

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЛЬЯНОВСКОЕ ВЫСШЕЕ АВИАЦИОННОЕ УЧИЛИЩЕ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (ИНСТИТУТ)**

Н.С. ЗНАЕНКО

**ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ
В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ**

Учебное пособие



Ульяновск 2011

Рецензент: доцент, канд. техн. наук *В. Г. Шубович*.

Знаенко, Н. С. Основы эконометрики в схемах и таблицах : учеб. пособие / Н. С. Знаенко. – Ульяновск : УВАУ ГА(И), 2011. – с.

Представлены в виде схем и таблиц основные понятия курса эконометрики, парная и множественная, линейная и нелинейная регрессии, системы эконометрических уравнений. Подобная форма изложения позволяет студентам определить структуру изучаемой дисциплины, выделить связи между её компонентами, способствует формированию навыков самостоятельной работы с учебным материалом и применения его к решению задач.

Предназначено для курсантов УВАУ ГА специализаций 220501.65.01 – Управление качеством в технике и технологии авиатранспортных систем, 080507.65.40 – Менеджмент на воздушном транспорте.

Печатается по решению Редсовета училища.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Основные понятия.....	4
Корреляционно-регрессионный анализ	8
Парная регрессия и корреляция.....	9
Линейная регрессия.....	10
Условия Гаусса-Маркова.....	20
Нелинейная регрессия.....	22
Множественная регрессия.....	27
Системы эконометрических уравнений.....	34
Математико-статистические таблицы.....	40
Литература	44

ВВЕДЕНИЕ

Эконометрика – быстроразвивающаяся отрасль экономической науки, целью которой является количественное описание экономических отношений. Как самостоятельное научное направление она выделилась в конце 20-х – 30-е гг. XX века. В настоящее время курс эконометрики является одним из базовых в экономическом образовании.

Эконометрика занимается определением наблюдаемых в экономической жизни конкретных количественных закономерностей, используя для этой цели статистические методы. Прикладное значение эконометрики состоит в том, что она является связующим звеном между экономической теорией и практикой.

Цель пособия – дать представление об основных понятиях эконометрики, о методах и приемах, позволяющих получать количественное описание закономерностей экономической теории с использованием математического инструментария. В пособии представлены основные теоретические сведения и расчетные формулы в виде структурно-логических схем, что должно помочь студенту в самостоятельном освоении данной дисциплины. Изучение эконометрики предполагает, что студенты знакомы с матричной алгеброй, теорией вероятностей и математической статистикой, поэтому изложение опирается на те знания, которые были получены при изучении этих дисциплин.

Современный специалист должен хорошо ориентироваться в вопросах количественного описания стохастических процессов, находить закономерности в случайных явлениях, владеть навыками обработки и интерпретации статистических данных, пользоваться статистическими методами исследования. Знание эконометрических методов позволит экономисту быть хорошим аналитиком, осуществлять надежный прогноз, менеджеру принимать правильное решение в условиях неопределенности.

Пособие может быть полезно для студентов, изучающих вопросы практического использования методов эконометрики в различных областях деятельности.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Эконометрика – наука о моделировании экономических явлений, позволяющем объяснять и прогнозировать их развитие, выявлять и измерять определяющие факторы.

<i>Методы</i>	<i>Приложения</i>
корреляционно-регрессионный анализ; анализ временных рядов; системы одновременных уравнений; статистические методы классификации и снижения размерности	макроуровень (модели национальной экономики); мезоуровень (модели региональной экономики, отраслей, секторов); микроуровень (модели поведения потребителя, домашних хозяйств, фирм, предприятий).

Источники базовых компонентов эконометрической науки

Экономическая теория (макро- и микроэкономика, математическая экономика)	Социально-экономическая статистика (включая информационное обеспечение экономических исследований)	Основы теории вероятностей и математической статистики
--	--	--

Цель эконометрики – количественно охарактеризовать общие (качественные) экономические закономерности.

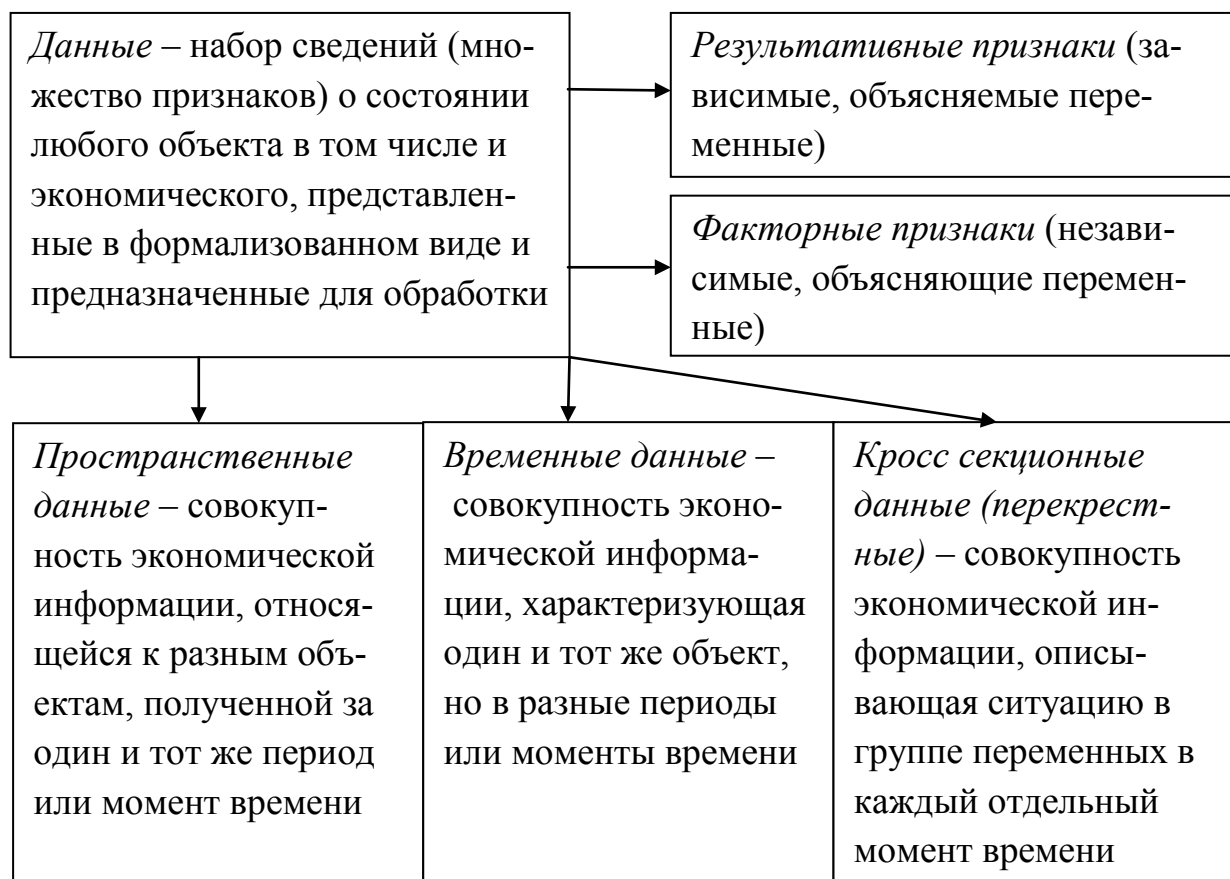
Предмет эконометрики – массовые экономические явления и процессы.

Задачи эконометрики: построение количественно определенных экономико-математических моделей;

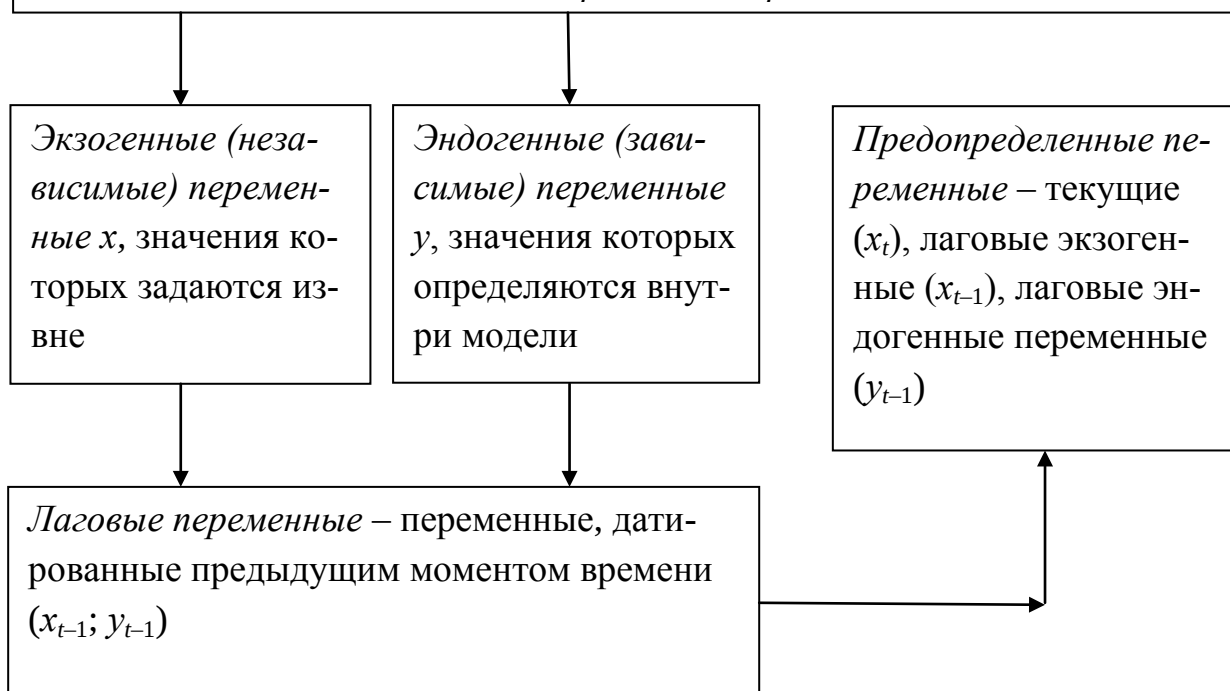
разработка методов оценки их параметров по статистическим данным и анализ их свойств;

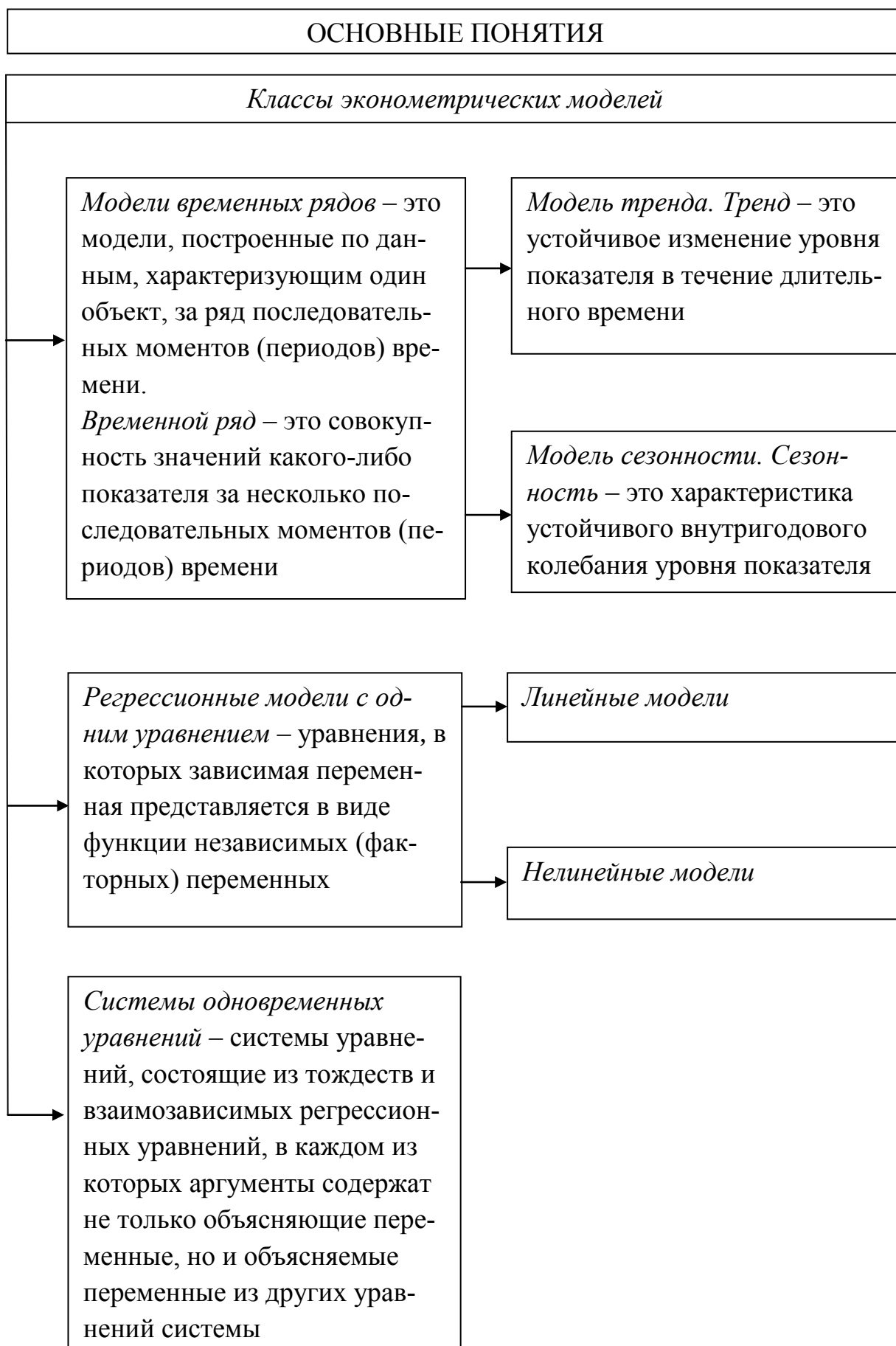
проверка гипотез о свойствах экономических показателей и формах их связи.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ



Виды эконометрических переменных





ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Этапы эконометрического моделирования

1. *Постановочный* – формулируется цель исследования, определяется набор участвующих в модели экономических переменных.
2. *Априорный* – проводится теоретический анализ сущности изучаемого процесса и формализация априорной (известной до начала моделирования) информации.
3. *Информационный* – происходит сбор необходимой статистической базы данных, то есть эмпирических значений экономических переменных, анализ качества собранной информации.
4. *Спецификация модели* – в математической форме выражаются обнаруженные связи и соотношения. Устанавливается состав экзогенных и эндогенных переменных, формируются исходные предпосылки и ограничения модели.
5. *Параметризация* – оцениваются параметры (коэффициенты) выбранной модели (уравнения, выражающего выбранную зависимость).
6. *Идентификация модели* – осуществляется статистический анализ модели, оценка её параметров.
7. *Верификация (оценка качества модели)* – проводится проверка адекватности модели, выясняется, насколько удачно решены проблемы спецификации, идентификации, какова точность расчетов по данной модели, насколько соответствует построенная модель реальному экономическому явлению.

КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Задачи корреляционного анализа

1. Установление факта наличия связи, определение её направления и формы.
2. Измерение степени тесноты связи между признаками

Требования к объекту исследования и признакам-факторам

1. Однородность объектов исследования.
2. Достаточное число наблюдений (число наблюдений должно быть в 7–8 раз больше числа рассчитываемых параметров перед переменной x).
3. Признаки-факторы должны быть независимыми

Виды корреляционной зависимости

1. Парная корреляция – связь между двумя признаками (результативным и факторным или двумя факторными).
2. Частная корреляция – зависимость между результативным и одним факторным признаками при фиксированных значениях других факторных признаков.
3. Множественная корреляция – зависимость между результативным и несколькими факторными признаками

Задачи регрессионного анализа

1. Создать уравнение (регрессионную модель), то есть аналитически выразить выявленную связь.

Замечание. Число факторов должно быть в 5–6 раз меньше объема исследуемой совокупности

Классификация регрессионных моделей

В зависимости от вида функции

Линейная

Нелинейная

В зависимости от количества включенных в модель факторов

Однофакторная (простая парная модель)

Многофакторная (множественная регрессия)

ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Парная регрессия – модель, где среднее значение зависимой переменной y рассматривается как функция одной независимой переменной x

Теоретическое уравнение регрессии: $\hat{y}_x = f(x)$.

Фактическое уравнение регрессии: $y = \hat{y}_x + \varepsilon$,

где y – фактическое значение результативного признака,

$\hat{y}_x$ - теоретическое значение результативного признака,

найденное исходя из уравнения регрессии,

ε – возмущение, случайная величина, характеризующая

отклонение результативного признака от

теоретического, найденного по уравнению регрессии

Проблемы спецификации

1. Выбор структуры уравнения.
2. Определение набора объясняющих переменных

Методы спецификации (выбора вида математической функции $\hat{y}_x$):

- 1) графический (на основе корреляционного поля);
- 2) аналитический (на основе теории изучаемой взаимосвязи);
- 3) экспериментальный

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Уравнение линейной регрессии

$$\hat{y}_x = a + bx \text{ или } y = a + bx + \varepsilon,$$

где a и b - параметры линейной регрессии,

b - коэффициент регрессии (угловой коэффициент регрессии), показывающий среднее изменение результата при изменении фактора на единицу,

a – свободный член, указывающий значение результативного признака при нулевом значении факторного (если x не может иметь нулевого значения, то a не имеет смысла)

Оценка параметров линейной регрессии

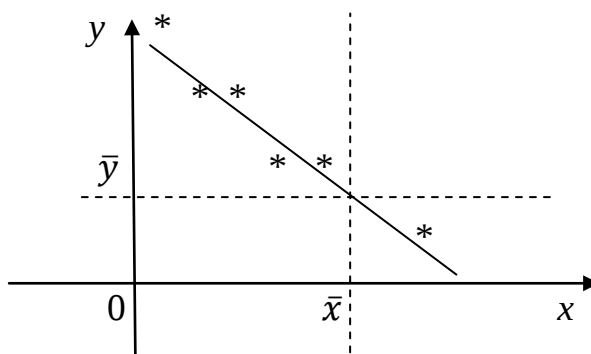
$$b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}, \quad \sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad \sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

n – число наблюдений

Линия регрессии проходит через точку с координатами $(\bar{x}, \bar{y})$



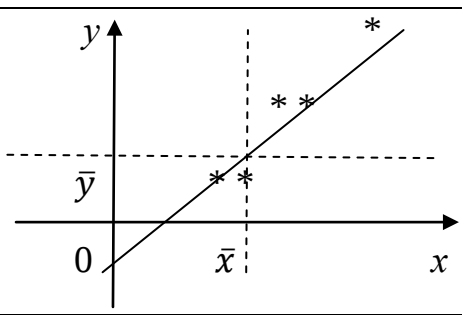
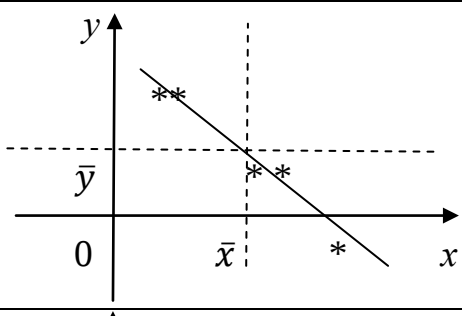
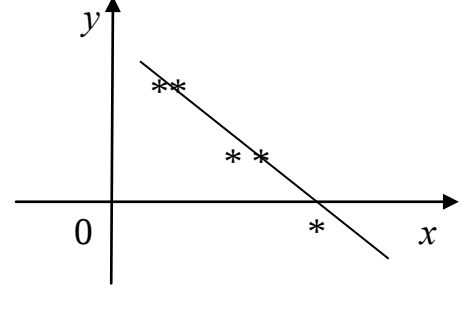
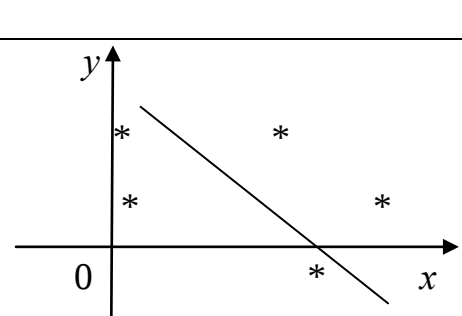
ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Оценка тесноты связи

Коэффициент корреляции

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\bar{y}^2 - \bar{y}^2}}, \quad \text{где } |r_{xy}| \leq 1$$

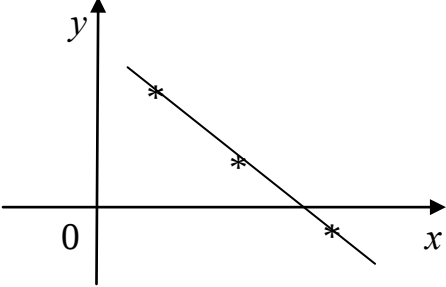
Свойства коэффициента корреляции

Значение коэффициента корреляции	Геометрическая интерпретация
1. При $0 < r_{xy} < 1$ имеет место прямая линейная корреляционная зависимость	
2. При $-1 < r_{xy} < 0$ имеет место обратная линейная корреляционная зависимость	
3. При $ r_{xy} \rightarrow 1$ сила линейной корреляционной зависимости увеличивается, точки корреляционного поля достаточно близко располагаются к линии регрессии	
4. При $ r_{xy} \rightarrow 0$ сила линейной корреляционной зависимости уменьшается, точки корреляционного поля сильно разбросаны относительно линии регрессии	

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Оценка тесноты связи

Свойства коэффициента корреляции

Значение коэффициента корреляции	Геометрическая интерпретация
5. При $ r_{xy} = 1$ имеет место строгая линейная функциональная зависимость между признаками, точки корреляционного поля лежат на линии регрессии	
6. При $r_{xy} = 0$ нет линейной корреляционной зависимости, но может быть другая по форме	

Оценка качества подбора линейной функции

Коэффициент детерминации

Коэффициент детерминации R^2 характеризует долю вариации (разброса) зависимой переменной, объясненную с помощью уравнения регрессии

Для линейной зависимости:
$$R^2 = r_{xy}^2 = \frac{\sigma_{y \text{ объясн}}^2}{\sigma_{y \text{ общ}}^2} = 1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_{y \text{ общ}}^2},$$

где $\sigma_{y \text{ объясн}}^2$ объясненная регрессионным уравнением
$$= \frac{1}{n} \sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2$$

$$\sigma_{y \text{ общая}}^2 = \frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

$$\sigma_{остаточная \text{ необъясненная регрессионным уравнением}}^2 = \frac{1}{n} \sum (y - \hat{y}_x)^2$$

Величина $1 - R^2$ характеризует долю *необъясненной* дисперсии, то есть долю дисперсии y , вызванную влиянием остальных не учтенных в модели факторов

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Свойства коэффициента детерминации

1. $0 \leq R^2 \leq 1$.
2. Чем ближе R^2 к 1, тем лучше линейная модель аппроксимирует эмпирические данные и ею можно воспользоваться для прогнозирования значений результативного признака, тем теснее наблюдаемые точки примыкают к линии регрессии.
3. Если $R^2 = 1$, то признаки подогнаны точно и все точки наблюдения лежат на регрессионной прямой.
4. Если $R^2 = 0$, то регрессия ничего не дает, то есть вариации зависимой переменной полностью обусловлены воздействием не учтенных в модели переменных и линия регрессии параллельна оси Ox .

Замечание. Коэффициент детерминации R^2 имеет смысл рассматривать только при наличии свободного члена в уравнении регрессии.

Оценка качества подбора линейной функции



Средняя ошибка аппроксимации



Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений зависимой переменной от фактических, выраженное в процентах:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \hat{y}_x}{y} \right| \cdot 100\%$$

Допустимый предел значений $\bar{A}$ - не более 8 – 10 % (может быть меньше)

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Показатель силы связи



Коэффициент эластичности



Эластичность – это показатель силы связи, выраженный в процентах.

Он показывает, на сколько процентов изменится результативный признак при изменении факторного на 1%.

Эластичность функции $y = f(x)$ рассчитывается как относительное изменение y к относительному изменению x , то есть

$$\varepsilon = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} f'(x)$$

Средний коэффициент эластичности для линейной связи:

$$\bar{\varepsilon} = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}},$$

где b - коэффициент регрессии.

Замечание. Коэффициент эластичности может быть использован для ранжирования факторных признаков.

Число степеней свободы (degrees of freedom, df) – показатель, который определяется как разность между числом независимых наблюдений и числом связей, ограничивающих их свободу изменения, то есть число уравнений, связывающих эти наблюдения (или иначе число степеней свободы определяют как разность между объемом выборки и числом оцениваемых параметров по данной выборке)

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Оценка качества линейного уравнения регрессии

Схема оценки значимости уравнения регрессии с помощью F-критерия Фишера:

Выдвинуть гипотезу $H_0: b = 0$, то есть связь между признаками случайна (отсутствует).

1. Задать уровень значимости $\alpha = 0,05$.
2. Найти фактическое значение критерия

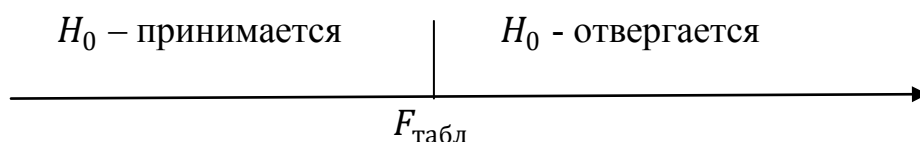
$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} (n - 1).$$

3. Найти табличное значение критерия, воспользовавшись таблицами значений F-критерия Фишера

$$F_{\text{табл}}(\alpha, k_1, k_2),$$

где k_1, k_2 – число степеней свободы $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$,
 n – число измерений, m – число параметров перед x ,
 для линейной модели $k_1 = m = 1$, $k_2 = n - m - 1 = n - 2$.

4. Сделать вывод для правосторонней критической области



Если $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 отвергается, следовательно уравнение регрессии признается статистически значимым.

Если $F_{\text{факт}} < F_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 не отклоняется, в этом случае уравнение регрессии считается статистически незначимым.

Замечание. В парной линейной регрессии оценивается значимость не только уравнения в целом, но и отдельно его параметров. С этой целью по каждому из параметров определяется его стандартная ошибка, проверяется его существенность и рассчитывается доверительный интервал для значений этих параметров

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Оценка значимости коэффициента регрессии, b

1. Определить стандартную ошибку параметра по формуле

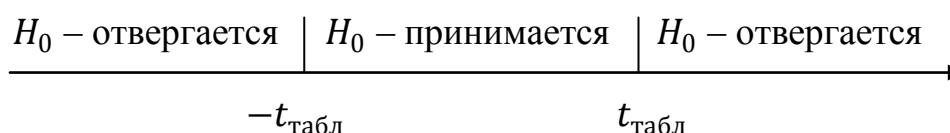
$$m_b = \sqrt{\frac{S_{\text{ост}}^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}}, \text{ где } S_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{n - 2}, \quad \sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

2. Проверить значимость параметра b .

Схема проверки гипотезы о значимости b с помощью t -критерия Стьюдента.

Выдвинуть гипотезу $H_0: b = 0$, то есть имеет место случайная природа связи. $H_1: b \neq 0$.

1. Задать уровень значимости α .
2. Найти $t_{b,\text{факт}} = \frac{b}{m_b}$.
3. Найти по таблицам распределения Стьюдента (для двусторонней критической области) $t_{\text{табл}}(\alpha, df)$, где $df = n - 2$ - число степеней свободы.
4. Сделать вывод для двусторонней критической области



Если $|t_{b,\text{факт}}| > t_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается $H_1: b \neq 0$. Это значит, что b не случайно отличается от нуля, и сформировалось под влиянием систематически действующего фактора.

Если $|t_{b,\text{факт}}| < t_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 не отвергается и признается случайная природа формирования параметра b .

3. Найти доверительный интервал для параметра b

$$[b - \Delta_b; b + \Delta_b], \text{ где } \Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b.$$

Замечание. Если в границы доверительного интервала попадает ноль, то есть нижняя граница отрицательна, а верхняя граница положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительные и отрицательные значения

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Оценка значимости параметра a

1. Определить стандартную ошибку параметра по формуле

$$m_a = \sqrt{\frac{S_{\text{ост}}^2 \cdot \sum x^2}{n \sum (x - \bar{x})^2}} = \frac{S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{\sum x^2}}{\sigma_x \cdot n}, \text{ где } S_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{n - 2}, \sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

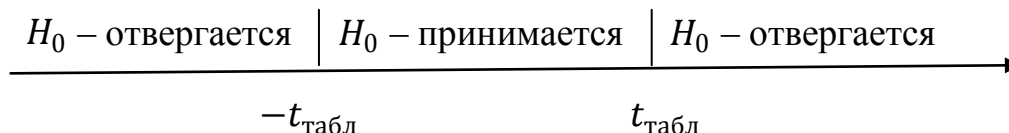
2. Проверить значимость параметра a .

Схема проверки гипотезы о значимости a с помощью t -критерия

Стьюдента.

Выдвинуть гипотезу $H_0: a = 0$, (параметр a незначим). $H_1: a \neq 0$.

1. Задать уровень значимости α .
2. Найти $t_{a,\text{факт}} = \frac{a}{m_a}$.
3. Найти по таблицам распределения Стьюдента (для двусторонней критической области) $t_{\text{табл}}(\alpha, df)$, где $df = n - 2$ - число степеней свободы.
4. Сделать вывод для двусторонней критической области



Если $|t_{a,\text{факт}}| > t_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается $H_1: a \neq 0$. Это значит, что a не случайно отличается от нуля, и сформировалось под влиянием систематически действующего фактора.

Если $|t_{a,\text{факт}}| < t_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 не отвергается и признается случайная природа формирования параметра a .

5. Найти доверительный интервал для параметра a

$[a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, где $\Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a$.

Замечание. Если в границы доверительного интервала попадает ноль, то есть нижняя граница отрицательна, а верхняя граница положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительные и отрицательные значения

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Оценка значимости коэффициента корреляции r_{xy}

1. Определить стандартную ошибку коэффициента r_{xy} по формуле

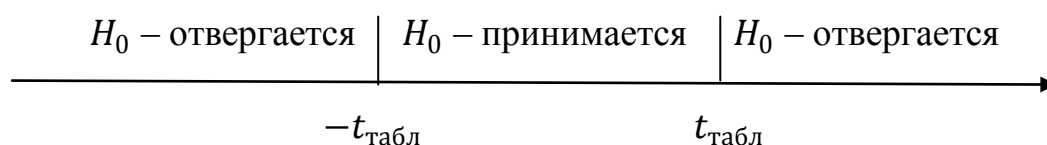
$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}}.$$

2. Проверить значимость коэффициента корреляции.

Схема проверки гипотезы о значимости r_{xy} с помощью t-критерия Стьюдента.

Выдвинуть гипотезу $H_0: r_{xy} = 0$, то есть имеет место случайная природа связи. $H_1: r_{xy} \neq 0$.

1. Задать уровень значимости α .
2. Найти $t_{r_{xy}, \text{факт}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}}$.
3. Найти по таблицам распределения Стьюдента (для двусторонней критической области) $t_{\text{табл}}(\alpha, df)$, где $df = n - 2$ - число степеней свободы.
4. Сделать вывод для двусторонней критической области



Если $|t_{r_{xy}, \text{факт}}| > t_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается $H_1: r_{xy} \neq 0$. Это значит, что r_{xy} не случайно отличается от нуля, и сформировалось под влиянием систематически действующего фактора. В этом случае признается статистическая значимость коэффициента корреляции

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Нахождение прогнозного значения результативного признака

*План нахождения прогнозного значения результативного признака $\hat{y}_p$
по уравнению регрессии при значении признака-фактора,
составляющем $K\%$ от среднего уровня*

1. Задать уровень значимости α .
2. Найти значение признака-фактора, составляющее $K\%$ от среднего уровня по формуле

$$x_p = \frac{K\%}{100\%} \cdot \bar{x}$$

3. Подставить найденное значение $x_p = \frac{K\%}{100\%} \cdot \bar{x}$ в уравнение регрессии $\hat{y}_x = a + bx$ и найти прогнозное значение результативного признака (его точечное значение).
4. Найти доверительный интервал для $\hat{y}_p$ по формуле

$$\hat{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p} \leq \hat{y}_p \leq \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p},$$

где $\Delta_{\hat{y}_p} = m_{\hat{y}_p} \cdot t_{\text{табл}}$,

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{n \cdot \sigma_x^2}} - \text{средняя стандартная ошибка}$$

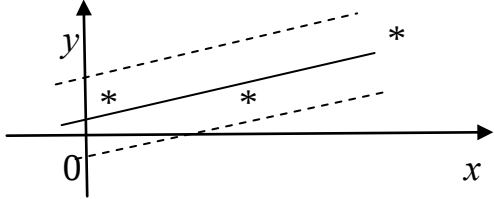
прогноза,

$t_{\text{табл}}(\alpha, df)$, где $df = n - 2$ - число степеней свободы, находится по таблицам распределения Стьюдента.

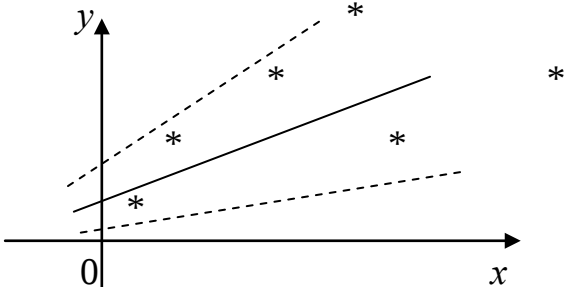
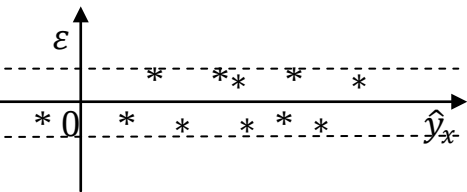
УСЛОВИЯ ГАУССА-МАРКОВА

Условия Гаусса-Маркова – это условия, необходимые для получения несмещенных, состоятельных и эффективных оценок, представляющие собой предпосылки метода наименьших квадратов (МНК), соблюдение которых желательно для получения достоверных результатов регрессии.

Для линейной регрессионной модели вида $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$

<i>Условие Гаусса-Маркова</i>	<i>Комментарии</i>
1. Математическое ожидание случайного члена в любом наблюдении должно быть равно нулю, то есть $M(\varepsilon_i) = 0, i = \overline{1, n}.$	Первое условие означает, что $\sum(y - \hat{y}_x) = 0$, то есть случайный член не должен иметь систематического смещения. Если постоянный член включен в уравнение регрессии, то это условие выполняется автоматически.
2. Дисперсия случайного члена должна быть постоянной для всех наблюдений, то есть $D(\varepsilon_i) = M(\varepsilon_i^2) = C, i = \overline{1, n}.$	Второе условие означает, что дисперсия случайного члена в каждом наблюдении имеет только одно значение. Это условие известно как <i>гомоскедастичность</i>, что означает «одинаковый разброс», это условие независимости дисперсии случайного члена от номера наблюдения, то есть  Зависимость дисперсии случайного члена от номера наблюдения называется <i>гетероскедастичностью</i>, то есть

УСЛОВИЯ ГАУССА-МАРКОВА

Условие Гаусса-Маркова	Комментарии
	
3. Случайные члены должны быть статистически независимы (некоррелированы) между собой, то есть $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j)$	Третье условие указывает на некоррелированность случайных членов для разных наблюдений
4. Объясняющая переменная x_i есть величина неслучайная	Четвертое условие очень жесткое, иногда достаточно ограничиться лишь независимостью распределения случайного члена ε_i от x_i. Для проверки этого предположения строится график зависимости остатков ε_i от теоретических значений результативного признака $\hat{y}_x$. Если на графике получена горизонтальная полоса, то ε_i - случайные величины и теоретические значения $\hat{y}_x$ хорошо аппроксимируют фактические значения y, то есть 

Замечание. При несоблюдении основных предпосылок МНК требуется корректировать модель, изменяя её спецификацию



НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Показатель тесноты связи



Индекс корреляции

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}},$$

где $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2$ - общая дисперсия

результативного признака,

$\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n} \sum (y - \hat{y})^2$ - остаточная дисперсия.

Свойства индекса корреляции:

1. $0 \leq \rho \leq 1$.
2. Чем ближе ρ к 1 тем теснее связь рассматриваемых признаков, тем более надежно уравнение регрессии

Оценка качества нелинейной модели

Индекс детерминации

$$\rho_{xy}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{\text{объясн}}^2}{\sigma_y^2},$$

где $\sigma_{\text{объясн}}^2 = \frac{1}{n} \sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2$ - объясненная дисперсия.

ρ_{xy}^2 характеризует долю дисперсии (разброса) результативного признака y , объясняемую созданным уравнением регрессии в общей дисперсии результативного признака.

Средняя ошибка аппроксимации

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \hat{y}_x}{y} \right| \cdot 100\%.$$

Допустимый предел значений $\bar{A}$ - не более 8 – 10 %

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Средний коэффициент эластичности

$$\bar{\varepsilon} = y'(\bar{x}) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Средний коэффициент эластичности для ряда математических функций

Вид функции, y	Первая производная, y'	Средний коэффициент эластичности, $\bar{\varepsilon}$
$y = a + bx + \varepsilon$	b	$b \cdot \frac{\bar{x}}{a + b\bar{x}}$
$y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$	$b + 2cx$	$\frac{(b + 2c\bar{x})\bar{x}}{a + b\bar{x} + c\bar{x}^2}$
$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$-\frac{b}{x^2}$	$-\frac{b}{a\bar{x} + b}$
$y = ax^b \varepsilon$	abx^{b-1}	b
$y = ab^x \varepsilon$	$a \cdot \ln b \cdot b^x$	$\bar{x} \ln b$
$y = a + b \ln x + \varepsilon$	$\frac{b}{x}$	$\frac{b}{a + b \ln \bar{x}}$
$y = a + b\sqrt{x} + \varepsilon$	$\frac{b}{2\sqrt{x}}$	$\frac{b\sqrt{\bar{x}}}{2(a + b\sqrt{\bar{x}})}$

*Оценка неизвестных параметров некоторых видов нелинейных моделей
регрессии*

Полулогарифмическая модель $\hat{y}_x = a + b \ln x$	Модель с квадратным корнем $\hat{y}_x = a + b\sqrt{x}$
Провести линеаризацию функции с помощью подстановки	
$\ln x = z$	$\sqrt{x} = z$
Формулы для нахождения параметров: $b = \frac{\text{cov}(z, y)}{\sigma_z^2} = \frac{\bar{z}\bar{y} - \bar{z}\bar{y}}{\bar{z}^2 - \bar{z}^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{z}$	

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Оценка неизвестных параметров степенной модели $\hat{y}_x = ax^b$

1. Провести линеаризацию, прологарифмировав уравнение регрессии

$$\ln \hat{y}_x = \ln(a \cdot x^b)$$

$$\ln \hat{y}_x = \ln a + b \ln x \quad (*)$$

2. Обозначить

$$\ln \hat{y}_x = Y, \quad \ln a = A, \quad \ln x = X.$$

Равенство (*) примет вид: $Y = A + bX$. (**)

3. Найти значения A и b по формулам:

$$b = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X^2} = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\overline{X^2} - \bar{X}^2}, \quad A = \bar{Y} - b\bar{X}.$$

4. Сделать обратную замену в уравнении (**)

$$\ln \hat{y}_x = A + b \ln x.$$

5. Потенцировать полученное равенство:

$$\ln \hat{y}_x - b \ln x = A,$$

$$\ln \hat{y}_x - \ln x^b = A,$$

$$\ln \frac{\hat{y}_x}{x^b} = A,$$

$$\frac{\hat{y}_x}{x^b} = e^A,$$

$$\hat{y}_x = e^A \cdot x^b$$

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Схема проверки гипотезы о значимости уравнения регрессии с помощью F-критерия Фишера

H_0 : уравнение регрессии незначимо (все параметры при x равны 0, $b = 0$).

1. Задать уровень значимости $\alpha = 0,05$.
2. Найти фактическое (наблюдаемое) значение F -критерия:

$$F_{\text{факт}} = \frac{\rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m},$$

где ρ_{xy}^2 - индекс детерминации;

n – число наблюдений;

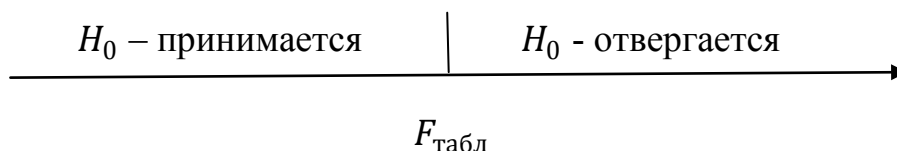
m – число параметров при x (для степенной функции $m = 1$).

3. Найти табличное значение F -критерия, воспользовавшись таблицами значений F -критерия Фишера:

$$F_{\text{табл}}(\alpha, k_1, k_2),$$

где $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$ - число степеней свободы.

4. Сделать вывод для правосторонней критической области



Если $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 отвергается, следовательно уравнение регрессии признается статистически значимым.

Если $F_{\text{факт}} < F_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 не отклоняется, в этом случае уравнение регрессии считается статистически незначимым

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также их совокупное воздействие на моделируемый показатель.

Множественная регрессия определяется уравнением:

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Спецификация модели:

- 1) выбор вида уравнения регрессии;
- 2) отбор факторов.

Линейная модель множественной регрессии

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m + \varepsilon \text{ или}$$

$$\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m,$$

где y - фактическое значение результативного признака;

$\hat{y}$ - теоретическое значение результативного признака;

$x_1, x_2, \dots, x_m$ - факторные признаки;

$b_1, b_2, \dots, b_m$ - коэффициенты «чистой регрессии», они характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизменном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

Требования к факторам, включаемым в уравнение множественной регрессии:

1. Факторы должны быть количественно измеряемы.
2. Каждый фактор должен быть достаточно тесно связан с результатом.

Этапы отбора факторов для включения в модель:

1. Подбираются факторы в зависимости от экономической сущности проблемы.
2. На основе матрицы показателей парной корреляции устанавливается теснота связи для параметров регрессии

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Мультиколлинеарность

Условие коллинеарности двух переменных x_i и x_j : две переменные x_i и x_j коллинеарны, то есть линейно зависимы друг от друга, если $r_{x_i} \cdot r_{x_j} \geq 0,7$.

Мультиколлинеарность – совокупное воздействие факторов друг на друга, когда более чем два фактора связаны между собой линейной зависимостью (другими словами это коррелированность двух или нескольких объясняющих переменных в уравнении регрессии).

При наличии мультиколлинеарности МНК-оценки формально существуют, но обладают рядом недостатков:

- 1) небольшое изменение исходных данных приводит к существенному изменению оценок регрессии;
- 2) оценки имеют большие стандартные ошибки, малую значимость, в то время как модель в целом является значимой (высокое значение R^2).

Замечание. а) Если при оценке уравнения регрессии несколько факторов оказались незначимыми, то нужно выяснить, нет ли среди них сильно коррелированных между собой.

б) При наличии корреляции один из пары связанных между собой факторов исключается либо в качестве объясняющего фактора берется какая-то их функция. Если статистически незначим лишь один фактор, то он должен быть исключен или заменен другим показателем.

Оценка мультиколлинеарности

Для отбора факторов в модель регрессии и оценки мультиколлинеарности нужно вычислить определитель межфакторной корреляции $\det R$. Для модели, включающей три объясняющих переменных

$$\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad \det R = \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

Чем ближе к нулю $\det R$, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии и наоборот, чем ближе $\det R$ к 1 тем меньше мультиколлинеарность факторов

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Формулы для составления линейного уравнения

множественной регрессии вида: $\hat{y}_x = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$

$$b_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} \cdot \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2},$$

$$b_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \cdot \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2},$$

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2,$$

где σ_y , σ_{x_1} , σ_{x_2} - средние квадратические отклонения признаков определяются формулами:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2},$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\overline{x_1^2} - \bar{x}_1^2},$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{\overline{x_2^2} - \bar{x}_2^2};$$

r_{yx_1} , r_{yx_2} , $r_{x_1 x_2}$ - парные коэффициенты корреляции определяются формулами:

$$r_{yx_1} = \frac{cov(y, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{\overline{yx_1} - \bar{y} \cdot \bar{x}_1}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}},$$

$$r_{yx_2} = \frac{cov(y, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{\overline{yx_2} - \bar{y} \cdot \bar{x}_2}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}},$$

$$r_{x_1 x_2} = \frac{cov(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{\overline{x_1 x_2} - \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}$$

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Определение силы воздействия факторов на результат (для двухфакторной модели)

1. Составить стандартизованное уравнение регрессии:

$$t_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \varepsilon, \quad (\hat{t}_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2})$$

где t_y , t_{x_1} , t_{x_2} - стандартизованные переменные:

$$t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}, \quad t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$$

β_1 , β_2 – стандартизованные коэффициенты регрессии:

$$\beta_1 = b_1 \cdot \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2},$$

$$\beta_2 = b_2 \cdot \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2}.$$

2. Сравнить стандартизованные коэффициенты β_1 , β_2 стандартизованного уравнения регрессии. Из модели исключить факторы с наименьшим значением β_i .

Средние частные коэффициенты эластичности

$$\bar{\varepsilon}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}},$$

где $\bar{x}_i$ - среднее значение изучаемого признака.

Частные коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов в среднем изменяется зависимая переменная с изменением на 1% каждого фактора при фиксированном значении других факторов.

Сравнивая средние коэффициенты эластичности можно ранжировать факторы по силе воздействия

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Отбор факторов

Отбор факторов происходит на основе оценки тесноты связи между результатом и соответствующим фактором при элиминировании (устранении влияния) других факторов, включенных в уравнение регрессии. С этой целью вычисляют частные коэффициенты корреляции. Для уравнения $\hat{y}_x = a + b_1x_1 + b_2x_2$ частные коэффициенты корреляции определяются формулами:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}},$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1}r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_1}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}}.$$

Замечание. Знак «·» в выражении частного коэффициента корреляции означает элиминирование той (тех) переменной, которая стоит после знака «·». Сравнивая частные коэффициенты корреляции можно ранжировать факторы по тесноте их связи с результатом.

Оценка тесноты связи между рассматриваемым набором факторов с результативным (исследуемым признаком)

Оценка тесноты связи между рассматриваемым набором факторов с результативным (исследуемым признаком) осуществляется с помощью индекса множественной корреляции

$$R_{yx_1x_2 \dots x_m} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}},$$

где $\sigma_{\text{ост}}^2$ - остаточная дисперсия,

σ_y^2 - общая дисперсия результативного признака

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Индекс множественной корреляции

Свойства индекса множественной корреляции

1. $0 \leq R \leq 1$.
2. При $R \rightarrow 1$ сила связи между результативным признаком со всем набором исследуемых признаков возрастает.
3. При $R \rightarrow 0$ сила связи между результативным признаком со всем набором исследуемых признаков ослабевает.

Замечание. Индекс множественной корреляции для линейной регрессии называется *коэффициентом множественной корреляции* или *совокупным коэффициентом корреляции*. Для двухфакторной линейной модели $\hat{y}_x = a + b_1x_1 + b_2x_2$ формула для R имеет вид:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}},$$

где $\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}$ - определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;

$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}$ - определитель матрицы межфакторной корреляции.

Коэффициент множественной детерминации

R^2 – показывает долю объясненной вариации, включенными в модель факторами

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Схема проверки надежности уравнения множественной регрессии с помощью F-критерия Фишера

Выдвигается гипотеза $H_0: b_1 = b_2 = 0$.

1. Задать уровень значимости $\alpha = 0,05$.
2. Найти наблюдаемое значение F-критерия Фишера по формуле

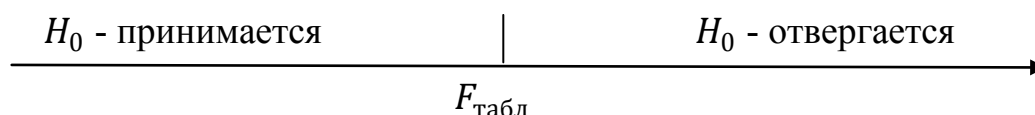
$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m},$$

где R^2 - коэффициент множественной детерминации,

m - число параметров при переменных x (в линейной модели
совпадает с числом факторов),

n - число наблюдений.

3. По таблицам критерия Фишера найти $F_{\text{табличное}}$ ($F_{\text{критическое}}$)
 $F(\alpha, k_1, k_2)$, где $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$ - число степеней свободы.
4. Сделать вывод для правосторонней критической области



При $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$ уравнение регрессии признается статистически значимым;

при $F_{\text{факт}} < F_{\text{табл}}$ уравнение регрессии признается статистически незначимым

Виды эконометрических систем

[illegible][illegible][illegible]

Виды переменных, входящих в системы эконометрических уравнений

- **Эндогенные переменные** – переменные, значения которых определяются внутри модели, зависимые переменные, число которых равно числу уравнений системы.
- **Экзогенные переменные** – переменные, значения которых определяются вне модели. Это заданные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.
- В качестве экзогенных могут рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (*лаговые переменные*)

Приведенная форма модели – система линейных уравнений, в каждом из которых эндогенные переменные выражены через экзогенные переменные и случайные составляющие:

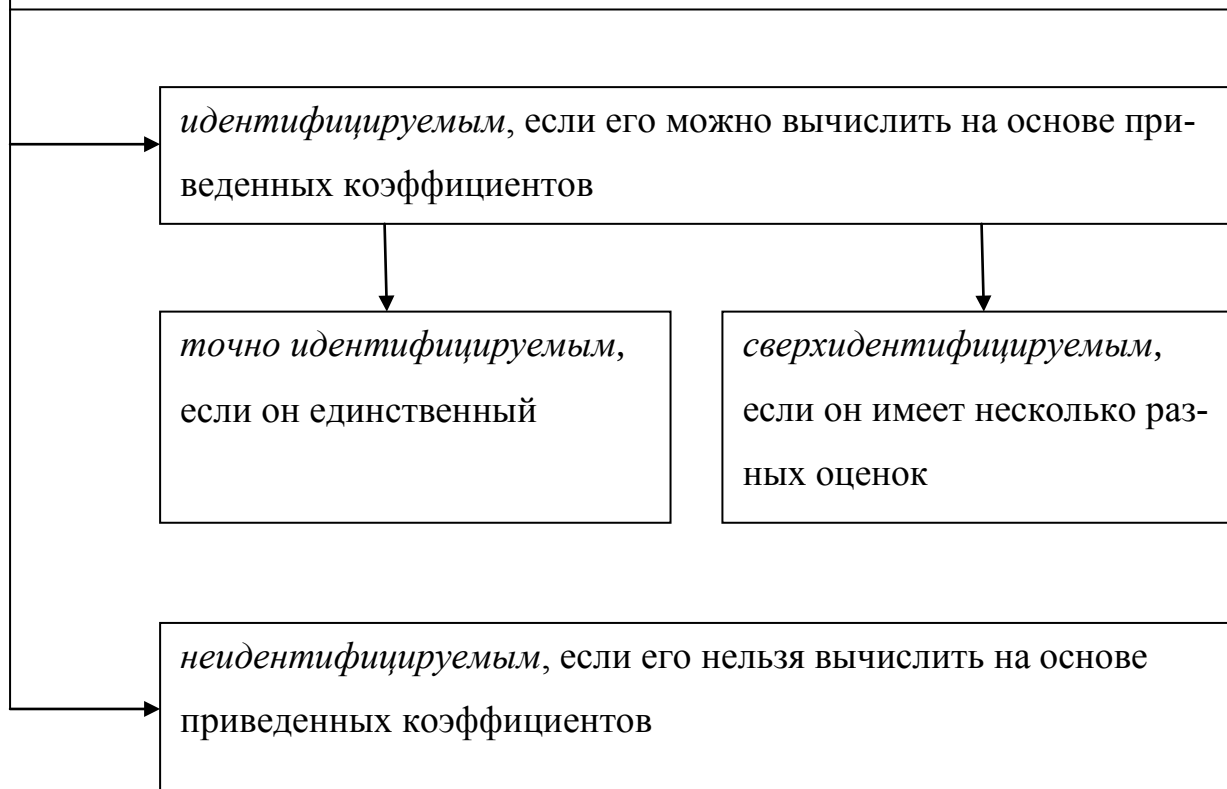
$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m + v_1, \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2m}x_m + v_2, \\ \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nm}x_m + v_n \end{array} \right.$$

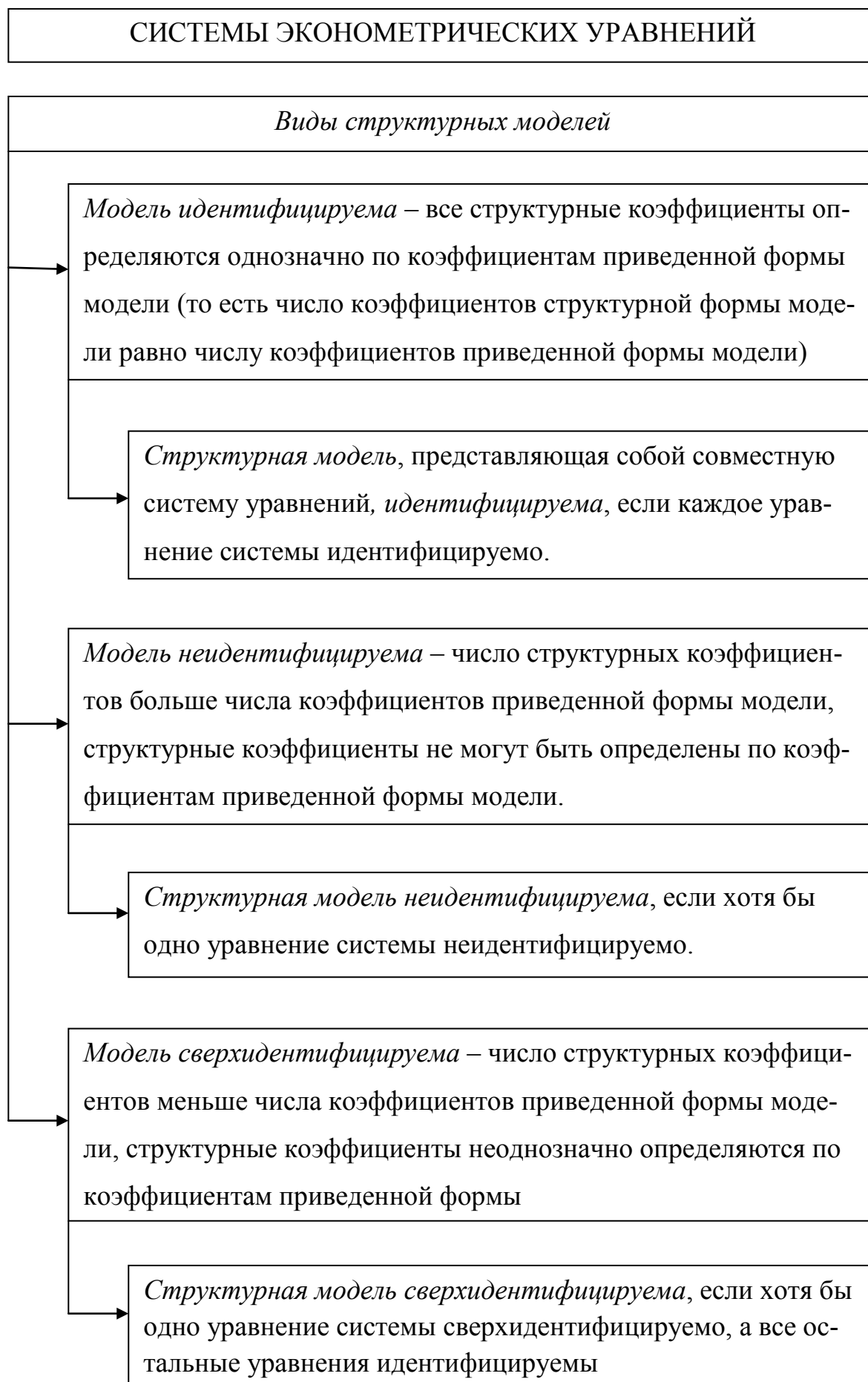
СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для определения структурных коэффициентов структурная форма модели преобразуется в приведенную. При переходе от приведенной формы к структурной возникает проблема идентификации.

Идентификация – это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

Структурный коэффициент называется:





СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Необходимое условие идентифицируемости уравнений системы

H – число эндогенных переменных, входящих в уравнение,

D – число экзогенных переменных системы, не входящих в уравнение

$D + 1 = H$	Уравнение идентифицируемо
$D + 1 < H$	Уравнение неидентифицируемо
$D + 1 > H$	Уравнение свехидентифицируемо

Достаточное условие идентифицируемо уравнений системы

Уравнение идентифицируемо, если из коэффициентов перед переменными (эндогенными и экзогенными), не входящих в данное уравнение, но входящих в другие уравнения системы, можно составить матрицу ($\Delta \neq 0$), rang которой больше или равен числу эндогенных переменных системы без 1.

Схема проверки достаточного условия идентифицируемости

1. Установить число эндогенных и экзогенных переменных.
2. Записать матрицу коэффициентов при переменных модели в виде таблицы 1.

Таблица 1

Переменная № уравнения	y_1	y_2	...	x_1	x_2	...
1 уравнение						
2 уравнение						
...						

3. На основе составленной таблицы для каждого уравнения составить матрицу коэффициентов при переменных, не входящих в это уравнение, но входящих в другие уравнения системы. Найти её ранг и сделать вывод.

СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Достаточное условие идентифицируемо уравнений системы

Замечание.

1. Проверка выполнения достаточного условия должна производиться лишь для уравнений, которые удовлетворяют необходимому условию идентифицируемости.
2. Если в рассматриваемом уравнении отсутствует некоторая эндогенная переменная, то при построении определителя эта переменная, стоящая в левой части другого уравнения, подлежит переносу в правую часть с противоположным знаком.
3. Если система уравнений, идентифицируемая по необходимому условию, содержит хотя бы одно уравнение, для которого достаточное условие идентифицируемости не выполняется, то в целом структурная модель не может считаться точно идентифицируемой.
4. Если в структурной форме модели имеются уравнения, в которых коэффициенты при всех переменных известны, то такие уравнения считаются тождествами и не требуют проверки на идентификацию, но они участвуют в проверке идентификации других уравнений модели

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Приложение 1

Таблица значений F – критерия Фишера
при уровне значимости $\alpha = 0,05$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

Приложение 2**Критические значения t – критерия Стьюдента
при уровне значимости 0,10, 0,05, 0,01 (двухсторонний)**

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	00,10	0,05	0,01		00,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,5041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Приложение 3

**Значения статистик Дарбина-Уотсона $d_L d_U$
при 5-процентном уровне значимости**

n	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,85	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,99
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

ЛИТЕРАТУРА

1. Эконометрика: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002, – 344 с.
2. Практикум по эконометрике: Учебн. пособие / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2003, – 192 с.
3. Шалабанов, А.К., Роганов, Д.А. Эконометрика: Учебно-методическое пособие / А.К. Шалабанов, Д.А. Роганов. – Казань: ТИСБИ, 2002, – 56 с.
4. Кремер, Н.Ш., Путко, Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002, – 311 с.
5. Айвазян, С.А., Мхитарян, В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998, – 1022 с.