление коэффициента охвата                                                                     | 26 |
| 4.7.1 Вычисление коэффициента охвата при наличии существенных вкладов неопределенности типа <i>A</i>   | 26 |
| 4.7.2 Вычисление коэффициента охвата при отсутствии вкладов неопределенности типа <i>A</i>             | 27 |
| 4.8 Вычисление расширенной неопределенности                                                            | 28 |
| 4.9 Запись полного результата измерения                                                                | 29 |
| 4.10 Составление бюджета неопределенности                                                              | 29 |

|     |                                                                                                                                          |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5   | Автоматизация расчетов неопределенности измерений                                                                                        | 31 |
| 6   | Учет корреляции при оценивании неопределенности измерений                                                                                | 33 |
| 6.1 | Вычисление коэффициента корреляции                                                                                                       | 33 |
| 6.2 | Проверка значимости коэффициента корреляции, вычисленного по ограниченному количеству наблюдений                                         | 33 |
| 6.3 | Расчет суммарной стандартной неопределенности для коррелированных данных                                                                 | 36 |
| 6.4 | Расчет расширенной неопределенности для коррелированных данных                                                                           | 37 |
|     | Заключение                                                                                                                               | 39 |
|     | Приложения                                                                                                                               | 40 |
| П1  | Коэффициенты Стьюдента для вероятности 0,95 и заданного числа степеней свободы                                                           | 40 |
| П2  | Максимальные значения коэффициентов охвата для композиции равномерно ( $u_1, u_2$ ) и нормально ( $u_n$ ) распределенных входных величин | 40 |
| П3  | Таблица производных                                                                                                                      | 41 |
| П4  | Часто употребляемые функции программы «Excel»                                                                                            | 42 |
| П5  | Взаимный пересчет характеристик погрешности и неопределенности измерений                                                                 | 43 |
| П6  | Применение метода приведения для оценивания неопределенности типа A коррелированных измерений                                            | 45 |
| П7  | Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности измерений                                                                  | 47 |
| П8  | Выбор минимального количества многократных измерений                                                                                     | 50 |
|     | Литература основная                                                                                                                      | 51 |
|     | Литература дополнительная                                                                                                                | 51 |
|     | Нормативные документы по неопределенности измерений на русском языке                                                                     | 52 |



*Не следует думать, что новые идеи побеждают путем острых дискуссий, в которых создатели нового переубеждают своих оппонентов. Старые идеи уступают новым таким образом, что носители старого умирают, а новое поколение воспитывается в новых идеях, воспринимая их как нечто само собой разумеющееся.*

М. Планк.