

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

“Оренбургский государственный университет”

Л.Н. ТРЕТЬЯК

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования – “Оренбургский государственный университет” в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям: 653800 “Стандартизация, сертификация и метрология”, 651400 “Машиностроительные технологии и оборудование”, 651900 “Автоматизация и управление”, 150200 “Автомобили и автомобильное хозяйство”, 230100 “Сервис, техническая эксплуатация и ремонт автомобилей”, 170500 “Механизмы, аппараты химических производств”, 170600 “Механизмы, аппараты пищевых производств”.

Оренбург, 2004

ББК 30.10я 73
Т 66
УДК 389.1 (075.8)

Рецензенты

кандидат технических наук, доцент В.А. Никитин
кандидат технических наук, доцент А.Г. Реннер

Т 66 **Третьяк Л.Н.**
Обработка результатов наблюдений: Учебное пособие. –
Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. – 171 с.

ISBN.....

Учебное пособие содержит сведения по теории оценивания погрешностей измерений с многократными наблюдениями и практические рекомендации по применению методов обработки результатов измерений. Пособие является развитием работы автора “Обработка прямых измерений с многократными наблюдениями”. Расширено и дополнено сведениями из теоретических основ измерений, методами обработки косвенных измерений, а так же содержит математические методы планирования и анализа измерительного эксперимента. Приведено в соответствие с существующими нормативными документами и методическими рекомендациями. Дополнено справочными данными и вариантами для выполнения курсовой работы, содержит примеры выполнения основных этапов обработки измерений. Проводится описание программ для математической обработки результатов измерений, а также описание стандартных процедур Excel.

Для студентов технических специальностей, изучающих дисциплины “Метрология, стандартизация и сертификация”, “Технические измерения и приборы”, а так же для выполнения курсового проектирования по дисциплинам “Метрология, стандартизация и сертификация”, “Общая теория измерений”. Пособие может быть использовано аспирантами и инженерами при обработке экспериментальных данных.

Т 2004010000

ББК 30.10я 73

ISBN....

© Третьяк Л.Н., 2004
© ГОУ ОГУ, 2004

Введение

Измерения не являются самоцелью, а имеют определенную область использования, т. е. проводятся для достижения некоторого конечного результата в соответствии с поставленной задачей.

В зависимости от назначения измерений (для контроля параметров продукции, для испытаний образцов продукции с целью установления ее технического уровня, для диагностики технического состояния машин и физиологического уровня биологических объектов, для научных исследований, для учета материальных и энергетических ресурсов и др.) конечный результат в том, или ином виде отражает требуемую информацию о количественных свойствах объектов, явлений и процессов (в том числе, технологических). Причем такая информация может быть получена путем измерения, в процессе испытания или контроля.

Основным объектом измерения являются физические величины.

Физическая величина согласно / 9 / это одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

В Международном словаре основных и общих терминов метрологии” (UIM—93) применено понятие величина (измеримая), раскрываемое как “характерный признак (атрибут) явления, тела или вещества, которое может выделяться качественно и определяться количественно”

Высокая точность измерения и достоверность научных результатов имеет большое значение, как в инженерной, так и научной деятельности.

На практике существует несколько способов повышения точности измерений: увеличение точности средств измерения (СИ), совершенствование методов измерений, и если это возможно, увеличение числа повторных измерений.

Многократные измерения одной и той же величины встречаются при аттестации и поверке СИ, измерительных каналов, информационных измерительных систем, при контроле технологических процессов, при испытаниях изделий, при необходимости проведения экспериментального статистического описания переменных величин, а также в научно-исследовательских работах /1/.

Под обработкой результатов наблюдений следует понимать выполненные по определенным правилам, т. е. регламентированные процедуры по получению результата измерений из серии наблюдаемых значений (в случае многократных измерений). В простейшем случае (однократные измерения) результат измерений (испытаний) является собственно наблюдаемым значением. Под наблюдаемым значением следует понимать значение характеристики, полученное в результате единичного наблюдения. Физические величины следует рассматривать как частный случай характеристик, которым присуща количественная индивидуальность

(размер). Значение, которого получают выполнением регламентированного метода и принимают за результат измерений.

Цель учебного пособия - систематизировать сведения из теории погрешности и математической статистики, необходимые для выполнения обработки различных видов измерений.

В пособии представлены необходимые сведения из теории погрешности и структуры формирования погрешности результата измерения. Приведены предельные характеристики правильности и прецизионности результатов измерений, критерии исключения грубых погрешностей, дана оценка погрешности при прямых и косвенных измерениях. Включены необходимые сведения из математической статистики (определение оценок и требований к ним, интервальная оценка и статистические критерии оценки закона распределения результатов измерения, а также результатов активного эксперимента).

Рассмотрены примеры, поясняющие отдельные этапы выполнения математической обработки результатов наблюдений. Даны формы представления результатов измерений, округления результатов вычислений и др. В приложениях представлены массивы исходных данных, статистические таблицы и критериальные характеристики законов распределения.

Изложенные в пособие теоретические положения могут быть использованы как руководство для выполнения курсовой работы на тему “Обработка измерений с многократными наблюдениями”.

Курсовая работа по дисциплинам “Метрология, стандартизация и сертификация”, “Общая теория измерений” представляет собой комплексную работу по обработке результатов равнооточных и неравнооточных многократных наблюдений при прямых и косвенных измерениях некоторой физической величины.

Цель курсовой работы – закрепление знаний по основным разделам курса теоретической метрологии, а также практическое обучение методам анализа и обработки статистических данных.

Курсовая работа позволяет получить навыки выявления погрешностей в результатах наблюдений, статистической обработки результатов наблюдений отдельных групп, определения средневзвешенных статистических характеристик групп неравнооточных наблюдений; представления результатов измерений; оценки формы и вида законов экспериментальных распределений физических величин; записи результатов измерений. Выполнение курсовой работы также позволит овладеть практическими навыками в работе с нормативно-технической литературой и стандартами (паспортами СИ, таблицами характеристик распределения случайных величин, таблицами критериальных значений параметров распределения и др.).

1 Общие сведения из теории погрешности измерений

1.1 Общие теоретические положения

Под измеряемой физической величиной понимают /9/ физическую величину, подлежащую измерению, измеряемую или измеренную в соответствии с основной целью измерительной задачи.

Непосредственной целью измерений является определение истинных значений постоянной или изменяющейся измеряемой величины. Результатом как однократных, так и многократных измерений является реализация случайной величины, равной сумме истинного значения измеряемой величины и погрешности измерений.

Измерение можно считать законченным, если полностью определено не только значение измеряемой величины, но и возможная степень его отклонения от истинного значения.

Под погрешностью результата измерения понимают /9/ отклонение результата измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины. Истинное значение измеряемой величины неизвестно, его используют только в теоретических исследованиях. Это модельное значение, которое характеризует идеальным образом в количественном и качественном отношении свойство объекта(процесса). На практике используют действительное значение величины X_d , под которым понимают значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

Погрешность измерения $\Delta x_{изм}$ определяется по формуле:

$$\Delta x_{изм} = x_{изм} - X_d, \quad (1.1)$$

где $x_{изм}$ – измеренное значение величины.

Синонимом термина погрешность измерения является термин ошибка измерения, применять который РМГ 29-99 /8/ не рекомендует.

В существующей НД /9/ различают понятия результат наблюдения и результат измерения.

Результат измерения физической величины – это значение величины, полученное путём её измерения. Следует отметить, что в современных международных документах /21/ для результата измерения принято обобщающее понятие – “результат измерения (испытания, контроля или анализа)”.

Результат наблюдения (отсчет показаний СИ) – фиксация значения величины или числа по показывающему устройству СИ в заданный момент времени.

Под наблюдением при измерениях понимают операции, проводимые при измерении и имеющие целью своевременно и правильно произвести

отсчет. Результат наблюдений содержит в себе все виды погрешностей, присущие измерительной процедуре. Применять термин “измерение” вместо термина “наблюдение” РМГ 29-99 не рекомендует.

Если прямое измерение проведено один раз (так называемые, однократные прямые измерения), то результатом измерения являются показания СИ, например, измерительного прибора. При этом за погрешность результата измерения часто принимается погрешность СИ, хотя это лишь одна из составляющих погрешностей. Все составляющие погрешности результата измерения представлены в виде схемы на рисунке 1.1. В свою очередь, погрешность СИ – разность между показаниями СИ и истинным значением измеряемой физической величиной, поскольку истинное значение физической величины неизвестно, то на практике используется ее действительное значение. По отдельным источникам погрешность СИ может составлять от 50 до 70 % от погрешности результата измерения. В случае многократных наблюдений результат измерения и его погрешность находятся методом статистической обработки выполненных наблюдений.

В действующих нормативных документах (НД) /12, 18/ за результат измерения принимается среднее арифметическое значение результатов наблюдений (или их другой функционал – в случае, если результаты наблюдений не принадлежат нормальному закону распределения), а погрешность характеризует это среднее (функционал).

Как одна из основных характеристик измерения, погрешность должна быть обязательно оценена. Для различных видов измерений проблема оценки погрешности может решаться по-разному. Погрешность результата измерений можно оценить с разной точностью, на основании различной исходной информации.

Различают измерения с точной, приближенной и предварительной оценкой погрешностей.

При измерениях с точной оценкой погрешности учитываются индивидуальные метрологические свойства и характеристики каждого из примененных СИ, анализируется метод измерений с целью учета их влияния на результат измерения.

Если измерения ведутся с приближенной оценкой погрешности, то учитывают лишь нормативные метрологические характеристики СИ и оценивают влияние на их результат только отклонения условий измерения от нормальных.

Измерения с предварительной оценкой погрешности выполняются по типовым методикам, регламентированным НД, в которых указываются методы и условия измерений, типы и погрешности используемых СИ. На основе этих данных заранее оценивается возможная погрешность результата.

Погрешность, как было указано выше, является одной из количественных характеристик точности.

В отечественной метрологии точность (качественная характеристика) и погрешность (количественная характеристика) результатов измерений, как правило, определяются сравнением результата измерений с истинным или

действительным (условно истинным) значением измеряемой физической величины (являющимися фактически эталонными значениями измеряемых величин, выраженных в узаконенных единицах).

Согласно ГОСТ Р ИСО 5725-1-2002 /21/, если отсутствуют необходимые эталоны, обеспечивающие воспроизведение, хранение и передачу соответствующих значений единиц величин, необходимых для оценки погрешности (точности) результатов измерений, и в отечественной, и в международной практике за действительное значение зачастую принимают общее среднее значение (математическое ожидание) установленной (заданной) совокупности результатов измерений (выражаемое в отдельных случаях в условных единицах), так называемое “принятое опорное значение”, т. е. значение, служащее в качестве согласованного для сравнения с измеренным значением. Оно может быть получено как:

а) теоретическое или установленное значение, базирующееся на научных принципах;

б) приписанное или аттестованное значение, базирующееся на экспериментальных работах какой-либо национальной или международной организации;

в) согласованное или аттестованное значение, базирующееся на совместных экспериментальных работах под руководством научной или инженерной группы;

г) математическое ожидание измеряемой характеристики, то есть среднее значение заданной совокупности результатов измерений — лишь в тех случаях, когда получить его перечисленными выше способами невозможно (или они недоступны).

Согласно РМГ 29-99 /9/ истинное значение физической величины - значение, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении соответствующую физическую величину. В этом же НД записано, что действительное значение физической величины - значение величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

Эта ситуация и отражена в термине “принятое опорное значение” в ГОСТ Р ИСО 5725-1-2002 и рекомендуется для использования в отечественной практике.

Тогда под точностью следует понимать степень близости результата измерений к принятому опорному значению.

Термины “правильность” и “прецизионность” в отечественных НД по метрологии до настоящего времени не использовались. При этом “правильность” — степень близости результата измерений к истинному или условно истинному (действительному) значению измеряемой величины или в случае отсутствия эталона измеряемой величины — степень близости среднего значения, полученного на основании большой серии результатов измерений (или результатов испытаний), к принятому опорному значению.

Показателем правильности обычно является значение систематической погрешности, определение которой приводится ниже по тексту (раздел 1.2).

В свою очередь, “прецизионность” — степень близости друг к другу независимых результатов измерений, полученных в конкретных установленных условиях. При этом под “независимыми результатами измерений” понимают результаты, полученные способом, на который не оказывает влияние никакой предшествующий результат, полученный при испытаниях того же самого или подобного объекта. Прецизионность зависит только от случайных факторов и не связана с истинным или условно истинным значением измеряемой величины. Мету прецизионности обычно выражают в терминах неточности, она вычисляется как стандартное (среднеквадратическое) отклонение результатов измерений, выполненных в определенных условиях. Количественные значения мер прецизионности существенно зависят от заданных условий. Экстремальные показатели прецизионности — повторяемость, сходимостъ и воспроизводимостъ регламентируют и в отечественных НД, в том числе в большинстве государственных стандартов на методы контроля (испытаний, измерений, анализа).

То есть термин “точность” выражает суммарное отклонение результата от эталонного (опорного) значения, которое вызвано как случайными, так и систематическими причинами.

Сходимость результатов измерений нормирована и в отечественных НД / 9/ и характеризует близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, выполненных повторно одними и теми же средствами, одним и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью. Сходимость измерений двух групп многократных измерений может характеризоваться размахом, средней квадратической или средней арифметической погрешностью, количественные характеристики которых приведены в 6 разделе.

Под воспроизводимостъю результатов измерений в /9/ следует понимать близость друг другу результатов измерений одной и той же величины, полученных в разных местах, разными методами, разными средствами, разными операторами, в разное время, но приведенных к одним и тем же условиям измерений (температуре, давлению, влажности и др.).

Воспроизводимостъ измерений может так же характеризоваться средними квадратическими погрешностями сравниваемых рядов измерений. Причем, ряд результатов измерений это значение одной и той же величины, последовательно полученные из следующих друг за другом измерений

Следует также отметить, что количественные характеристики воспроизводимости, выражаемые средними квадратическими погрешностями сравниваемых рядов измерений, характеризуют наряду с достоверностью, единство измерений.

Под достоверностью измерений следует понимать степень доверия к получаемому результату измерений. Они, в свою очередь, определяются

принятой доверительной вероятностью и заданными доверительными границами, в пределах которых ожидается получить результат измерения.

Единство измерений является важной составляющей характеристикой качества измерений. Такое состояние измерений характеризуется тем, что их результаты выражены в узаконенных единицах, размеры которых в установленных пределах равны размерам единиц, воспроизводимых первичными эталонами, а погрешности результатов измерений известны и с заданной вероятностью не выходят за установленные пределы.

Более подробно смотри /9, 21/.

1.2 Классификация погрешностей измерений

Прежде чем приводить общую классификацию погрешности следует отметить, что различным по назначению измерительным процедурам свойственны свои составляющие погрешности и причины их возникновения.

Как видно из схемы, показанной на рисунке 1.1, погрешность результата измерения возникает:

- а) при воспроизведении размера единицы физической величины (в силу того, что технически невозможно создание абсолютно точных эталонов);
- б) при передаче размера единицы физической величины (к основным процедурам передачи размера относят поверку, калибровку, аттестацию);
- в) при аттестации (из-за несовершенства аттестационного оборудования, методик выполнения измерений и др.);
- г) при поверке СИ (из-за несовершенства методов поверки и др.);
- д) при градуировке (из-за несовершенства способов нанесения шкал, ошибок при построении градуировочных кривых и т. д.);
- е) при рабочих измерениях (выполняемых рабочими СИ в лабораторных, полевых или других условиях);
- ж) при статистической обработке результатов измерений.

По метрологическому назначению измерения делят на эталонные и рабочие.

Эталонные измерения выполняются с применением эталонов. Они широко применяются в практике поверочных и калибровочных работ, а так же при метрологической аттестации испытательного оборудования и СИ. Они связаны с воспроизведением и передачей размера единицы физической величины.

Эталон - это СИ (или комплекс СИ), предназначенное для воспроизведения и (или) хранения единицы физической величины. и передачи ее размера нижестоящим по поверочной схеме СИ и утвержденное в качестве эталона в установленном порядке.

Конструкция эталона, его свойства и способ воспроизведения единицы определяются природой данной физической величины и уровнем развития измерительной техники в данной области измерений.

Эталон должен обладать, по крайней мере, тремя тесно связанными друг с другом существенными признаками (по М. Ф. Маликову) —

неизменностью, воспроизводимостью и сличаемостью. Эталоны делятся на первичные и вторичные. С помощью вторичных (рабочих разрядных) эталонов разными методами осуществляется поверка (калибровка) различных СИ.

Рабочие измерения имеют место в повседневной измерительной практике определения значения измеряемой физической величины и не связаны с передачей размера ее единицы.

К рабочим относят и технические измерения – измерения параметров технологических процессов, показателей готовой продукции, оборудования и других параметров, несвязанных с передачей размера единицы величины.

1.2.1 Погрешность результата измерения

Составляющие погрешности результата измерения представлены на рисунке 1.1.

По форме количественного выражения погрешности измерения делятся на абсолютные и относительные.

Абсолютной погрешностью (Δ), выражаемой в единицах измеряемой величины, называется отклонение результата измерения (x) от истинного значения ($X_{И}$), или действительного значения ($X_{Д}$). Таким образом, формула (1.1) может быть применима для количественной оценки абсолютной погрешности.

Абсолютная погрешность характеризует величину и знак, полученный погрешности, но не определяет качество самого проведенного измерения.

Понятие погрешности характеризует как бы несовершенство измерения. Характеристикой качества измерения является используемое в метрологии понятие точности измерений, отражающее, как было показано выше, меру близости результатов измерений к истинному значению измеряемой физической величины. Точность и погрешность связаны между собой обратной зависимостью. Иначе говоря, высокой точности измерений соответствует малая погрешность. Поэтому, чтобы иметь возможность сравнить качество измерений, введено понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью (δ) называется отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины. Она вычисляется по формуле:

$$\delta = \frac{\Delta x_{\text{изм}}}{X_{И}(X_{Д})}. \quad (1.2)$$

Мерой точности измерений служит величина, обратная модулю относительной погрешности, т. е. $\frac{1}{|\delta|}$. Погрешность (δ) часто выражают в

процентах:

$$\delta = \frac{\Delta x_{\text{изм}}}{X_{\text{И}}(X_{\text{Д}})} * 100(\%). \quad (1.3)$$

Если измерение выполнено однократно и за абсолютную погрешность результата измерения Δ принята разность между показанием прибора и истинным значением принятой величины $X_{\text{И}}$, то из соотношения (1.3) следует, что значение относительной погрешности уменьшается с ростом величины $X_{\text{И}}$. Поэтому для измерений целесообразно выбирать такой прибор, показания которого были бы в последней части его шкалы (диапазона измерений), а для сравнения различных приборов использовать понятие приведенной погрешности. Таким образом, выражение погрешности в приведенной форме используется для количественной оценки составляющей погрешности измерения, обусловленной



Рисунок 1.1 – Погрешность результата измерения, ее составляющие

инструментальной погрешностью (аппаратурной, приборной) - она будет рассмотрена ниже.

По характеру (закономерности) изменения погрешности измерений подразделяются на систематические и случайные. К числу случайных относят и грубые погрешности.

Систематические погрешности (Δ_C) - составляющие погрешности измерений, остающиеся постоянными или закономерно изменяющиеся при многократных (повторных) измерениях одной и той же величины в одних и тех же условиях. Из всех видов погрешностей, именно систематические, является наиболее опасными и трудно устранимыми. Это объяснимо по ряду причин /17/:

Во-первых, она постоянно искажает действительное значение полученного результата измерения в сторону его увеличения или уменьшения. Причем, заранее направление такого искажения трудно определить.

Во-вторых, величина систематической погрешности не может быть найдена методами математической обработки полученных результатов измерения. Она не может быть уменьшена при многократном измерении одними и теми же измерительными средствами.

В-третьих, она может быть постоянной, может монотонно изменяться, она может изменяться периодически, но по полученным результатам измерения закон ее изменения трудно, а иногда и не возможно определить.

В-четвертых, на результат измерений влияют несколько факторов, каждый из которых вызывает свою систематическую погрешность в зависимости от условий измерения. Причем, каждый новый метод измерения может дать свои, заранее неизвестные систематические погрешности и надо искать приемы и способы исключения влияния этой систематической погрешности в процессе измерения. Утверждение об отсутствии систематической погрешности или, что она пренебрежительно мала – все это надо не просто показать, но и доказать.

Такие погрешности могут быть выявлены только путём детального анализа возможных их источников и уменьшены (применением более точных приборов, калибровкой приборов с помощью рабочих мер и пр.). Однако полностью их устранить нельзя.

Не следует забывать, что обнаруженная систематическая погрешность “опаснее” случайной. Если случайные погрешности характеризуют разброс величины измеряемого параметра относительно его действительного значения, то систематическая погрешность устойчиво искажает непосредственно величину измеряемого параметра, и тем самым “удаляет” его от истинного (или условно - истинного) значения. Иногда для обнаружения систематической погрешности приходится проводить трудоемкие и долговременные (до нескольких месяцев) эксперименты и в результате обнаружится, что систематическая погрешность была пренебрежительно мала. Это очень ценный результат. Он показывает, что

данная методика измерения дает точные результаты за счет исключения систематической погрешности.

Один из способов исключения систематических погрешностей рассмотрен в четвертом разделе данного учебного пособия. Однако в реальных условиях полностью исключить систематическую составляющую погрешности невозможно. Всегда остаются какие-то не исключенные остатки, которые и нужно учитывать, чтобы оценить их границы. Это и будет систематическая погрешность измерения. То есть, в принципе, систематическая погрешность тоже случайна, и указанное деление обусловлено лишь установившимися традициями обработки и представления результатов измерения.

По характеру изменения во времени систематические погрешности подразделяются на постоянные (сохраняющие величину и знак), прогрессирующие (возрастающие или убывающие во времени), периодические, а также изменяющиеся во времени по сложному непериодическому закону. Основные из этих погрешностей – прогрессирующие.

Прогрессирующая (дрейфовая) погрешность – это непредсказуемая погрешность, медленно меняющаяся во времени. Отличительные особенности прогрессирующих погрешностей следующие:

а) их можно скорректировать поправками только в данный момент времени, а далее они вновь непредсказуемо меняются;

б) изменения прогрессирующих погрешностей во времени – нестационарных (характеристики которого изменяются во времени) представляют собой случайный процесс, и поэтому в рамках хорошо разработанной теории стационарных случайных процессов они могут быть описаны лишь с известными оговорками.

По источникам проявления различают следующие систематические погрешности:

- методические, вызванные используемым методом измерения;
- инструментальные, вызванные погрешностью используемого СИ (определяются классом точности СИ);
- погрешности, вызванные неправильной установкой СИ или влиянием неинформативных внешних факторов;
- погрешности, вызванные неправильными действиями оператора (укоренившийся неверный навык проведения измерительной процедуры).

Случайные погрешности (Δ) – составляющие погрешности измерений, изменяющиеся случайным образом при повторных (многократных) измерениях одной и той же величины в одних и тех же условиях. В появлении таких погрешностей нет какой-либо закономерности, они проявляются при повторных измерениях одной и той же величины в виде некоторого разброса получаемых результатов. Практически случайные погрешности неизбежны, неустранимы и всегда имеют место в результате измерения. Описание случайных погрешностей возможно только на основе теории случайных процессов и математической статистики.

В отличие от систематических случайные погрешности нельзя исключить из результатов измерений путём введения поправки, однако их можно существенно уменьшить путем многократного измерения этой величины и последующей статической обработкой полученных результатов.

Грубые погрешности (промахи) – погрешности, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях измерения. Такие погрешности возникают из-за ошибок оператора или неучтенных внешних воздействий. Их выявляют при обработке результатов измерений и исключают из рассмотрения, пользуясь определенными правилами. Следует заметить, что отнесение результатов наблюдения к числу промахов не всегда может быть выполнено однозначно.

Следует учитывать два момента: с одной стороны, ограниченность числа выполненных наблюдений, не позволяющих с высокой степенью достоверности оценить форму и вид (провести идентификацию) закона распределения, а значит выбрать подходящие критерии оценки результата на наличие “промаха”. Второй момент связан с особенностями объекта (или процесса), показатели (параметры) которого образуют случайную совокупность (выборку). Так при медицинских исследованиях, и даже в повседневной медицинской практике отдельные выпадающие результаты могут представлять из себя вариант “биологической нормы”, и поэтому они требуют учета, с одной стороны, и анализа причин, которые приводят к их появлениям - с другой.

Обязательными компонентами любого измерения являются СИ (прибор, измерительная установка, измерительная система), метод измерения и человек, проводящий измерение. Несовершенство каждого из этих компонентов приводит к появлению своей составляющей погрешности результата измерения. В соответствии с этим, по источнику (причинам) возникновения различают инструментальные, методические и личные субъективные) погрешности.

Инструментальные (аппаратурные, приборные) погрешности возникают из-за несовершенства СИ, т. е. от погрешностей СИ. Источниками инструментальных погрешностей могут быть, например, неточная градуировка прибора и смещение нуля, вариация показаний прибора в процессе эксплуатации и т. д.

Точность СИ является характеристикой качества СИ и отражает близость его погрешности к нулю. Считается, что чем меньше погрешность, тем точнее СИ.

Обобщенной характеристикой данного типа СИ является его **класс точности**. Класс точности СИ, как правило, отражающий уровень их точности, выражается пределами допускаемых основной и дополнительных погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность. Говоря о классе точности, следует отметить два момента:

1) Класс точности дает возможность судить о том, в каких пределах находится погрешность СИ одного типа, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполняемых с помощью каждого из этих

средств. Это важно при выборе СИ в зависимости от заданной точности измерений.

2) Класс точности СИ конкретного типа устанавливают в стандартах технических требований (условий) или в других НД.

Возможные составляющие инструментальной погрешности представлены на рисунке 1.2. Уменьшают инструментальные погрешности применением более точного прибора.

Погрешность метода измерений представляет собой составляющую систематической погрешности измерений, обусловленную несовершенством принятого метода измерений.

Погрешность метода измерения обусловлена:

- отличием принятой модели объекта измерения от модели, адекватно описывающей его свойство, которое определяется путём измерения (в этом выражается несовершенство метода измерения);

- влиянием способов применения СИ. Это имеет место, например, при измерении напряжения вольтметром с конечным значением внутреннего сопротивления. В таком случае вольтметр шунтирует участок цепи, на котором измеряется напряжение, и оно оказывается меньше, чем было до присоединения вольтметра;

- влиянием алгоритмов (формул), по которым производят вычисления результатов измерений (например, некорректностью расчетных формул);

- влиянием выбранного СИ на параметры сигналов;

- влиянием других факторов, не связанных со свойствами используемых СИ.

Методические погрешности часто называют теоретическими, потому что они связаны с разного рода отклонениями от идеальной модели измерительного процесса и использования неверных теоретических предпосылок (допущений) при измерениях. Вследствие упрощений, принятых в уравнениях для измерений, нередко возникают существенные погрешности, для компенсации действия которых следует вводить поправки. Поправки по величине равны погрешности и противоположны ей по знаку.

Отдельно среди методических погрешностей выделяют **погрешности при статистической обработке результатов наблюдений**. Кроме погрешностей, связанных с округлением промежуточных и конечных результатов, они содержат погрешности, связанные с заменой точечных (числовых) и вероятностных характеристик измеряемых величин их приближенными (экспериментальными) значениями. Такие погрешности возникают при замене теоретического распределения опытным, что всегда имеет место при ограниченном числе наблюдаемых значений (результатов наблюдения).

Отличительной особенностью методических погрешностей является то, что они не могут быть указаны в документации на используемое СИ, поскольку от него не зависят; их должен определять оператор в каждом конкретном случае. В связи с этим оператор должен чётко различать фактически измеряемую им величину и величину, подлежащую измерению.

Иногда погрешность метода может проявляться как случайная. Если, например, электронный вольтметр обладает недостаточно высоким входным сопротивлением, то его подключение к исследуемой схеме способно изменить в ней распределение токов и напряжений. При этом результат измерения может существенно отличаться от действительного. Методическую погрешность можно уменьшить путём применения более точного метода измерения.

Субъективная погрешность - составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная индивидуальными особенностями оператора.

Субъективные погрешности вызываются ошибками оператора при отсчете показаний СИ. Согласно РМГ 29-99 /9/ погрешность оператора (субъективная погрешность) - погрешность, обусловленная погрешностью отсчета оператором показаний по шкале СИ, диаграммам регистрирующих приборов. Она вызывается состоянием оператора, его положением во времени работы, несовершенством органов чувств, эргономическими свойствами СИ. Так имеют место погрешности от небрежности и невнимания оператора, от параллакса, т. е. от неправильного направления взгляда при отсчете показаний стрелочного прибора и пр.

Подобные погрешности устраняются применением современных цифровых приборов или автоматических методов измерения.

По характеру поведения измеряемой физической величины в процессе измерений различают статические и динамические погрешности.

Статические погрешности возникают при измерении установившегося значения измеряемой величины, т. е. когда эта величина перестает изменяться во времени.

Динамические погрешности имеют место при динамических измерениях, когда измеряемая величина изменяется во времени и требуется установить закон ее изменения, т. е. погрешности, свойственные условиям динамического измерения. Причина появления динамических погрешностей состоит в несоответствии скоростных (временных) характеристик прибора и скорости изменения измеряемой величины.

В зависимости от влияния измеряемой величины на характер накопления в процессе измерения погрешности, она может быть аддитивная или мультипликативная.

Во всех перечисленных случаях на результат измерения оказывают влияние условия измерений, они формируют погрешность от влияющих условий /9/.

Внешняя погрешность - важная составляющая погрешности результата измерения, связанная с отклонением одной или нескольких влияющих величин от нормальных значений или выходом их за пределы нормальной области (например, влияние влажности, температуры, внешних электрических и магнитных полей, нестабильности источников питания, механических воздействий и т. д.). В большинстве случаев внешние погрешности являются систематическими и определяются дополнительными

погрешностями применяемых СИ, в отличие от основной погрешности, полученной в нормальных условиях измерения.

Различают нормальные и рабочие значения влияющей величины. Значение влияющей величины, установленное в качестве номинального принимают в качестве нормального значения влияющей величины. Так при измерении многих величин нормируется нормальное значение температуры 20 °С или 293 К, а в других случаях нормируется 296 К (23 °С). На нормальное значение, к которому приводятся результаты многих измерений, выполненные в разных условиях, обычно рассчитана основная погрешность СИ. Область значений влияющей величины, в пределах которой изменением результата измерений под ее воздействием можно пренебречь в соответствии с установленными нормами точности, принимается как нормальная область значений влияющей величины.

Например, нормальная область значений температуры при поверке нормальных элементов класса точности — 0,005 в термостате не должна изменяться более чем на $\pm 0,05$ °С от установленной температуры 20 °С, т. е. быть в диапазоне от 19,95 до 20,05 °С. Область значений влияющей величины, в пределах которой нормируется дополнительная погрешность или изменение показаний СИ принимается за рабочую область значений влияющей величины.

Изменение показаний СИ во времени, обусловленное изменением влияющих величин или других факторов называется дрейфом показаний СИ. Например, ход хронометра, определяемый как разность поправок к его показаниям, вычисленных в разное время. Обычно ход хронометра определяют за сутки (суточный ход). Если происходит дрейф показаний нуля, то применяют термин “дрейф нуля”.

Таким образом, погрешность от влияющих условия измерения следует рассматривать как составляющую систематической погрешности измерения, являющуюся следствием неучтенного влияния отклонений в одну сторону какого-либо из параметров, характеризующих условия измерений, от установленного значения.

Этот термин применяют в случае неучтенного или недостаточно учтенного действия той или иной влияющей величины. Однако, следует отметить что, погрешность от влияющих условий может проявляться и как случайная, если действующий фактор имеет случайную природу (таким образом проявляет себя температура помещения, в котором выполняются измерения).

1.2.2 Инструментальная погрешность измерения

СИ при выполнении измерительной процедуры оказывает большое влияние на результирующую погрешность, которая, как было показано выше, всегда содержит погрешности случайного и систематического характера.

Инструментальная погрешность (рисунок 1.2), прежде всего, обусловлена несовершенством самого СИ. Поэтому при классификации

составляющих инструментальной погрешности выделяют **погрешность компонентов** (составных частей СИ), она объясняется невозможностью абсолютно точного изготовления любого технического средства (к числу которых принадлежат СИ).

Деление погрешности на основную и дополнительную связано с условиями, в которых используются СИ.

Основная погрешность СИ – погрешность, которая имеет место при нормальных условиях его эксплуатации, оговоренных в регламентирующих документах (паспорте, технических условиях и пр.).

Дополнительная погрешность СИ возникает при отклонении условий эксплуатации от нормальных (номинальных). Данная погрешность, как и основная, указывается в НД.

Форма выражения погрешности (абсолютная и относительная) относится как к погрешности результата измерения, так и к отдельным ее составляющим. Инструментальная погрешность, обусловленная погрешностью самого СИ, как сказано выше, выражается в приведенной форме.

Приведённая погрешность (δ_{np}), % /9/, выражающая потенциальную точность измерений, представляет собой отношение абсолютной погрешности (Δ) СИ к условно применяемому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Условно принятое значение величины называют нормирующим значением. Часто за нормирующее значение применяют верхний предел измерений. Применима формула:

$$\delta_{np} = \frac{100 \cdot \Delta}{X_N} (\%), \quad (1.4)$$

где X_N – некоторое нормирующее значение, в качестве нормирующего применяется верхний предел шкалы прибора (односторонняя) или диапазон измерений (двухсторонняя).

Чаще всего инструментальная погрешность носит систематический характер.

Систематическая погрешность СИ согласно / 9/ это составляющая погрешности СИ, принимаемая за постоянную или закономерную изменяющуюся. Систематическая погрешность данного СИ, как правило, будет отличаться от систематической погрешности другого экземпляра СИ этого же типа, вследствие чего для группы однотипных СИ систематическая погрешность может иногда рассматриваться как случайная погрешность.

Систематическая погрешность СИ известна, если есть информация о его метрологических характеристиках (МХ). Она может быть получена из паспорта, или другой технической документации на СИ (если они стандартизованы). Для нестандартизованных СИ такую информацию о МХ получают при метрологической аттестации. При отсутствии такой

информации, как было указано выше, возможна лишь приблизительная оценка погрешности результата измерений.

Под метрологической аттестацией согласно РМГ29-99 /9/ следует понимать признание метрологической службой узаконенным для применения СИ единичного производства (или ввозимого единичными экземплярами из-за границы) на основании тщательных исследований его свойств. Метрологической аттестации могут подлежать СИ, не подпадающие под сферы распространения государственного метрологического контроля или надзора.

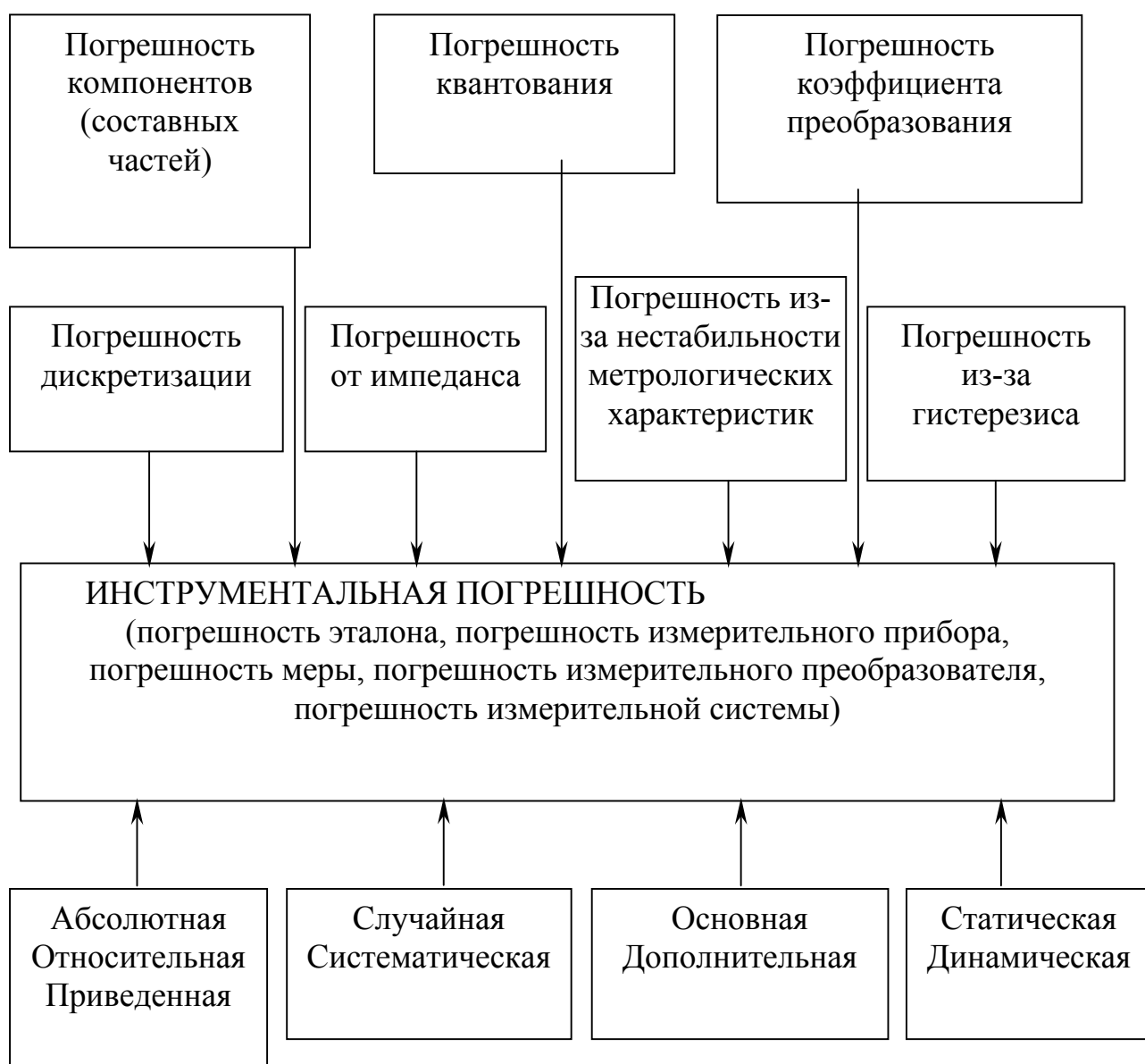


Рисунок 1.2 – Инструментальная погрешность и ее составляющие

Задача оценки эффективности СИ при одно- и многократном измерениях в пособии решена в предложении отсутствия систематической составляющей погрешности. Поэтому при любом наблюдении

предполагается, что существует композиция двух законов распределения погрешностей: погрешности отсчета, распределенной равномерно в диапазоне цены деления прибора $\pm \Delta x/2$, и случайной погрешности, имеющей СКО σ нормального распределения (заменяемую, в случае ограниченного числа наблюдений, оценкой СКО S). Если $\Delta x/(2\sigma) = 2,5 \div 3,5$, то можно проводить однократные измерения, так как мала вероятность того, что случайная составляющая погрешности будет иметь значение, большее половины цены деления СИ.

Для измерения с многократными наблюдениями можно использовать СИ с менее совершенными элементами схемы, обладающее значительной случайной составляющей погрешности, но более чувствительное. При этом $\Delta x/(2\sigma) = 1 \div 0,25$. Такое СИ неудобно для однократных наблюдений из-за высокой вероятности погрешности, превышающей половину цены деления прибора. Однако результаты многократных измерений, выполненные одним и тем же СИ, целесообразно обработать, усреднить и таким образом снизить случайные погрешности результатов наблюдений.

Случайная погрешность СИ по [9] это составляющая погрешности СИ, изменяющаяся случайным образом. Она приводит к разбросу показаний, выполненных в одних и тех же условиях. В этом случае говорят о вариации показаний.

Вариация показаний измерительного прибора - это разность показаний прибора в одной и той же точке диапазона измерений при плавном подходе к этой точке со стороны меньших и больших значений измеряемой величины.

В высокочувствительных (особенно в электронных) измерительных приборах вариация приобретает иной смысл и может быть раскрыта как колебание его показаний около среднего значения (показание “дышит”)

Вариация (гистерезис) определяется как разность между показаниями СИ в данной точке диапазона измерения при возрастании и убывании измерений величины и неизменных внешних условиях:

$$H = |X_B - X_V|,$$

где X_B, X_V - значения измерений эталонными СИ при возрастании и убывании величины X .

Следует иметь в виду, что, хотя вариация показаний СИ вызывается случайными факторами, сама она – не случайная величина. Зависимость между выходным и входным сигналом СИ, полученную экспериментально, называют градуировочной характеристикой, которая может быть представлена аналитически, графически или в виде таблицы.

Градуировочная характеристика может изменяться под воздействием внешних и внутренних причин. Например, при быстром изменении тока подвижная часть СИ, вследствие инерции, не успевает “следить” за изменением тока. Градуировочная характеристика в этом случае должна выражаться дифференциальным уравнением.

Погрешность СИ – разность между показаниями СИ и истинным значением измеряемой физической величины.

Поскольку истинное значение физической величины неизвестно, то на практике (как показано выше) пользуются ее действительным значением.

Погрешность меры – разность между номинальным значением меры и действительным значением воспроизводимой ею величины.

Кроме этого, различают погрешности, относящиеся к выполнению метрологических процедур воспроизведения и передачи размера единицы физической величины.

Под погрешностью воспроизведения единицы физической величины понимается /9/ погрешность результата измерений, выполняемых при воспроизведении единицы физической величины.

Следует отметить, что погрешность воспроизведения единицы при помощи государственных эталонов обычно указывают в виде ее составляющих: не исключенной систематической погрешности; случайной погрешности; нестабильности за год.

Различают /9/ так же **погрешность передачи размера единицы физической величины**, под которой понимают погрешность результата измерений, выполняемых при передаче размера единицы.

В погрешность передачи размера единицы входят как не исключенные систематические, так и случайные погрешности метода и СИ.

Погрешность поверки – погрешность применяемого метода передачи размера единицы физической величины, осуществляемого при сравнении показаний поверяемого и эталонного приборов. Не рекомендуется заменять друг другом термины “поверка” и “калибровка”.

Следует отметить, что в практике поверочных работ, в силу того, что трудно выделить погрешности от изменяющихся условий поверку выполняют в нормальных условиях измерения.

Как метрологическая процедура, носящая юридический характер, поверка распространяется на все СИ, подлежащие Государственному метрологическому контролю и надзору /9/. Калибровке подвергаются все остальные СИ, используемые для измерения в процессе производства, оказания услуг. Владелец этих СИ согласно Закона “Об обеспечении единства измерений” сам поддерживает надежность и их метрологические характеристики в период эксплуатации (так называемый межкалибровочный интервал).

С точки зрения терминологии, определяемой в РМГ 29-99 /9/ погрешность поверки (калибровки) - это отклонение в показаниях поверяемого (калибруемого) СИ - прибора или измерительной системы от показаний эталонного СИ.

Разница заключается в назначении метрологических требований к самой процедуре. При выполнении поверочных работ эти требования должны быть выше. Именно этим и определяется более высокий метрологический статус поверки.

Это связано с тем, что поверку проводят в соответствии с обязательными требованиями, установленными НД по поверке (ГОСТ или ТУ на поверяемое СИ, а так же ГОСТ, МИ, ПИ, МВИ на методы и средства поверки). Если при поверке выявлено несоответствие обязательным требованиям перечисленных в НД, то поверяемое СИ бракуется (т. е. изымается из эксплуатации у его владельца). Возможны так же ремонт или юстировка с повторной поверкой этого СИ.

Поверку проводят специально обученные специалисты, аттестованные в качестве поверителей органами Государственной метрологической службы.

Результаты поверки СИ, признанных годными к применению, оформляют выдачей свидетельства о поверке, нанесением поверительного клейма или иными способами, установленными НД по поверке

Целью же калибровки является оценка метрологических характеристик СИ. При этом результаты калибровки позволяют определить действительные значения измеряемой величины, показываемые СИ, или поправки к его показаниям. Может быть поставлена задача оценки погрешности этих СИ. При калибровке могут быть определены и другие метрологические характеристики.

Результаты калибровки СИ удостоверяются калибровочным знаком, наносимым на СИ, или сертификатом о калибровке, а также записью в эксплуатационных документах. Сертификат о калибровке представляет собой документ, удостоверяющим факт и результаты калибровки СИ, который выдается организацией, осуществляющей калибровку.

Погрешность градуировки – погрешность действительного значения величины, приписанного той или иной отметке шкалы СИ в результате градуировки. Как процедуру определения погрешности действительного значения по эталонному значению стандартного образца или вещества различают погрешность калибровки.

Погрешность квантования – методическая погрешность отражения непрерывной величины ограниченным по числу разрядов числом. Она равна разности между значением непрерывной функции и значением, получаемым в результате квантования.

Статический и динамический режимы работы СИ позволяют различать одноименные погрешности.

Статическая погрешность СИ /9 / это погрешность СИ, применяемого при измерении физической величины, принимаемой за неизменную.

Динамическая составляющая погрешности возникает при работе СИ в динамическом режиме и определяются двумя факторами: динамическими (инерционными) свойствами СИ и характером (скоростью) изменения измеряемой величины. При измерениях детерминированных сигналов динамические погрешности обычно рассматриваются как систематические. При случайном характере измеряемой величины динамические погрешности приходится рассматривать как случайные.

У СИ часто можно выделить составляющие погрешности, не зависящие от значения измеряемой величины и погрешности, изменяющиеся

пропорционально измеряемой величине. Такие составляющие называют, соответственно, **аддитивными и мультипликативными погрешностями**. Аддитивной, например, является систематическая погрешность, вызванная неточной установкой нуля и стрелочного прибора с равномерной шкалой; мультипликативной – погрешность измерения отрезков времени отстающими или спешащими часами. Эта погрешность будет возрастать по абсолютной величине до тех пор, пока владелец часов не выставит их правильно по сигналам точного времени. Такая операция называется градуированием погрешности.

Заканчивая анализ классификации погрешностей измерений, необходимо отметить, что она (как любая другая классификация) носит достаточно условный (относительный) характер.

Ответы на вопросы об отнесении погрешности косвенного измерения к тем или иным классам и о делении их на случайные и систематические могут быть даны лишь при наличии полной информации о свойствах, параметрах и характеристиках измеряемого объекта, измерительных устройств, условий, в которых проводились измерения. Это возможно, как правило, только после проведения многочисленно повторенных (т. е. многократных) измерений.

В частности, при изготовлении измерительных мостов, разброс сопротивлений его резисторов можно отнести к случайным погрешностям, в то время как в конкретном собранном мосте этот разброс следует отнести к систематическим погрешностям измерительного моста.

Другим наглядным примером /17/ может служить **климатическая погрешность** измерительного прибора. Если возможен контроль температуры, при которой проводятся измерения, и имеется поправочная таблица, то такую погрешность следует рассматривать как систематическую. Однако, при отсутствии контроля температур, эта же погрешность учитывается как случайная.

Согласно МИ 1317-86 /18/, если группы характеристик погрешности измерений заданы в качестве требуемых или допускаемых, то их называют нормы характеристик погрешностей измерений (или, кратко, нормы погрешностей измерений).

Если группы характеристик погрешности, приписаны совокупности измерений, выполняемых по определенной (стандартизированной или аттестованной) методике, то их называют приписанные характеристики погрешности измерений.

Кроме этого различают статистические оценки характеристик погрешностей измерений (или, кратко, статистические оценки погрешностей измерений), отражающие близость отдельного, экспериментально уже полученного результата измерения к истинному значению измеряемой величины. При массовых технических измерениях, выполняемых при технологической подготовке производства, в процессах разработки, испытаний, производства, контроля и эксплуатации (потребления) продукции, при товарообмене, торговле и др., применяются, в основном, нормы погрешностей измерений, а также приписанные характеристики

погрешности измерений. Они представляют собой вероятностные характеристики (характеристики генеральной совокупности) случайной величины — погрешности измерений.

При измерениях, выполняемых при проведении научных исследований и метрологических работ (определение физических констант, свойств и состава, стандартных образцов, аттестации СИ и т. п.), часто применяются статистические оценки погрешности измерений. Они представляют собой статистические (выборочные) характеристики случайной величины — погрешности измерений /18/.

В пособии рассматриваются вероятностные характеристики (и их статистические оценки) погрешности результата измерений. К ним относятся выборочное среднее квадратическое отклонение погрешности измерений или границы, в пределах которых погрешность измерений находится с заданной вероятностью (чаще с вероятностями $P=0,95$ $P=0,99$), а так же характеристики случайной и систематической составляющих погрешности измерений (описаны в разделах 2, 3). Причем, возможны случаи, когда границы погрешности измерений определяются с вероятностью, равной единице.

Математическое ожидание погрешности измерений, как было указано выше, может быть использовано в качестве принятого опорного значения, так как оно представляет собой систематическую погрешность. Если ее значение известно и постоянно, то на нее в результат измерений вводится поправка. В других случаях используются характеристики не исключенной систематической погрешности.

В качестве характеристик случайной составляющей погрешности используются среднее квадратическое отклонение случайной составляющей погрешности измерений и (при необходимости) нормализованная автокорреляционная функция случайной составляющей погрешности измерений или характеристики этой функции /18/.

В качестве характеристик систематической составляющей погрешности измерений используются среднее квадратическое отклонение не исключенной систематической составляющей погрешности измерений или границы, в которых не исключенная систематическая составляющая погрешности измерений находится с заданной вероятностью (в частности, и с вероятностью, равной единице) /18/.

В качестве статистических (выборочных) оценок погрешности измерений используются результаты экспериментального или расчетно-экспериментального оценивания характеристик среднего квадратического отклонения, границ, в пределах которых погрешность измерения находится с заданной вероятностью, а также характеристик случайной и систематической составляющих погрешности измерений.

Следует также отметить, что вместо термина среднее квадратическое отклонение (S) РМГ 29-99 рекомендует применять термин средняя квадратическая погрешность результатов единичных измерений в ряду измерений (или кратко, средняя квадратическая погрешность измерений).

Это есть оценка (S) рассеяния единичных (однократных) результатов измерений в ряду равноточных измерений одной и той же физической величины около среднего их значения, вычисляемая по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n \cdot (n-1)}}, \quad (1.5)$$

где x_i – результат i -го единичного измерения;

$\bar{X}$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины n единичных результатов.

Под оценкой параметра (числовых характеристик) законов распределения принято понимать приближенное их значение, при статистической обработке ограниченного числа случайной величины. К числу которой, как известно, относят и физическую величину. Свойства оценок, их виды и способы определения приведены во втором разделе.

Учитывая, с одной стороны, что под отклонением в соответствии с формулами (1.2), (1.5) понимают отклонение единичных (отдельных) результатов в ряду измерений от их среднего арифметического значения, а саму эту величину определяют как погрешность измерения. А, с другой стороны, если учесть, что в результаты измерений введены поправки на действие систематических погрешностей, то отклонения представляют собой случайные погрешности. Поэтому с точки зрения упорядочения совокупности терминов, родовым среди которых является термин “погрешность измерения”, целесообразно применять термин “средняя квадратическая погрешность”. При обработке ряда результатов измерений, свободных от систематических погрешностей, СКП и СКО являются одинаковой оценкой рассеяния результатов единичных измерений (однократных наблюдений). Второй раздел данного пособия содержит формулы для определения этих характеристик погрешности.

Погрешность результата измерений всегда известна с некоторой доверительной вероятностью и существуют ее доверительные границы. Под которыми понимают наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение погрешности результата измерений.

Доверительные границы в случае нормального закона распределения вычисляются как $\pm tS, \pm tS_x$, где S, S_x – средние квадратические погрешности, соответственно, единичного и среднего арифметического результатов измерений; t – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений n .

При симметричных границах термин может применяться в единственном числе — доверительная граница. Иногда вместо термина

доверительная граница применяют термин доверительная погрешность или погрешность при данной доверительной вероятности

В РМГ 29-99 нормируется так же и предельная погрешность измерения в ряду измерений. Предельная погрешность измерения - это максимальная погрешность измерения (плюс, минус), допускаемая для данной измерительной задачи.

Во многих случаях погрешность $3S$ принимают за предельную, то есть $\Delta_{пр} = \pm 3S$. При необходимости за предельную погрешность может быть принято и другое значение границ погрешности (в зависимости от формы и вида закона распределения).

Результат измерения всегда содержит погрешности систематического и случайного характера.

Показание СИ при любых измерениях можно представить в виде:

$$x_i = x_d + \dot{\Delta} + \theta, \quad (1.6)$$

где x_i – единичное (отдельное) показание СИ;

x_d – действительное значение измеряемого параметра;

$\dot{\Delta}$ – случайная составляющая погрешности;

θ – систематическая составляющая погрешности.

Многократные измерения целесообразно применять, если необходимо получение статистической информации об объекте или процессе. Это имеет место в ходе статистического контроля, когда на основе статистических оценок принимается решение об изменении или сохранении плана контроля или о необходимости вмешательства в процесс производства с целью снижения входного уровня дефектности. В количественном химическом анализе многократные измерения применяются для построения калибровочных и градуировочных кривых. При проверке нулевого показания микрометрических измерительных инструментов с целью определения аддитивной погрешности так же необходимо применять многократные измерения.

При многократных измерениях среднее значение измеряемой величины (принимаемое за результат измерения при условии распределения погрешностей измерения по нормальному закону) при n наблюдениях имеет вид:

$$\bar{X} = x_0 + \theta + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.7)$$

Из приведенного соотношения видно, что при измерениях с многократными наблюдениями за счет увеличения числа наблюдений n происходит лишь уменьшение случайной составляющей погрешности.

На практике до проведения измерений стремятся максимально уменьшить систематическую составляющую погрешности.

При многократных измерениях результат измерения получают в итоге обработки результатов наблюдений, что позволяет уменьшить случайную погрешность. При этом следует отдавать отчет в том, что трудоемкость и время измерений возрастают, поэтому количество наблюдений n должно быть обосновано исходя из требуемой точности измерений. Точность измерений, в свою очередь, определяется поставленной измерительной задачей (целью измерительного эксперимента).

2 Общая последовательность выполнения обработки результатов наблюдений

Порядок обработки результатов наблюдений при многократных измерениях состоит из ряда последовательно выполняемых этапов:

1) определение точечных оценок параметров законов распределения результатов измерений. На этом этапе после ранжирования значений выборки (X) в порядке возрастания и представления ее в виде вариационного ряда ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$) определяются:

а) оценка центра распределения ($\bar{X}_{ц.р.}$);

б) оценка среднеквадратического отклонения СКО отдельных результатов наблюдений (S);

в) оценка СКО среднего арифметического значения ($S_{\bar{x}}$).

В соответствии с критериями исключаются грубые погрешности (промахи) и вводятся поправки на систематические погрешности. После их исключения проводится повторный расчет оценок среднего арифметического значения и оценок СКО наблюдений и измерений;

2) определение оценок параметров закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений.

В этом случае от выборки результатов измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$ переходят к выборке отклонений от среднего арифметического $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$

$$\Delta x_i = x_i - \bar{X}_{ц.р.} \quad (2.1)$$

Для оценки параметров закона распределения проводится построение по исправленным результатам измерений x_i , где $i=1, 2, \dots, n$, - члены вариационного ряда (упорядоченной выборки) y_i , где $y_i = \min(x_i)$ и $y_n = \max(x_i)$. По виду статистических функций распределений (представленных в виде гистограмм или полигонов – для дифференциальной формы или в виде кумулятивной кривой – для интегральной формы) может быть оценен закон распределения результатов наблюдений;

3) оценка закона распределения по статистическим критериям согласия. Для проверки гипотез о виде функции распределения экспериментальных данных используют следующие критерии согласия: Пирсона, Мизеса-Смирнова, составной критерий $\bar{d}$. При числе наблюдений $n > 50$ для идентификации закона распределения используется критерий Пирсона (хи-квадрат) или критерий Мизеса-Смирнова (ω^2). При $15 < n < 50$ для проверки нормальности закона распределения применяется составной критерий (d -критерий), приведенный в ГОСТ 8.207-76 /11/. При $n < 15$ принадлежность экспериментального распределения к нормальному не проверяется. При этом нахождение доверительных границ случайной

погрешности результата измерения по методике, предусмотренной ГОСТ 8.207-76 и описываемый далее, возможна в том случае, если заранее известно, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению. В случае если гипотеза о принадлежности полученных результатов к нормальному закону распределения не подтверждается, то проводится приближенная оценка параметров законов распределения (идентификацией формы и вида закона распределения соответствующему теоретическому);

4) определение доверительных интервалов случайной погрешности. Если удалось идентифицировать закон распределения результатов измерений, то с его использованием находят квантильный множитель z_p при заданном значении доверительной вероятности P . В этом случае доверительные границы случайной погрешности $\Delta = \pm z_p \cdot S_{\bar{x}}$;

5) определение границ не исключенной систематической погрешности результата измерений. Под этими границами понимают найденные нестатистическими методами границы интервала, внутри которого находится неисключенная систематическая погрешность. Она образуется из ряда составляющих, как правило, погрешностей метода и средств измерений, а также субъективной погрешности;

6) определение доверительной границы погрешности результата измерения Δ_p . Данная операция осуществляется путем суммирования СКО случайной составляющей $S_{\bar{x}}$ и границ неисключенной систематической составляющей θ в зависимости от соотношения этих погрешностей между собой;

7) формирование результата измерений.

2.1 Определение точечных оценок закона распределения результатов наблюдений

В математической статистике под оценками понимают приближенные значения искомой (истинной) величины, полученные на основании результатов выборочного исследования и обеспечивающие возможность принятия обоснованных решений о неизвестных параметрах генеральной совокупности /1/.

Чтобы оценки истинного значения измеряемой величины были надёжными, представительными, к ним предъявляется ряд требований. При этом следует помнить о том, что, производя оценку истинного значения измеряемой величины по результатам измерений, мы пользуемся методами теории вероятностей, применяемыми для оценки неизвестных параметров функции распределения случайной величины /5, 6/, т. е. оценки являются случайными величинами. Так, для нормального закона числовыми параметрами распределения являются математическое ожидание и дисперсия. Обычно при обработке результатов измерений оценку математического ожидания в виде среднего арифметического значения

сопоставляют с оценкой истинного значения измеряемой величины. Но истинное значение, как определено в разделе 1, является неизвестной нам величиной, имеющей единственное значение. Поэтому только с формальной точки зрения можно признать адекватными оценки математического ожидания случайной величины и истинного значения физической величины. Более того, некоторые результаты измерений находится ближе к истинному значению, чем среднее арифметическое значение результатов измерений. Формальным обоснованием указанной адекватности является то, что оценка параметров закона распределения случайной величины и оценка единственного истинного значения измеряемой величины выполняются по некоторому числу наблюдений, каждое из которых может рассматриваться как случайное событие.

Обработка результатов наблюдений предполагает вычисление математических оценок истинного значения измеряемой величины.

При многократных измерениях за оценку истинного значения измеряемой величины принимается координата центра опытного распределения. Статистическую обработку результатов наблюдений следует начинать с вычисления центра распределения, так как погрешность его нахождения влечет за собой неправильную оценку других характеристик (среднеквадратического отклонения – СКО, эксцесса, контрэксцесса, вида опытного распределения, оценки погрешностей результата измерений и др.).

Следует напомнить, что прямыми называются измерения, результат которых позволяет непосредственно получить искомые значения физических величин.

В условиях отсутствия сведений о виде и форме закона распределения результатов наблюдений (ограниченное число результатов, грубые СИ) среднее арифметическое значение не всегда может быть принято за оценку координаты центра распределения (центр кривой эмпирического распределения совпадает с оценкой математического ожидания только для нормального распределения).

В математической статистике известны несколько оценок координаты центра распределения: среднее арифметическое, медиана, мода, срединный размах, центр размаха.

Поскольку все перечисленные оценки являются точечными и выбор их неоднозначен, они должны, во-первых, сходиться к оцениваемому значению при $n \rightarrow \infty$ (состоятельные оценки), во-вторых, их математическое ожидание должно быть равно оцениваемому значению (несмещенные оценки), в-третьих, их выборочное распределение должно иметь наименьшую дисперсию (эффективные оценки) [1]. Остановимся на перечисленных свойствах оценок более подробно.

При увеличении числа независимых измерений n оценка должна сходиться по вероятности к математическому ожиданию случайной величины. Такая оценка называется состоятельной. Требование “состоятельности” предъявляется к статистическим оценкам при рассмотрении выборок большого объема (т. е. число измерений должно быть велико!).

Одним из условий получения надёжных оценок является требование к их несмещенности, которое заключается в том, чтобы при замене оценкой (m_x^*) истинного значения X_n не допускалась систематическая погрешность (в сторону увеличения или уменьшения относительно X_n). Это требование приводит к необходимости выполнения условия: математическое ожидание оценки должно при любом числе измерений совпадать с истинным значением величины.

Если выбранная несмещенная оценка по сравнению с другими возможными оценками имеет наименьшую дисперсию, то такая оценка является эффективной, например, $D[m_x] = \min$. Оценка D_x^* не является эффективной. В случае нормального распределения результатов наблюдений статистическая дисперсия является асимптотической несмещенной, так как при увеличении числа измерений n отношение ее дисперсии к минимально возможной измеряемой величине стремится к единице.

Числовые характеристики случайных величин, полученных по результатам выборочных наблюдений (т. е. оценки истинных значений величин) подразделяются на три вида [20, 23]:

- 1) характеристики положения;
 - 2) характеристики рассеяния;
 - 3) характеристики формы распределения.
- К характеристикам положения относятся:
- а) среднее арифметическое значение $\bar{X}$;
 - б) медиана $\bar{X}_M$;
 - в) мода $\bar{X}_O$;
 - г) среднее геометрическое значение $(\bar{X}_g)$;
 - д) среднее гармоническое значение $(\bar{X}_h)$.

Все перечисленные числовые характеристики определяют координату центра распределения упорядоченной совокупности. Формулы для их определения приведены в следующем подразделе. Следует отметить, что только в случае нормально распределенных результатов наблюдений выборочное среднее арифметическое, медиана и мода совпадают между собой и могут быть приняты за центр распределения статистической совокупности физической величины, полученной при измерениях.

К характеристикам рассеяния значений переменной относятся:

- а) минимальное ($X_{\min}$) и максимальное ($X_{\max}$) значение;
- б) размах вариационного ряда $(\bar{X}_R; \bar{R})$;
- в) дисперсия (S^2) ;
- г) среднее квадратическое (стандартное) отклонение (S) ;
- д) 25 %-й (LQ) и 75 % (UQ) квантили и межквантильный размах $(RQ - UQ - LQ)$;
- е) среднее квадратичное отклонение среднего значения $(S_{\bar{x}})$;

ж) 95 %-й доверительный интервал истинного среднего значения.

2.1.1 Определение координаты центра распределения

Координата центра распределения определяет положение случайной величины на числовой оси и может быть найдена несколькими способами. Наиболее фундаментальным /6, 23/ является отыскание центра по принципу симметрии, т. е. такой точки X_M на оси x , слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайной величины одинаковы и равны 0,5. В этом случае для интегральной функции распределения вероятностей должно выполняться условие:

$$F(X_M) = \int_{-\infty}^{X_M} P(X) dX = \int_{X_M}^{+\infty} P(X) dX = 0,5. \quad (2.2)$$

При этом точку X_M называют медианой или 50 %-ной квантилью. Для его нахождения у распределения случайной величины должен существовать только нулевой начальный момент. Нулевым моментом в математической статистике /23/ называют некоторое среднее значение, отсчитываемое от начала координат. Нулевой начальный момент равен единице. Он используется для задания условия нормирования плотности распределения и определяется по формуле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^0 P(x) dX = 1. \quad (2.3)$$

Первым начальным моментом, как известно, /23/ является математическое ожидание случайной величины.

В качестве оценки центра распределения может выбираться одна из следующих оценок (в зависимости от типа распределения): выборочное среднее арифметическое, медиана, центр размаха, срединный размах.

При выборе оценок центра распределения следует учитывать, что они имеют различную чувствительность к наличию промахов в обрабатываемой совокупности исходных данных.

2.1.1.1 Определение выборочного среднего арифметического ($\bar{X}$)

Его определяют по формуле:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2.4)$$

где x_i – отдельные результаты наблюдений;

n – общее количество результатов.

Выборочное среднее арифметическое для упорядоченной совокупности (вариационного ряда) вычисляется по формуле:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot m_i = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \hat{p}_i, \quad (2.5)$$

где m – частота повтора отдельных результатов наблюдений;

$p_i = \frac{m_i}{n}$ – частость (статистическая вероятность) попадания i -го

наблюдения в определенный k -й интервал.

Выборочное среднее арифметическое $\bar{X}$ является несмещенной оценкой любого закона распределения, кроме этого – состоятельной, эффективной и достаточной (характеристика полноты использования всей содержащейся в выборке информации) /1/.

Однако оценка в виде среднего арифметического слабо защищена от влияния промахов. Она ослабляется лишь в $\sqrt{n}$ раз, где n – число наблюдений, в то время как его возможный размер не ограничен.

2.1.1.2 Среднее арифметическое 90 %-ной выборки ($\bar{X}_{0,9}$)

Среднее арифметическое (по ограниченному числу наблюдений) находится по формуле:

$$\bar{X}_{(\varepsilon)} = \frac{1}{n-2t} \cdot \sum_{i=t+1}^{n-t} x_i, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon n \leq t \leq \varepsilon n + 1$ для случая, когда с каждого конца вариационного ряда исключают по t значений для получения более устойчивой оценки центра распределения. Обычно используют значения $\varepsilon = 0,05$ и $\varepsilon = 0,1$ (это означает, что следует отбрасывать по 5 или 10 % результатов наблюдений).

В метрологии чаще находит применение среднее арифметическое 90 %-ной выборки (обозначаемой символами $\bar{X}_{0,9}$ или $\bar{X}_{0,1}$). Она определяется по формуле:

$$\bar{X}_{0,9} = \frac{1}{n-2r} \cdot \sum_{i=r+1}^{n-r} x_i, \quad (2.7)$$

где $2r$ – число не учитываемых результатов.

Среднее арифметическое $\bar{X}_{0,9}$ также может быть определено:

$$\bar{X}_{0,9} = \frac{1}{n-2r} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot m_i, \quad (2.8)$$

где m_i – частота попадания i -го значения в k -й интервал (при интервальном представлении вариационного ряда).

Оценка $\bar{X}_{0,9}$ менее чувствительна к результатам с грубыми погрешностями, чем выборочное среднее арифметическое $\bar{X}$; поскольку при обработке 90 % объема выборки отбрасываются из концов вариационного ряда $x_1 < x_2 < x_3 < \dots \leq x_n$ по 5 % наиболее удаленных результатов, в которых могут содержаться грубые погрешности.

2.1.1.3 Медиана наблюдений ($\bar{X}_m$)

Медианой $\bar{X}_m$ называют наблюдаемое значение x_i (так называемую варианту), которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

Медиана $\bar{X}_m$ вычисляется по нижеприведённым формулам.

Если n – четное, то медиана рассчитывается по формуле:

$$\bar{X}_m = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right), \quad (2.9)$$

Если n – нечетное, то по формуле:

$$\bar{X}_m = \frac{1}{2} \cdot x_{\frac{n+1}{2}}, \quad (2.10)$$

Следует иметь в виду, что медиана $\bar{X}_m$ является наиболее эффективной оценкой для симметричных экспоненциальных распределений, в которых контрэксцесс принадлежит интервалу $0 < \chi < 0,45$. Для класса распределений, близких к нормальному, с $0,45 < \chi < 0,67$ эффективными оценками являются среднее арифметическое $\bar{X}$, $\bar{X}_{(0,05)} \cdot \bar{X}_{(0,1)}$, занимающие медианное положение.

Для распределений, близких к равномерному и арксинусоидальному, с $0,67 < \chi < 1$ целесообразно использовать центр размаха $\bar{X}_R$. Для двухмодальных распределений с $0,67 < \chi < 1$ центр срединного размаха $\bar{X}_C$.

Медиана $\bar{X}_m$ является эффективной оценкой центра экспоненциальных пологоспадающих одномодальных распределений Лапласа с эксцессом $\varepsilon > 3,8$.

2.1.1.4 Срединный размах вариационного ряда

Центр срединного размаха $\bar{X}_{R_2}$ определяют в зависимости от кратности членов ряда по нижеприведенным формулам.

При n , кратном 4 находится по формуле:

$$\bar{X}_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{n}{(4+1)}} + x_{\frac{3n}{4}} \right). \quad (2.11)$$

При четном n находится по формуле:

$$\bar{X}_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{(n+2)}{4}} + x_{\frac{(3n+2)}{4}} \right). \quad (2.12)$$

При $(n-1)$, кратном 4 находится по формуле:

$$\bar{X}_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{(n-1)}{4}+1} + x_{n-\frac{(n-1)}{4}} \right). \quad (2.13)$$

При $(n+1)$, кратном 4 находится по формуле:

$$\bar{X}_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{(n+1)}{4}+1} + x_{n-\frac{(n+1)}{4}} \right). \quad (2.14)$$

Центр срединного размаха вариационного ряда $(\bar{X}_c)$ может быть определен также по формуле:

$$\bar{X}_C = X_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot (x_{0,25} + x_{0,75}), \quad (2.15)$$

где $x_{0,25}$, $x_{0,75}$ – 25 % и 75 %-ные квантили опытного распределения (представляют собой усредненные значения конкретных результатов наблюдений).

Для симметричных двумодальных распределений с эксцессом $1 < \varepsilon < 2,4$ (например, композиция двух экспоненциальных распределений) эта оценка является эффективной.

Следует отметить, что обе квантильные оценки $(\bar{X}_{R_2}, \bar{X}_M)$ являются защищенными от влияния промахов, поскольку они не зависят от координат промахов.

2.1.1.5 Центр размаха $(\bar{X}_R)$

Для ограниченных распределений (равномерных, треугольных, трапецеидальных и др.) эффективной оценкой центра распределения может служить центр размаха вариационного ряда, вычисляемый по формуле:

$$\bar{X}_R = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_n), \quad (2.16)$$

где x_1, x_n – крайние значения вариационного ряда.

Однако эта оценка очень чувствительна к результатам с грубой погрешностью, так как она определяется по наиболее удаленным от центра распределения результатам наблюдений, каковыми и являются промахи.

В условиях, когда отсутствуют сведения о законе и виде распределения за оценку центра $\bar{X}_{ц.р.}$ рекомендуется принимать медиану оценок $\bar{X}, \bar{X}_{0,9}, \bar{X}_M, \bar{X}_c(\bar{X}_{R_2}), \bar{X}_p$, расположенных в вариационный ряд.

2.1.2 Определение оценок среднеквадратического отклонения

Оценка S^2 генеральной дисперсии σ^2 любого закона распределения может быть вычислена (при неизвестном математическом ожидании генерального среднего) по формуле:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{ц.р.})^2}. \quad (2.17)$$

Эта оценка является несмещенной и состоятельной, а для нормального распределения – еще и эффективной.

Для нормального закона распределения оценка генерального среднеквадратического отклонения (СКО) S результатов наблюдений определяется:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}. \quad (2.18)$$

Оценка является несмещенной, состоятельной и асимптотически эффективной только для нормального закона. В случае представления результатов вариационным рядом следует пользоваться формулой (5.3).

Несмещенная оценка СКО для нормальных распределений так же определяется по формуле:

$$S = M_k \cdot S^*; \quad (2.19)$$

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}. \quad (2.20)$$

Значения коэффициента M_k приведены в таблице 2.1

Таблица 2.1 – Значения коэффициента M_k в зависимости от количества наблюдений n

n	M_k	n	M_k	n	M_k
1	1,253	10	1,025	19	1,013
2	1,128	11	1,023	20	1,012
3	1,085	12	1,021	25	1,010
4	1,064	13	1,019	30	1,008
5	1,051	14	1,018	35	1,007
6	1,042	15	1,017	40	1,006
7	1,036	16	1,016	45	1,006
8	1,032	17	1,015	50	1,005
9	1,028	18	1,014	60	1,004

СКО случайной погрешности оценки центра распределения (СКО результата измерений) убывает по сравнению с СКО результата наблюдений в $\sqrt{n}$, как показано по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad (2.21)$$

Определение оценок третьего центрального момента μ_3 , коэффициента асимметрии γ_a , СКО коэффициента асимметрии $\sigma(\gamma_a)$ проводится по формулам:

$$\mu_3^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^3; \quad (2.22)$$

$$\gamma_a = \frac{\mu_3^*}{\sigma_3^*}; \quad (2.23)$$

$$\sigma^*(\gamma_a) = \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}}. \quad (2.24)$$

Формулы для вычисления начальных a_k и центральных μ_k моментов и соотношения между ними приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Перечень формул /16/

a_k^*	μ_k^*	$\mu_k^* = f(a_k^*)$
$a_1^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$	$\mu_1^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})$	$a_1^* = \bar{X}; \mu_1^* = 0$
$a_2^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2$	$\mu_2^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$	$\mu_2^* = a_2^* - a_1^2$
$a_3^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3$	$\mu_3^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^3$	$\mu_3^* = a_3^* - 3a_2^*a_1^* + 2a_1^3$
$a_4^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4$	$\mu_4^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^4$	$\mu_4^* = a_4^* - 4a_3^*a_1^* + 6a_2^*a_1^2 - 3a_1^4$

Выбор формул, приведенных во второй и третьей графах таблицы и дающих практически одинаковые результаты, осуществляют в зависимости от особенностей используемых средств вычислительной техники, алгоритмов и программ обработки информации.

Рассмотрим на примере последовательность определения оценок центра распределения.

Даны результаты 20 измерений перемещения для точек пера лопатки компрессора под действием центробежной силы. Результаты наблюдения и частота их появления указаны в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Результаты наблюдений

A , мкм	23,0	23,1	23,2	23,3	23,4	23,5	23,6	23,7
m_i	1	5	6	3	2	1	1	1

Требуется определить оценки результата измерения и СКО результатов наблюдений и измерения.

Будем считать, что закон распределения не известен. В этом случае, как отмечалось раньше, за оценку центра распределения экспериментальных данных принимают медиану из ряда пяти оценок центров $\bar{X}$, $\bar{X}_{0,9}$, $\bar{X}_m$, $\bar{X}_c(\bar{X}_{R_2})$, $\bar{X}_p$ (расположенных в вариационный ряд).

Определяем оценку центра как:

а) среднее арифметическое по формуле (2.4):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{X} = \frac{1}{20} \cdot (23,0 \cdot 1 + 23,1 \cdot 5 + 23,2 \cdot 6 + 23,3 \cdot 3 + 23,4 \cdot 2 + 23,5 \cdot 1 + 23,6 \cdot 1 + 23,7 \cdot 1) = 23,26 \text{ мкм};$$

б) среднее арифметическое 90 %-ной выборки определяем по формуле (2.7). Пять процентов выборки в нашем случае $0,05 \cdot n = 0,05 \cdot 20 = 1$, т. е. один результат измерения. Отбрасываем по одному измерению с концов вариационного ряда, т. е. результаты $x_1 = 23,0$ мкм и $x_{20} = 23,7$ мкм. Тогда:

$$\bar{X}_{0,9} = \frac{1}{18} \cdot (23,1 \cdot 5 + 23,2 \cdot 6 + 23,3 \cdot 3 + 23,4 \cdot 2 + 23,5 \cdot 1 + 23,6 \cdot 1) = 23,25 \text{ мкм};$$

в) медиану распределения - по формуле (2.9). Поскольку n -четное, то

$$\bar{X}_m = \frac{1}{2} \cdot (x_{10} + x_{11}) \text{ мкм}$$

$$\bar{X}_m = \frac{1}{2} (23,20 + 23,20) = 23,20 \text{ мкм};$$

г) срединный размах определяем по формуле (2.15). Для этого вычисляем 25 % и 75 %-ные квантили опытного распределения. Этими квантилями являются точки между 4 и 5, а также между 16 и 17 результатами:

$$X_{0,25} = 23,1 \text{ мкм}; \quad X_{0,75} = \frac{23,3 + 23,4}{2} = 23,35 \text{ мкм}.$$

Тогда:

$$\bar{X}_c = \frac{1}{2} \cdot (x_{0,25} + x_{0,75}) = 23,225 \text{ мкм}.$$

д) центр размаха определяем по формуле (2.16):

$$X_p = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_n) \text{ мкм}$$

$$X_p = \frac{1}{2} \cdot (23,0 + 23,7) = 23,35 \text{ мкм.}$$

Полученные оценки центра распределения располагаем в вариационный ряд: $\bar{X}_m < \bar{X}_c < \bar{X}_{0,9} < \bar{X} < \bar{X}_p$ или $23,20 < 23,225 < 23,25 < 23,26 < 23,35$ мкм.

За оценку центра распределения (результата измерения) окончательно принимаем среднее арифметическое 90 %-ной выборки, так как эта оценка занимает медианное положение в ряду оценок: $\bar{X}_{u.p.} = \bar{X}_{0,9} = 23,25$ мкм.

Оценку СКО результатов наблюдений вычисляем по формуле (2.17):

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{u.p.})^2} = 0,18 \text{ мкм.}$$

Оценку СКО результатов измерений определяем по формуле (2.21):

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,04 \text{ мкм.}$$

3 Методы исключения результатов с грубыми погрешностями

Грубые погрешности (промахи) относятся к числу погрешностей, изменяющимся случайным образом при повторных наблюдениях. Они явно превышают по своему значению погрешности, оправданные условиями проведения эксперимента. В [9] под промахом понимается значение погрешности, отклонение которого от центра распределения существенно превышает значение, оправданное объективными условиями измерения. Поэтому с точки зрения теории вероятности появление промаха маловероятно.

Причинами грубых погрешностей могут быть неконтролируемые изменения условий измерений, неисправность, ошибки оператора и др. [3].

Для исключения грубых погрешностей применяют аппарат проверки статистических гипотез.

В метрологии используются статистические гипотезы, под которыми понимают гипотезы о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Примеры статистических гипотез:

- 1) рассматриваемая выборка (или ее отдельный результат) принадлежит генеральной совокупности;
- 2) генеральная совокупность распределена по нормальному закону;
- 3) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

Во-первых, в двух гипотезах сделано предположение о виде неизвестного распределения и принадлежности отдельных (подозрительных) результатов данному виду распределения, а в третьей - о параметрах двух известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу. А конкурирующей (альтернативной) называют ту, которая противоречит нулевой.

При выдвижении и принятии гипотезы могут иметь место следующие четыре случая:

- 1) гипотеза принимается, причем и в действительности она правильная;
- 2) гипотеза верна, но ошибочно отвергается. Возникающую при этом ошибку называют **ошибкой первого рода**, а вероятность ее появления называют **уровнем значимости** и обозначают $q(\alpha)$;
- 3) гипотеза отвергается, причем в действительности она неверна;
- 4) гипотеза неверна, но ошибочно принимается. Возникающую при этом ошибку называют **ошибкой второго рода**, а вероятность ее появления обозначают β .

Величину $1 - \beta$, т. е. вероятность, что гипотеза будет отвергнута, когда она ошибочна, называют **мощностью критерия**.

Следует заметить, что в нормативной документации по статистическому контролю качества продукции и учебниках по управлению

качеством вероятность признать негодной партию годных изделий (т. е., совершить ошибку первого рода) называют “риском производителя”, а вероятность принять негодную партию – “риском потребителя”.

Все статистические критерии являются случайными величинами, принимающими определенные значения (таблицы критических значений). Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значения критерия, при которых гипотезу принимают. Критической называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Область принятия гипотезы и критическая область разделены критическими точками, в качестве которых и выступают табличные значения критериев.

Область непринятия гипотезы, как показано на рисунке 3.1, может быть односторонней (правосторонней или левосторонней) и двух сторонней.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K_{набл} > k_{кр}$, где $k_{кр}$ – положительное число (рисунок 3.1, а).

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K_{набл} < k_{кр}$, где $k_{кр}$ – отрицательное число (рисунок 3.1, б).

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K_{набл} > k_1$; $K_{набл} < k_2$, где $k_2 > k_1$. Если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами: $K_{набл} < -k_{кр}$, $K_{набл} > k_{кр}$, или равносильным неравенством $|K_{набл}| > k_{кр}$ (рисунок 3.1, в).

Основной принцип проверки статистических гипотез формулируется следующим образом: если наблюдаемое (опытное) значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

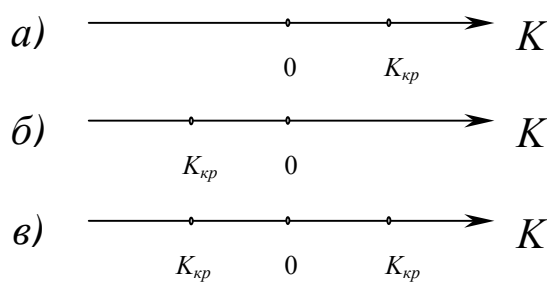


Рисунок 3.1 – Графическая интерпретация к распределению области принятия гипотезы

Проверку статистической гипотезы проводят для принятого уровня значимости q (принимается равным 0,1; 0,05; 0,01 и т. д.). Так принятый уровень значимости $q = 0,05$ означает, что выдвинутая нулевая статистическая гипотеза может быть принята с доверительной вероятностью

$P = 0,95$. Или есть вероятность отвергнуть эту гипотезу (совершить ошибку первого рода), равная $P = 0,95$.

Нулевая статистическая гипотеза подтверждает принадлежность проверяемого “подозрительного” результата измерения (наблюдения) данной группе измерений.

Формальным критерием аномальности результата наблюдений (а, следовательно, и основанием для принятия конкурирующей гипотезы: “подозрительный” результат не принадлежит данной группе измерений) при этом служит граница, отнесенная от центра распределения на величину tS , т. е.:

$$|x_{inod} - \bar{X}_{u.p.}| \geq tS, \quad (3.1)$$

где x_{inod} – результат наблюдения, проверяемый на наличие грубой погрешности;

t – коэффициент, зависящий от вида и закона распределения, объема выборки, уровня значимости /5/.

Таким образом, границы погрешности зависят от вида распределения, объема выборки и выбранной доверительной вероятности.

При обработке уже имеющихся результатов наблюдений произвольно отбрасывать отдельные результаты не следует, так как это может привести к фиктивному повышению точности результата измерений. Группа измерений (выборка) может содержать несколько грубых погрешностей и их исключение производят последовательно, по одному.

Все методы исключения грубых погрешностей (промахов) могут быть разделены на два основных типа:

а) методы исключения при известном генеральном СКО;

б) методы исключения при неизвестном генеральном СКО.

В первом случае $\bar{X}_{u.p.}$ и СКО вычисляется по результатам всей выборки, во втором случае из выборки перед вычислением удаляются подозрительные результаты.

В случае ограниченного числа наблюдений и (или) сложности оценки параметров закона распределения рекомендуется /16/ исключать грубые погрешности, используя приближенные коэффициенты вида распределения. При этом исключаются значения $x_i < x_{r-}$ и $x_i > x_{r+}$, где x_{r-} , x_{r+} – границы промахов, определяемые выражениями:

$$x_{r-} = X - S \cdot \left[1 + A \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \right]; \quad (3.2)$$

$$x_{r+} = X + S \cdot \left[1 + A \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \right], \quad (3.3)$$

где A – коэффициент, значение которого выбирается в зависимости от заданной доверительной вероятности в диапазоне от 0,85 до 1,30 (рекомендуется /16/ выбирать максимальное значение A , т. е. в курсовой работе A следует принять равным 1,3);

γ – контрэксцесс, значение которого зависит от формы закона распределения величины (ЗРВ).

После исключения промахов операции по определению оценок центра распределения и СКО результатов наблюдений и измерений необходимо повторить.

Поскольку на практике чаще встречаются измерения при неизвестном СКО (ограниченное число наблюдений), в пособии рассмотрены следующие критерии проверки подозрительных (с точки зрения погрешностей) результатов наблюдений: Ирвина, Романовского, вариационного размаха, Диксона, Смирнова, Шовене.

Поскольку критериальные требования (коэффициенты), определяющие границу, за которой находятся “грубые” (в смысле погрешностей) результаты наблюдений у разных авторов различны, то проверку следует выполнять сразу по нескольким критериям (рекомендуется использовать не меньше трех, из рассматриваемых ниже). Окончательное заключение о принадлежности “подозрительных” результатов рассматриваемой совокупности наблюдений следует делать по большинству критериев. Кроме этого выбор критерия для определения грубых погрешностей должен выполняться после построения гистограммы результатов наблюдений. По виду гистограммы выполняется предварительная идентификация вида закона распределения (нормальный, близкий к нормальному или отличный от него).

3.1 Критерий Ирвина

Для полученных экспериментальных данных определяют коэффициент по формуле:

$$\lambda = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{S}, \quad (3.4)$$

где x_{n+1} , x_n – наибольшие значения случайной величины;

S – среднее квадратическое отклонение, вычисленное по всем значениям выборки.

Затем этот коэффициент сравнивается с табличным значением λ_q , возможные значения которого приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Критерий Ирвина λ_q .

Число измерений n	Уровень значимости	
	$q=0,05$	$q=0,01$
1	2	3
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Если $\lambda > \lambda_q$, то нулевая гипотеза не подтверждается, т. е. результат - ошибочный, и он должен быть исключен при дальнейшей обработке результатов наблюдений.

3.2 Критерий Романовского

Конкурирующая гипотеза о наличии грубых погрешностей в подозрительных результатах подтверждается, если выполняется неравенство:

$$|x_{inod} - \bar{X}_{ц.р.}| \geq t_p S, \quad (3.5)$$

где t_p – квантиль распределения Стьюдента при заданной доверительной вероятности с числом степеней свободы $k = n - k_n$ (k_n - число подозрительных результатов наблюдений). Фрагмент квантилей для распределения Стьюдента представлен в таблице 3.2.

Точечные оценки распределения $\bar{X}_{ц.р.}$ и СКО S результатов наблюдений вычисляется без учета k_n подозрительных результатов наблюдений.

Таблица 3.2 – Критерий Стьюдента t_p (квантили Стьюдента)

Доверительная вероятность p	Число степеней свободы k													
	3	4	5	6	8	10	12	18	22	30	40	60	120	∞
0,90	2,35	2,13	2,01	1,94	1,86	1,81	1,78	1,73	1,72	1,70	1,68	1,67	1,66	1,64
0,95	3,18	2,78	2,57	2,45	2,31	2,23	2,18	2,10	2,07	2,04	2,02	2,00	1,98	1,96
0,99	5,84	4,60	4,03	3,71	3,36	3,17	3,06	2,98	2,82	2,75	2,70	2,86	2,62	2,58

3.3 Критерий вариационного размаха

Является одним из простых методов исключения грубой погрешности измерений (промаха). Для его использования определяют размах вариационного ряда упорядоченной совокупности наблюдений ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_n$):

$$R_n = x_n - x_1. \quad (3.6)$$

Если какой-либо член вариационного ряда, например x_k , резко отличается от всех других, то производят проверку, используя следующее неравенство:

$$\bar{X} - z \cdot R_n < x_k < \bar{X} + z \cdot R_n \quad (3.7)$$

где $\bar{X}$ – выборочное среднее арифметическое значение, вычисленное после исключения предполагаемого промаха;

z – критерийное значение.

Нулевую гипотезу (об отсутствии грубой погрешности) принимают, если указанное неравенство выполняется. Если x_k не удовлетворяет условию (3.7), то этот результат исключают из вариационного ряда.

Коэффициент z зависит от числа членов вариационного ряда n , что представлено в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Критерий вариационного размаха

n	5	6	7	8-9	10-11	12-15	16-22	23-25	26-63	64-150
z	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

3.4 Критерий Диксона

Критерий основан на предположении, что погрешности измерений подчиняются нормальному закону (предварительно необходимо построение гистограммы результатов наблюдений) и проверка гипотезы о принадлежности нормальному закону распределения. При использовании критерия вычисляют коэффициент Диксона (наблюдаемое значение критерия) для проверки наибольшего или наименьшего экстремального значения в зависимости от числа измерений. В таблице 3.4 приведены формулы для вычисления коэффициентов. Коэффициенты r_{10} , r_{11} применяют, когда имеется один выброс, а r_{21} и r_{22} - когда два выброса. Требуется первоначальное упорядочение результатов измерений (объема выборки). Критерий применяется, когда выборка может содержать более одной грубой погрешности.

Таблица 3.4 – Формулы коэффициентов Диксона

Число измерений n (объем выборки)	Коэффициент Диксона	Для наименьшего экстремального значения параметра	Для наибольшего экспериментального параметра
1	2	3	4
3-7	r_{10}	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Вычисленные для выборки по формулам значения коэффициентов Диксона r сравнивают с принятым (табличным) значением критерия Диксона r_q (таблица 3.5).

Нулевая гипотеза об отсутствии грубой погрешности выполняется, если выполняется неравенство $r < r_q$.

Если $r > r_q$, то результат признается грубой погрешностью и исключается из дальнейшей обработки.

Таблица 3.5 – Критериальные значения коэффициентов Диксона (при принятом уровне значимости q)

Статистика	Число измерений	r_q при уровне значимости q			
		0,1	0,05	0,02	0,01
1	2	3	4	5	6
r_{10}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,631	0,683
	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,409	0,477	0,551	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615
r_{22}	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497
	25	0,360	0,406	0,457	0,489

3.5 Критерии "3σ", Райта

Критерий “правило трех сигм” является одним из простейших для проверки результатов, подчиняющихся нормальному закону распределения. Сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основания предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально. С этой целью для выборки (включая подозрительный результат) вычисляется центр распределения и оценка СКО результата наблюдений. Результат, который удовлетворяет условию $|x_{inod} - \bar{X}_{ц.р.}| \geq 3S$, считается имеющим грубую погрешность и удаляется, а ранее вычисленные характеристики распределения уточняются.

Этому критерию аналогичен критерий Райта, основанный на том, что если остаточная погрешность больше четырех сигм, то этот результат измерения является грубой погрешностью и должен быть исключен при дальнейшей обработке. Оба критерия надежны при числе измерений больше 20...50. Их правомочно применять, когда известна величина генерального среднеквадратического отклонения (S).

Может оказаться, что при новых значениях $\bar{X}_{ц.р.}$ и S другие результаты попадут в категорию аномальных. Однако, как доказано в [2] дважды использовать критерии грубой погрешности не рекомендуется.

3.6 Критерий Смирнова

Критерий Смирнова используется при объемах выборки $n \geq 25$ или при известных значениях генеральных среднего и СКО. Он устанавливает менее жесткие границы грубой погрешности. Для реализации этого критерия вычисляются действительные значения квантилей распределения (наблюдаемое значение критерия) по формуле:

$$\beta = \frac{\max |x_{inod} - \bar{X}|}{\bar{S}}. \quad (3.8)$$

Найденное значение сравнивается с критериальным β_k , приведенным в таблице 3.6

Таблица 3.6 – Квантили распределения β_k

Объем выборки n	Предельное значение β_k при уровне значимости q				
	0,100	0,050	0,0010	0,005	0,001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944
30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

3.7 Критерий Шовене

Критерий Шовене применяется для законов, не противоречащих нормальному, и строится на определении числа ожидаемых результатов наблюдений $n_{ож}$, которые имеют столь же большие погрешности, как и подозрительный. Гипотеза о наличии грубой погрешности принимается, если выполняется условие:

$$n_{ож} \leq 0,5.$$

Порядок проверки гипотезы следующий:

- 1) вычисляются среднее арифметическое $\bar{X}$ и СКО S результатов наблюдений для всей выборки;
- 2) из таблицы нормированного нормального распределения (Приложение В – интегральная функция нормированного нормального

распределения) по величине $z = \frac{|x_{i\text{ под}} - \bar{X}_{ц.р.}|}{S}$ определяется вероятность появления подозрительного результата в генеральной совокупности чисел n :

$$P(z \cdot S < |x_{i\text{ под}} - \bar{X}_{ц.р.}|); \quad (3.9)$$

3) число ожидаемых результатов $n_{ож}$ определяется по формуле:

$$n_{ож} = n \cdot P. \quad (3.10)$$

Указанные выше критерии во многих случаях оказываются “жесткими”. Тогда рекомендуется пользоваться критерием грубой погрешности “ k ” [4], зависящим от объема выборки n и принятой доверительной вероятности P .

Таблица 3.7 – Зависимость критерия грубой погрешности k от объема выборки n и доверительной вероятности P

n	$P = 95,00$	$P = 99,00$	$P = 99,73$	n	$P = 95,00$	$P = 99,00$	$P = 99,73$
9	4,42	7,10	11,49	25	3,84	5,14	6,25
10	4,31	6,99	10,26	30	3,80	5,00	5,95
12	4,16	6,38	8,80	40	3,75	4,82	5,56
15	4,03	5,88	7,66	50	3,73	4,70	5,34
20	3,90	5,41	6,73				

Для распределений, отличных от нормального, таких классов, как двух модальных кругловершинных композиций нормального и дискретного распределения с эксцессом $\varepsilon = 1,5 - 3,0$; островершинных двумодальных; композиций дискретного двузначного распределения и распределения Лапласа с эксцессом $\varepsilon = 1,5 - 6,0$; композиций равномерного распределения с экспоненциальным распределением эксцесса $\varepsilon = 1,8 - 6,0$ и классом экспоненциальных распределений в пределах изменения эксцесса $\varepsilon = 1,8 - 6,0$ граница грубой погрешности определяется величиной $\pm(t_{zp} \cdot \sigma)$ или $\pm(t_{zp} \cdot S)$, где:

$$t_{zp} = 1,2 + 3,6 \cdot (1 - \gamma) \cdot \lg \frac{n}{10}, \quad (3.11)$$

где γ – контрэксцесс;

$$t_{zp} = 1,55 + 0,8 \cdot \sqrt{\varepsilon - 1} \cdot \lg \frac{n}{10}. \quad (3.12)$$

Погрешности в определении оценок S СКО и $t_{гр}$ являются отрицательно коррелированными, т. е. возрастание СКО S сопровождается уменьшением $t_{гр}$ /3/. Поэтому определение границ грубой погрешности для законов, отличных от нормального, с эксцессом $\varepsilon \leq 6$ с помощью критерия $t_{гр}$ является достаточно точным и может широко использоваться на практике.

Оценки $\bar{X}$, S и ε должны вычисляться после исключения подозрительных результатов из выборки. После расчета границ грубой погрешности результаты наблюдений, оказавшиеся внутри границ, возвращаются, а ранее найденные характеристики распределения уточняются.

Для равномерного распределения за границы грубой погрешности можно принять величину $\pm 1,8 \cdot S$.

Рассмотрим пример применения критериев для исключения грубых погрешностей при измерении скорости ударной волны. Получены результаты, представленные в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Результаты наблюдений

Скорость V , км/с	3,42	3,43	3,44	3,45	3,46	3,47	3,48	3,49	3,50
Частота m_i	1	2	4	5	4	2	1	0	1

Требуется определить, не содержит ли результат наблюдения $V=3,50$ км/с грубую погрешность.

Для графического определения вида закона распределения построим гистограмму. При построении разбиение на интервалы осуществляем таким образом, чтобы измеренные значения оказались серединами интервалов, что показано на рисунке 3.2.

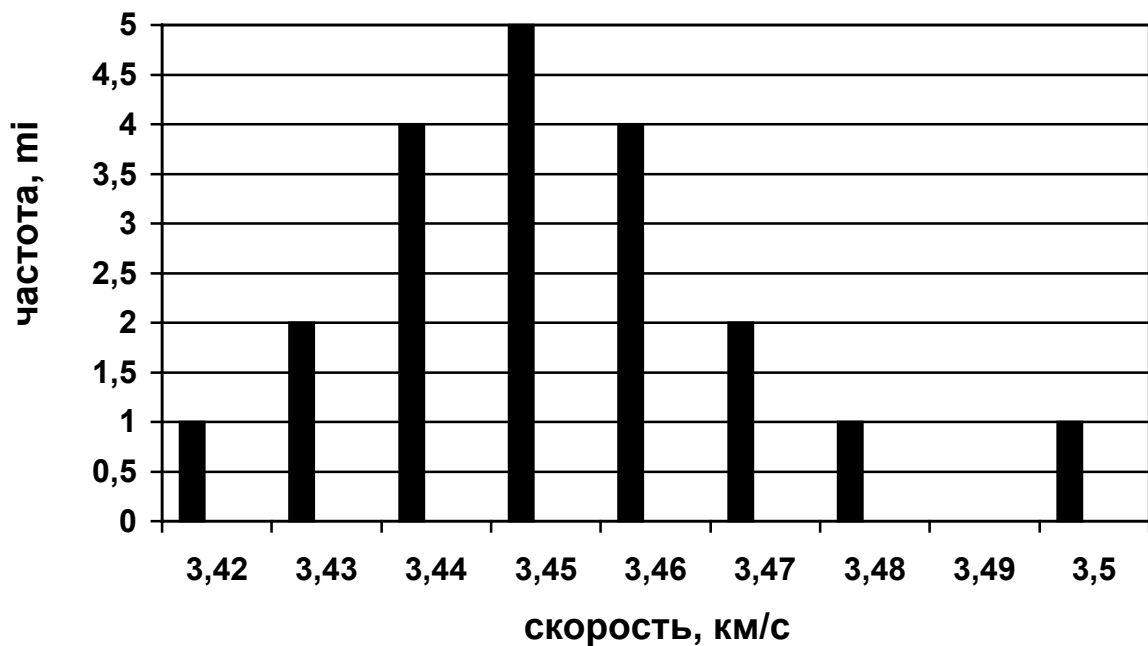


Рисунок 3.2 – Общий вид гистограммы

По виду гистограммы предположительно идентифицируем опытное распределение нормальным. Вычисляем оценки $\bar{X}$ и S :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 3,452 \text{ км/с};$$

$$S = M_k \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = 0,019 \text{ км/с}.$$

Решим задачу с помощью критериев, установленных для нормального распределения.

Проверка по критерию "3σ". Вычислим удаленность подозрительного результата от центра распределения: $x_{inod} - \bar{X} = 3,50 - 3,452 = 0,048 \text{ км/с}$.

Определим границу погрешности: $3S = 3 \cdot 0,019 = 0,057 \text{ км/с}$.

Поскольку $|x_{inod} - \bar{X}_{y.p.}| = 0,048 \text{ км/с} < 3S = 0,057 \text{ км/с}$, то можно сделать вывод, что результат $V = 3,5 \text{ км/с}$ не содержит грубой погрешности.

Проверка по критерию Смирнова "β". Из таблицы 4.6 ($n < 25$) для принятого уровня значимости $q = 0,05$ и объема выборки $n = 20$ находим $\beta_k = 2,799$. Наличие грубой погрешности в результате $V = 3,50 \text{ км/с}$ подтверждается, так как:

$$|x_{inod} - \bar{X}_{y.p.}| = 0,048 \text{ км/с} < \beta_k \cdot S = 2,799 \cdot 0,019 = 0,053 \text{ км/с}.$$

Проверка по критерию Романовского. Определяем характеристики распределения без учета подозрительного результата:

$$\bar{X} = 3,450 \text{ км/с}; S = 0,015 \text{ км/с}.$$

По таблице 3.2 находим коэффициент Стьюдента при объеме выборки $k = n - 1 = 19$ и доверительной вероятности $P = 0,95$; $t_{0,95} = 2,093$. Наличие грубой погрешности подтверждается, т. к.:

$$|x_{inod} - \bar{X}_{u.p.}| = 0,05 \text{ км/с} > t_{0,95} \cdot S = 0,03 \text{ км/с}.$$

Проверка по критерию Шовене. При нахождении характеристик распределения участвуют все наблюдения и поэтому $\bar{X} = 3,452 \text{ км/с}$; $S = 0,019 \text{ км/с}$.

Вычисляем квантиль z по формуле:

$$z = \frac{x_{inod} - \bar{X}}{S}. \quad (3.13)$$

В данном случае:

$$z = \frac{3,5 - 3,452}{0,019} = 2,526.$$

По таблице В.1 Приложения В определяем вероятность выхода результатов за квантиль $\pm z$:

$$P(2,526 \cdot S < |x_{inod} - \bar{X}|) = (1 - 0,9943) \cdot 2 = 0,0114.$$

Тогда ожидаемое число наблюдений с результатом $|x_i| > 3,50 \text{ км/с}$.

$$n_{ож} = n \cdot P(2,526 \cdot S < |x_{inod} - \bar{X}|) = 20 \cdot 0,0114 = 0,228.$$

Так как $n_{ож} < 0,5$, то приходим к выводу о наличии грубой погрешности в результате наблюдения $x_i = 3,50 \text{ км/с}$.

Поскольку большинство критериев (3 из 4-х рассматриваемых) показали наличие грубой погрешности, то результат наблюдения необходимо исключить из выборки.

4 Исключение систематических погрешностей измерений

Основные способы исключения систематических погрешностей сводятся к устранению их до начала измерения, в процессе измерения, внесения поправок в результат измерения, а также оценке границ систематических погрешностей /1/.

Устранение до начала измерения преследует цель: предварительную проверку всех приборов по эталонному образцу и проверку соединения отдельных элементов. Устранение влияния температуры, например, осуществляется различными способами термостатирования. При этом не всегда удастся естественным путем сохранить температуру точно 20°C . Тогда ее стабилизируют на уровне $(30-40)^{\circ}\text{C}$ с использованием равномерного подогрева всего помещения или способом кондиционирования воздуха. Затем используют поправочные коэффициенты. Устранение влияния магнитных полей проводят с помощью магнитного экранирования. Устранение вибраций проводят с помощью губчатой резины и эластичных подвесок.

Устранение в процессе измерения – это наиболее эффективный прием исключения погрешностей. Используют способ замещения, когда измеряемый объект замещают эталонной моделью, например, взвешивание на рычажных весах по способу Борда. На одну чашку весов кладут взвешиваемую массу, на другую – специальный груз (например, дробь), до уравнивания весов. Затем взвешиваемую массу снимают и на ее место устанавливают гири до достижения равновесия. Суммарный вес гирь более точно соответствует взвешиваемой массе. Способ замещения широко используется при измерении электрических параметров сопротивления, емкости, индуктивности с использованием мостовой схемы.

Применяют также способ противопоставления, когда измерения проводят два раза таким образом, чтобы причина систематической погрешности при втором измерении была противоположна по знаку по сравнению с первым измерением. Например, второе взвешивание массы проводят на другой чашке весов. Затем определяется среднее значение результатов двух взвешиваний. Аналогично определяется сопротивление равноплечного моста.

Внесение поправок в результат измерения применяется, если в результате поверки обнаружилось, что, например, вольтметр дает заниженные показания. Тогда определяется поправочный коэффициент и результат измерения умножается на этот коэффициент. Обычно на разных диапазонах измерения поправочные коэффициенты разные. Иногда таблицу поправочных коэффициентов завод-изготовитель прилагает к паспорту прибора.

Перечисленные выше способы устранения погрешностей не исключают полностью систематические погрешности (существует ее остаток – неисключенная систематическая погрешность). Поэтому выполняется оценка границ систематических погрешностей. Это связано с тем, что

причины их возникновения самые разнообразные и не всегда правильно учитываемые. Даже если есть поправки к показанию специального лабораторного прибора, то они разные для разных диапазонов измерения не только по величине, но и по знаку.

Если действительное показание прибора при проведении эксперимента может иметь широкий диапазон, то принимают систематическую погрешность в пределах максимальной погрешности по паспорту завода – изготовителя.

Постоянные систематические погрешности измерений могут быть выявлены (обнаружены) путем сравнения результатов измерений с другими, полученными более точными методами и средствами.

Постоянная составляющая систематической погрешности не может быть выявлена, ни тем более найдена методами совместной обработки результатов. Поэтому задача исключения переменной систематической погрешности может решаться как при отсутствии, так и при наличии постоянной систематической погрешности. Если во всех результатах наблюдений содержится постоянная систематическая погрешность, допускается исключать ее после вычисления среднего арифметического неисправленных результатов наблюдений.

Переменная систематическая погрешность, как было показано выше (наряду с грубыми погрешностями) представляет проблему, которая не всегда решается однозначно. Она может быть выявлена весьма сложными методами дисперсионного анализа [3, 4]. Однако для решения инженерных задач достаточно применить графический метод. Для этого по оси ординат на график наносят результаты наблюдений, а по оси абсцисс – моменты времени его получения (или порядковый номер результата при равномерном во времени их получении).

Для наглядности точки соединяют последовательно прямыми линиями (получают ломанную кривую).

На графике проводят плавную кривую (выполняют аппроксимацию), которая выражает тенденцию изменения результата измерения (если она видна) или констатируют, что такая тенденция не наблюдается, и тогда считают переменную систематическую погрешность практически отсутствующей (несущественной).

Покажем это на примере: Одно и то же изделие было подвергнуто контролю 30 раз. Через примерно равные промежутки времени были сделаны выписки из журнала контролера, в котором фиксировались результаты наблюдений. В порядке, в каком они были получены, результаты образовали следующий ряд значений линейного размера (в миллиметрах):

40,15; 40,15; 40,15; 40,17; 40,16; 40,16; 40,16; 40,15; 40,16; 40,16; 40,17; 40,17; 40,17; 40,17; 40,15; 40,18; 40,19; 40,18; 40,18; 40,18; 40,19; 40,19; 40,19; 40,18; 40,21; 40,19; 40,18; 40,19; 40,19; 40,19.

Требуется выполнить обработку результатов по исключению переменной систематической погрешности.

Первичная обработка последовательности результатов наблюдений одной и той же величины состоит в исключении переменной систематической погрешности. Если приведенные результаты представить графически, как описано выше, то можно увидеть на графике прогрессирующую, линейно возрастающую по модулю погрешность. График показан на рисунке 4.1.

Модуль переменной составляющей систематической погрешности определяется по формуле:

$$\delta_i = \frac{\Delta c}{n} \cdot i, \quad (4.1)$$

где Δc – разность между наибольшими и наименьшими значениями результатов наблюдений;

n – общее число результатов;

i – порядковый номер измерения.

Разность Δc определяется по аппроксимирующей прямой.

В данном примере $\Delta c = 0,05$ мм, тогда $\delta_i = \frac{\Delta c}{n} = \frac{0,05}{30} \cdot i$.

Округлив значение δ_i до сотых долей миллиметра (точность получения результатов), её исключают из результатов измерений, т. е.:

$$x_{испр} = x_i + \nabla_i, \quad (4.2)$$

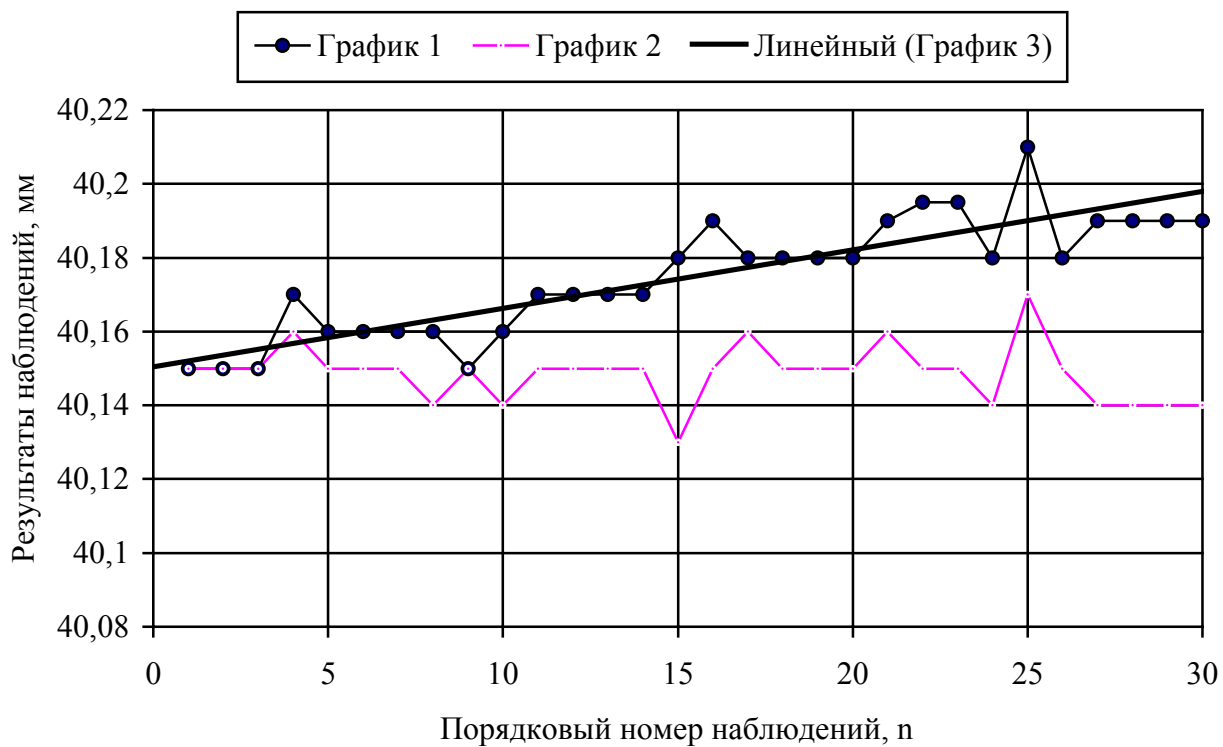
где $\nabla_i = -\delta_i$ – поправка, вносимая в каждый результат.

Как видно, поправка представляет собой погрешность, взятую с обратным знаком.

Внеся исправления, получают новую последовательность результатов:

40,15; 40,15; 40,15; 40,16; 40,15; 40,15; 40,15; 40,14; 40,15; 40,14; 40,15; 40,15;
40,15; 40,15; 40,13; 40,15; 40,16; 40,15; 40,15; 40,15; 40,16; 40,15; 40,15; 40,14;
40,17; 40,15; 40,14; 40,14; 40,14; 40,14.

Сгруппировав исправленные результаты, получают вариационный ряд, подлежащий статистической обработке.



1 – первичная выборка; 2 – после внесения поправки на систематическую погрешность; 3 – линейный (график 3) – аппроксимирующая прямая
Рисунок 4.1 – Графическое представление результатов наблюдений

5 Статистическая обработка результатов измерений

После исключения результатов с грубыми погрешностями и внесения поправок на систематическую погрешность проводят математико-статистическую обработку исправленных результатов измерений.

5.1 Определение точечных оценок исправленных результатов измерений

Для этого по формулам, приведенным в разделе 2, определяют точечные оценки координаты центра распределения и СКО результатов наблюдений и измерений. Точечные оценки могут отличаться от определенных ранее, так как может уменьшиться число результатов (если имеются грубые погрешности), а при наличии систематической составляющей погрешности, расчет точечных оценок должен быть выполнен по исправленным (после исключения систематической погрешности) результатам наблюдений.

Для расчета среднеквадратического отклонения среднего арифметического значения (результата измерений) может быть так же использована формула Питерса:

$$S_{\bar{x}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta x_i|}{n \cdot (n-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.1)$$

где Δx_i – отклонения отдельных, полученных при измерениях значений от среднего арифметического.

Если $n < 4$ вместо формулы (5.1) для оценки $S_{\bar{x}}$ используют приближенную формулу:

$$S_{\bar{x}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |\Delta x_i|. \quad (5.2)$$

Если количество измерений достаточно большое (не менее 40-50), то требуется систематизация исходных данных и разделение вариационного ряда на интервалы.

Для интервальных вариационных рядов используют формулы:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^k x_{io} \cdot \hat{p}_i, \quad (5.3)$$

где x_{io} – значение измеряемой величины в середине k -го интервала;

k – количество интервалов, на которые разбит вариационный ряд.

$$S^* = \sqrt{\sum_{i=1}^k \hat{p}_i \cdot (x_{io} - \bar{X}_{y.p.})^2}, \quad (5.4)$$

где $\hat{p}_i$ – статистическая вероятность попадания i -го результата в данный интервал.

Она находится по формуле:

$$\hat{p}_i = \frac{m_i}{n}, \quad (5.5)$$

где m_i – частота попадания результатов в каждый k -й интервал.

Причем, следует заметить, что S^* – смещенная оценка СКО результатов наблюдений. Для определения несмещенной оценки необходимо либо воспользоваться таблицей 1.1, либо получить результат, используя формулу:

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_{io} - \bar{X}_{y.p.})^2 \cdot m_i}, \quad (5.6)$$

Число интервалов определяют, пользуясь формулой Старджесса:

$$k = 1 + 3,31 \cdot \lg n, \quad (5.7)$$

или

$$k = \sqrt{n}. \quad (5.8)$$

Можно использовать приведенные в таблице 5.1 рекомендуемые числа интервалов k , определяемые в зависимости от числа экспериментальных данных n .

Таблица 5.1 – Рекомендуемое число интервалов

Число экспериментальных данных n	Рекомендуемое число интервалов k
40 - 100	7 – 9
100 - 500	8 – 12
500 - 1000	10 - 16
1000 - 10000	12 - 22

Рекомендуется выбирать нечетное число интервалов. При расчете числа интервалов также следует округлять значение до целого числа. Применение числа интервалов менее 3 не рекомендуется, т.к. это неинформативно [3, 13/

Затем вычисляют ширину интервала h по формуле:

$$h = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{k}, \quad (5.9)$$

где $x_{\max}$, $x_{\min}$ – наибольшее и наименьшее значения данного вариационного ряда (размах).

Определяют границы интервалов (например, $x_{\min}$; $x_{\min} + h$ – границы 1-го интервала, $x_{\min} + h - x_{\min} + 2h$ – границы 2-го интервала и т. д.), затем определяют частоту попадания в интервалы и середины интервалов.

Упорядоченные значения рекомендуется оформлять таблицей по форме, представленной в виде таблицы 5.2

Таблица 5.2 – Промежуточные значения интервального ряда

Граница интервалов $x_i - x_{i+1}$	Середины интервалов x_{io}	Частота попадания в интервалы m_i	Статистическая вероятность (частость) $\hat{p}_i$
1	2	3	4

5.2 Определение закона распределения результатов измерений

Для определения закона распределения случайной величины необходимо, прежде всего, отнесение ее либо к дискретной, либо к непрерывной.

Большинство измеряемых величин мы считаем непрерывными. В ряде случаев это связано с недостаточной чувствительностью имеющихся СИ, которые не дают возможности проводить измерения путем счета отдельных частиц.

Также следует заметить, что граница между дискретными и непрерывными величинами далеко не так определена, как это может показаться на первый взгляд. Например, некоторое количество воды, определяемое счетчиком расхода, может рассматриваться как величина непрерывная. Но вода состоит из отдельных молекул, и количество ее может отличаться одно от другого только на целое число молекул, т.е., если бы мы могли считать молекулы, количество воды нужно было бы рассматривать как прерывистую (дискретную) величину.

Случайная величина X может быть полностью охарактеризована с вероятностной точки зрения, если имеется возможность вычислить вероятность появления каждого ее значения. Этим устанавливается закон распределения случайной величины.

Дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей, но это неприемлемо для непрерывных случайных величин [6, 23], т.к. невозможно составить перечень всех возможных значений X , которые сплошь заполняют некоторый интервал (a, b) . С этой целью вводится универсальный способ задания любых типов случайных величин в виде функции распределения вероятностей.

Функцией распределения случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания (измерения) примет значение, меньшее x , т.е.:

$$F(x) = P(X < x). \quad (5.10)$$

Иногда вместо термина “функция распределения” используют термин “интегральная функция”.

Можно дать более точное (с учетом рассмотренного понятия о $F(x)$) определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной [23].

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ - первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \quad (5.11)$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Для описания распределения вероятности дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

В математической статистике (в том числе и метрологической практике) для описания статистического распределения частот количественного признака X пользуются эмпирической функцией распределения. Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $\hat{F}(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$, т.е.

$$\hat{F}(x) = \frac{n_x}{n}, \quad (5.12)$$

где n_x – число вариантов, меньших x ;
 n – объем выборки.

Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ генеральной совокупности определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая $\hat{F}(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Можно сказать, что эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Для наглядности используют графическое представление статистического распределения в виде полигона, гистограммы и многоугольника распределения. Напомним, что полигон представляет собой ломаную кривую, соединяющую середины верхних оснований каждого столбца гистограммы. Он более наглядно, чем гистограмма, отражает форму кривой распределения для непрерывной случайной величины. Полигон частот может быть использован и для дискретной случайной величины. В этом случае он представляет собой ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$, т. е. показывают соответствие между наблюдаемыми значениями (результатами наблюдений) и соответствующими им частотами появления n_i .

Статистическое распределение, представленное многоугольником распределения или гистограммой имеет дифференциальную форму.

В качестве функции плотности распределения вероятностей погрешности измерений или ее составляющих следует принимать закон, близкий к нормальному усеченному, при соблюдении следующего условия: имеются основания полагать, что реальная (статистическая) функция плотности распределения — функция симметричная, одномодальная, отличная от нуля на конечном интервале значений аргумента, и другая информация о плотности распределения отсутствует согласно МИ 1317-86 /18/.

В тех случаях, когда нет основания полагать, что указанное выше условие выполняется, следует принимать какую-либо другую аппроксимацию функции плотности распределения вероятностей погрешности измерений.

Принятая аппроксимация считается удовлетворительной при следующих условиях:

а) она позволяет рассчитывать интервальные характеристики погрешности измерений по ее средним квадратическим отклонениям;

б) возможные значения погрешности расчета, обусловленные отличием принятой аппроксимации от реальной функции плотности распределения, лежат в пределах, допустимых для решения данной конечной задачи (цепи) измерений /18/.

При отсутствии сведений о подходящей аппроксимации функции плотности распределения вероятностей погрешности измерений, не могут быть рассчитаны интервальные характеристики погрешности измерений и погрешности испытаний, а также показатели достоверности контроля параметров образцов продукции.

Расчет характеристик погрешности измерений, при известных типах средств измерений, должен быть основан на использовании метрологических характеристик средств измерений, нормированных по ГОСТ 8.009-84.

Наряду с указанными в /18/, можно пользоваться и такими характеристиками погрешностей измерений, которые являются функциями характеристик, представленных во втором разделе пособия и в /3/.

В курсовой работе для графического представления экспериментальных данных необходимо, прежде всего, для каждой группы наблюдений (если измерения неравноточные) разбиение их на интервалы. Методика статистической оценки интервальных рядов представлена в разделе 5.1.

Рассмотрим пример определения статистических (эмпирических) функций распределения, выполненный по результатам наблюдений.

На ряде образцов ($n = 50$) был измерен момент (в килограммометрах). Результаты (после исключения грубых и систематических погрешностей, упорядочения и разбиения выборки на интервалы) представлены таблицей 5.3.

Таблица 5.3 – Промежуточные значения интервального ряда

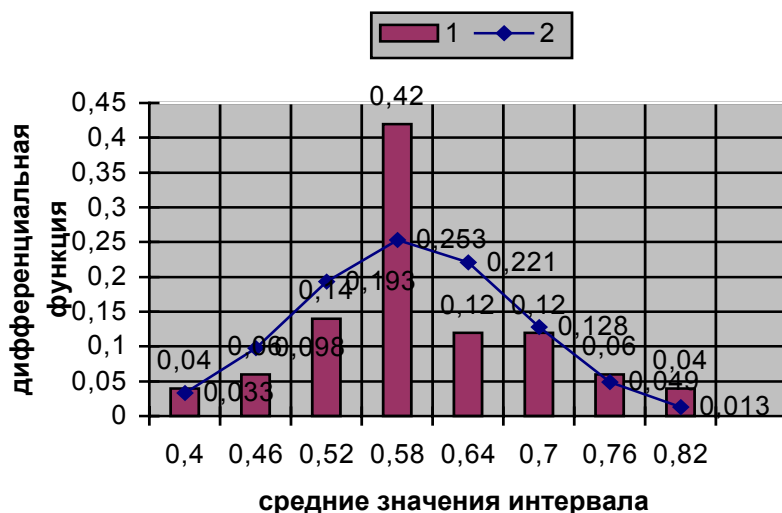
Границы интервалов $x_i - x_{i+1}$	Середины интервалов x_{io}	Частота попадания в интервалы m_i	Статистическая вероятность (частость) $\hat{p}_i$
1	2	3	4
0,37 - 0,43	0,4	2	0,04
0,43 - 0,49	0,46	3	0,06
0,49 - 0,55	0,52	7	0,14
0,55 - 0,61	0,58	21	0,42
0,61 - 0,67	0,64	6	0,12
0,67 - 0,73	0,70	6	0,12
0,73 - 0,79	0,76	3	0,06
0,79 - 0,85	0,82	2	0,04
Σ		50	1,00

Представим заданный статистический ряд в виде гистограммы, показанной на рисунке 5.1.

По виду гистограммы, имеющей колокообразную форму, предполагаем, что закон распределения результатов наблюдений в ряде образцов при измерении – нормальный.

По формулам, приведенным ранее, определяем среднеарифметическое и среднеквадратическое отклонения, они равны:

$$\bar{X} = 0,59 \text{ кгм}; \bar{S} = 0,094 \text{ кгм}$$



1 – гистограмма (по результатам наблюдений); 2 – теоретическая функция
Рисунок 5.1 – Гистограмма результатов измерений

Вычислим дифференциальную функцию распределения $f(x)$ для середин интервалов. Для этого вычислим значение нормированного аргумента по формуле для каждого интервала:

$$t_i = \frac{(x_{io} - \bar{X})}{S}. \quad (5.13)$$

А затем, пользуясь статистической таблицей (Приложение Г), определим дифференциальную функцию $f(t_i)$.

Используя свойство нормального распределения $f(x) = \frac{1}{S \cdot f(t)}$, находим значения дифференциальной функции в выбранных единицах. В случае использования интервалов применяют зависимость

$$f(x) = \frac{h}{\sigma \cdot f(t)}, \quad (5.14)$$

где h – ширина интервала, в нашем случае она равна 0,06.

Окончательно все вычисления сведем в таблицу 5.4.

Для построения статистической функции распределения можно воспользоваться формулой для дополнительных вычислений

$$F_{i+1}(x_i) = \hat{p}_i + \bar{F}_i(x_i). \quad (5.15)$$

$$\hat{F}_1(x_0) = 0;$$

$$\hat{F}_2(x_1) = \hat{p}_1 + \bar{F}_1(x_0) = 0 + 0,04 = 0,04$$

Таблица 5.4 – Вероятностные параметры распределений

Середины интервалов	$t_i = \frac{x_{io} - \bar{X}}{S}$	$f(t_i)$	$\frac{h}{S} \cdot f(t_i)$	$F(x) = F(t)$	$\hat{F}(x)$
0,40	-2,02	0,052	0,033	0,022	0,04
0,46	-1,38	0,154	0,098	0,084	0,10
0,52	-0,74	0,303	0,193	0,230	0,24
0,58	-0,11	0,396	0,253	0,456	0,66
0,68	+0,53	0,347	0,221	0,702	0,78
0,70	+1,17	0,201	0,128	0,879	0,90
0,76	+1,81	0,049	0,049	0,965	0,96
0,82	+2,45	0,020	0,013	0,993	1,00

по аналогии определяем:

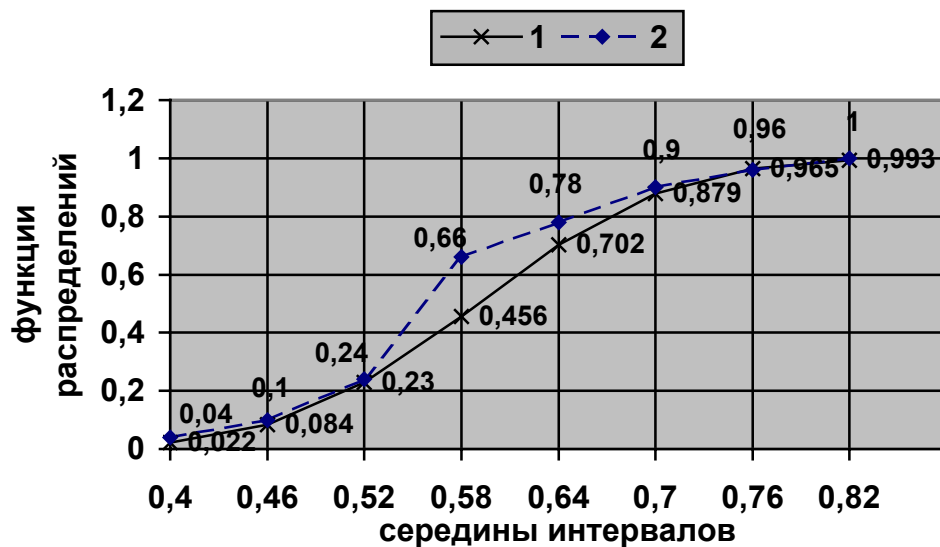
$$\hat{F}_3(x_2) = 0,04 + 0,06 = 0,10 \quad \hat{F}_4(x_3) = 0,10 + 0,14 = 0,24$$

$$\hat{F}_5(x_4) = 0,24 + 0,42 = 0,66 \quad \hat{F}_6(x_5) = 0,66 + 0,12 = 0,78$$

$$\hat{F}_7(x_6) = 0,78 + 0,12 = 0,90 \quad \hat{F}_8(x_7) = 0,90 + 0,06 = 0,96$$

$$\hat{F}_9(x_8) = 0,96 + 0,04 = 1,00$$

Для построения теоретической функции $F(x_i)$ воспользуемся Приложением В. В таблице 5.4 значения функции $F(x_i)$ представлены после округления до тысячных. Графики экспериментальной и теоретической функции интегрального вида показаны на рисунке 5.2.



1 – теоретическая; 2 – эмпирическая

Рисунок 5.2 – Кривые интегральной функции распределений

По виду статистических кривых можно также сделать заключение о нормальности распределения экспериментальных данных, хотя для окончательного заключения требуется проверка по критериям согласия (или приближенная идентификация по точечным числовым характеристикам) (раздел 7).

Окончательно результаты по определению вероятностных характеристик отдельных групп наблюдений следует оформлять в виде таблицы по форме, представленной в таблице 5.5.

После обработки всех групп наблюдений, если измерения неравноточные, полученные значения точечных оценок числовых характеристик вариационного ряда следует свести в таблицу следующей формы, показанной в таблице 5.6.

Таблица 5.5 – Параметры функций распределений i -ой группы наблюдений

Границы интервалов $x_i - x_{i+1}$	Середина интервала x_{io}	Нормированный параметр t_i	Диф. функция нормирован. нормал. распределения $f(t_i)$	Диф. функция в единицах выбранной величины $p(x_i)$	Эмпирическая диф. функция $\hat{p}_i$	Эмпирическая интегральная функция $\hat{F}(x)$	Нормированная интегральная функция $F(x) = F(t)$
1	2	3	4	5	6	7	8

Таблица 5.6 – Результаты измерений в группах наблюдений

Группа наблюдений	Объем выборки	Координата центра распределения	СКО наблюдений
1	2	3	4

6 Статистическая обработка результатов наблюдений при неравноточных измерениях

Напомним, что по степени точности измерения делятся на равноточные и неравноточные. Если в процессе проведения измерительного эксперимента могли использоваться различные оборудование (средства измерений, испытаний, контроля и др.), измерения выполняли различные операторы, имела место калибровка оборудования, изменялись параметры окружающей среды (температура, влажность, загрязнение воздуха и т.д.), а также измерения выполнялись в разное время (большой интервал времени между измерениями) необходимо убедиться, что измерения являются равноточными.

Другими словами, если отсутствуют сведения о равноточности измерений, то необходимо всю представленную совокупность наблюдений разбить на группы (серии), в пределах которых они являются равноточными.

Поскольку совместная обработка результатов серий возможна при условии, что их значения однородны, что оценивается с использованием методов математической статистики. Определение “однородные” в статистике означает “являющиеся оценкой одного и того же параметра”. Группы наблюдений при измерениях (серии) называются однородными, если состоят из значений, подчиняющихся одному и тому же закону распределения вероятности. В противном случае серии считаются неоднородными. Проверка однородности является обязательной при выборе способа совместной обработки результатов нескольких серий измерений. При такой проверке сравниваются между собой средние арифметические значения серии, дисперсии и рассчитывается доверительный интервал оценок среднеквадратичного отклонения.

6.1 Обработка результатов отдельных групп наблюдений

Группы равноточных наблюдений обрабатываются в последовательности, приведённой в разделах 2-5.

6.2 Проверка гипотезы о неравноточности результатов наблюдений

Ряды результатов наблюдений $\bar{X}_j$ принимаются неравнорассеянными (неравноточными), если их центры распределений $\bar{X}_{jц.р.}$ являются оценками одного и того же значения измеряемой величины, а оценки их дисперсий $S_{\bar{x}_j}^2$ незначительно отличаются друг от друга.

Правомочность принятия решения о принадлежности рядов к неравноточным проверяется с помощью дисперсионного анализа. При этом определяемые центры распределений $\bar{X}_{jц.р.}$, СКО $S_{\bar{x}_j}^2$, являющиеся оценками числовых характеристик распределений отдельных рядов, имеют

различия, которые называются случайными факторами. К такого рода случайным влияющим факторам, по которым производится объединение результатов наблюдений по группам (сериям), относятся, как указано ранее, внешние условия (температура, давление, влажность и т. д.), временная последовательность проведения измерений и т. п.

В метрологической практике необходимость сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, самих методов измерений и т. д. Очевидно, предпочтительнее тот прибор и метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, т. е. наименьшую дисперсию.

Поскольку на измерительную процедуру действует большое количество факторов, обуславливающих появление как положительных, так и отрицательных отклонений (погрешностей), то примем в качестве закона распределения результатов наблюдений нормальный. Тогда, как известно /23/, центром распределения закона будет выборочное среднее арифметическое значение полученных результатов.

6.2.1 Анализ однородности средних арифметических значений

Если средние арифметические $\bar{X}_{j\mu.p.}$ рядов значительно отличаются друг от друга, то это указывает на появление при измерениях в одном из рядов доминирующего фактора или группы факторов, смещающих центр распределения, т. е. появление систематической погрешности.

Для сравнения проводят две серии опытов при оптимальных для каждого процесса условиях и по полученным результатам рассчитывают среднее арифметическое в каждой серии $\bar{X}_I$ и $\bar{X}_{II}$ по известной формуле.

Гипотеза о равенстве математических ожиданий двух рядов наблюдений или допустимом различии их оценок проверяется с помощью критерия Стьюдента.

Для этого дисперсии $S^2_{(\bar{x}_I)}$ и $S^2_{(\bar{x}_{II})}$ должны быть однородными, что проверяется по критерию Кочрена или Фишера (методика проверки приведена далее). Затем рассчитывают среднюю квадратичную погрешность для разности двух средних значений из n_I и n_{II} измерений:

$$\bar{S}^2 = S^2_{\bar{X}_I - \bar{X}_{II}} = \frac{S^2_{Ik_I} + S^2_{IIk_{II}}}{k_I + k_{II}}; \quad (6.1)$$

с числом степеней свободы:

$$k = k_I + k_{II} = n_I + n_{II} - 2. \quad (6.2)$$

Разность $\bar{X}_I - \bar{X}_{II}$ является случайной величиной и при обычно имеющемся малом числе измерений следует t -распределению. Для сравнения двух средних арифметических используют критерий Стьюдента:

$$t_p = \frac{|\bar{X}_I - \bar{X}_{II}|}{\sqrt{\bar{S}^2 \cdot \frac{n_I \cdot n_{II}}{n_I + n_{II}}}}. \quad (6.3)$$

По таблице 3.2 (раздел 3), в зависимости от принятой доверительной вероятности P (уровня значимости q) и числа степеней свободы $k = n_I + n_{II} - 2$ находят $t(P, k)$.

Если наблюдаемое значение критерия Стьюдента оказалось не больше критического, то нет основания отвергнуть выдвинутую ранее гипотезу о допустимом различии оценок средних арифметических.

Другими словами: если $t_p \leq t(P, q)$, то $\bar{X}_I = \bar{X}_{II} = \bar{X}$, т. е. средние однородны.

Если $t_p \geq t(P, q)$, то различие между средними признается значимым, то есть об измерениях говорят, что они не сходятся или не воспроизводятся.

6.2.2 Проверка однородности дисперсий

Если число наблюдений в сериях одинаково, то однородность оценок дисперсий можно проанализировать при помощи критерия Кочрена G (использование этого критерия предпочтительнее, т. к. его распределение найдено точно). Нулевая гипотеза, состоящая в том, что дисперсии нормально распределенных совокупностей равны между собой, подтверждаются, если наблюдаемое значение критерия меньше критической точки /23/, т. е.:

$$G < G_{кр}.$$

В этом случае вычисляют отношение максимальной оценки дисперсии к сумме оценок всех дисперсий

$$G = \frac{[S_{(x)}^2]}{\sum_{i=1}^n S_{(x_i)}^2} \quad (6.4)$$

и сравнивают это отношение с критическим значением критерия Кочрена $G_{кр}$.

Следует подчеркнуть, что речь идет об исправленных дисперсиях, т. е. вычисленных после исключения грубых и систематических погрешностей.

Распределение случайной величины G зависит только от числа степеней свободы k и количества выборок l .

Если $G < G_{кр}$, то оценки однородны. $G_{кр}$ находят по таблице Приложения И в зависимости от числа степеней свободы k числителя числа сравниваемых дисперсий N (количество выборки l) и принятого уровня значимости q .

Если число повторений (число наблюдений) в сериях различно, однородность дисперсий можно проанализировать с помощью критерия Фишера-Снедекора F_T .

Для этого из всех N оценок дисперсий выбирают две – максимальную и минимальную. Если окажется, что различие между ними незначимо, то тем более незначимо и различие между остальными дисперсиями. С этой целью вычисляют отношение:

$$F = \frac{[S^2(X)]_{\max}}{[S^2(X)]_{\min}}. \quad (6.5)$$

Если $F < F_T$, то все оценки дисперсий однородны. Значение F_T дано в таблице Приложения Д в зависимости от принятого уровня значимости $\alpha(q)$ и числа степеней свободы k_I и k_{II} соответственно для $[S^2_{(x)}]_{\max}$ и $[S^2_{(x)}]_{\min}$.

Недостаток этого метода состоит в том, что информация, которую содержат остальные дисперсии, кроме наименьшей и наибольшей, не учитывается. Хотя в /2, 3/ описано использование критерия для любых двух серий измерений.

Гипотеза в этом случае принимается, если выполняется условие:

$$\frac{S_I^2}{S_{II}^2} \leq F_{\frac{q}{2}}, k_I, k_{II}, \quad (6.6)$$

где $S_I > S_{II}$; $F_{q/2}, k_I, k_{II}$ - квантиль распределения Фишера при уровне значимости $\frac{q}{2}$ и числе степеней свободы $k_I = n_I - 1$, $k_{II} = n_{II} - 1$ (n_I, n_{II} - объемы выборки).

Уровень значимости рекомендуется назначать в диапазоне $q = 0,01 \dots 0,1$.

Если дисперсии $S_{\bar{x}_i}^2$ двух рядов наблюдений значимо отличаются друг от друга, то степень доверия к результатам измерений различны. Степень доверия выражается весом P_j . Веса могут устанавливаться субъективно на основании мнения экспериментатора или объективно – по числу наблюдений в рядах, чувствительности средств или методов измерений. Например, при

сравнении результатов измерений рядов, содержащих число наблюдений n_j , результату каждого ряда присваивается вес согласно формуле:

$$P_j = \frac{n_j}{c}, \quad (6.7)$$

где c – постоянная величина.

Анализ формулы показывает, что большую степень доверия имеет результат ряда с большим объёмом выборки.

На основании теории вероятности и математической статистики критерием веса наблюдений является величина, обратная дисперсиям распределений или их оценкам /2/:

$$P_j = \frac{c}{S_{\bar{x}_i}^2}. \quad (6.8)$$

Обычно числитель в формуле (6.8) выбирается таким, чтобы частное от деления было небольшим и удобным для последующих расчетов.

6.2.3 Определение доверительного интервала оценок среднеквадратичного отклонения

Изменчивость результатов измерений характеризует коэффициент вариации, который определяется по следующей формуле:

$$K_B = \frac{S(X)}{\bar{X}}. \quad (6.9)$$

Чем выше k_B , тем больше изменчивость измерений относительно средних значений. Коэффициент вариации оценивает разброс при оценке нескольких выборок и используется для сравнения точности той или иной серии (группы) измерений.

Для получения возможно более точной оценки дисперсии нужно провести опыт с возможно большим числом наблюдений.

При конечном числе степеней свободы полученная оценка дисперсий является смещенной и доверительный интервал оценки не будет симметричен относительно нее:

$$S^2(X_I) \cdot Z_I^2 < \sigma < S^2(X) \cdot Z_{II}^2, \quad (6.10)$$

где σ – истинное значение среднеквадратичного отклонения;

Z_I^2, Z_{II}^2 – коэффициенты из таблицы Приложения Е в зависимости от уровня значимости q и числа степеней свободы k при оценке дисперсии $S^2(x_i)$; $Z_I > Z_{II}$.

Рассмотрим пример:

Упек одного и того же вида хлеба при выпечке в разных печах колеблется. Требуется оценить зависимость величины упека от конструкции печи, если получены следующие результаты:

для туннельной печи – 6,0; 6,2; 6,4; 5,9; 6,5; ($n_I = 5$);

для тупиковой печи – 10,0; 9,7; 10,2; 9,6; 10,1; 9,9; ($n_{II} = 5$).

Необходимо рассчитать среднее значение упеков, оценку дисперсий единичных результатов, стандартное отклонение отдельного результата и среднего результата, проверить значимое различие средних арифметических.

При взвешивании применялись рычажные настольные циферблатные весы типа РН – 10Ц13У. Погрешность, которых в интервале взвешивания: от 100 до 2500 г – не более $\pm 1,0$ деления; цена деления шкалы 5 г. Поскольку упек хлеба – величина относительная и уменьшение массы хлеба при взвешивании определялось на одних и тех же весах, то систематическая составляющая инструментальной погрешности была исключена. В противном случае (при взвешивании на разных экземплярах СИ) предельная систематическая погрешность составила бы $\pm$ цена деления, т. е. ± 5 г. В этом случае потребовались весы более высокого класса точности и внесение в результат измерения поправки на систематическую составляющую погрешности.

Для расчета оценки дисперсии величины упека в туннельной печи промежуточные результаты удобно представить в виде таблицы 6.1.

Таблица 6.1 – Промежуточные результаты упека в туннельной печи

x_{II}	$ x_{II} - \bar{X}_I $	$(x_{II} - \bar{X}_I)^2$
6,0	0,2	0,04
6,2	0	0
6,4	0,2	0,04
5,9	0,3	0,09
6,5	0,3	0,09
Итого	-	0,26

Значение среднего результата в первой серии рассчитывается по формуле (2.4) и составляет:

$$\bar{X}_I = \frac{6,0 + 6,2 + 6,4 + 5,9 + 6,5}{5} = 6,2.$$

Значение дисперсии для первой серии (формула (2.18)) составит:

$$S_{I(x_i)} = \sqrt{\frac{0,26}{5-1}} = 0,25.$$

Значение дисперсии среднего результата (формула (2.21)) составит:

$$S_I(\bar{X}) = \frac{0,25}{\sqrt{5}} = 0,11.$$

Для тупиковой печи промежуточные результаты упека хлеба представлены в таблице 6.2

Таблица 6.2 – Промежуточные результаты упека хлеба для тупиковой печи

x_{IIi}	$ x_{IIi} - \bar{X}_{II} $	$(x_{IIi} - \bar{X}_{II})^2$
10,0	0,1	0,01
9,7	0,2	0,04

Продолжение таблицы 6.2

1	2	3
10,2	0,3	0,09
9,6	0,3	0,09
10,1	0,2	0,04
9,9	0	0
Итого	-	0,27

По формулам (2.4), (2.18), (2.21) для второй серии определяем:

$$\bar{X}_{II} = \frac{10,0 + 9,7 + 10,2 + 9,6 + 10,1 + 9,9}{6} = 9,9;$$

$$S_{II}(x_i) = \sqrt{\frac{0,27}{6-1}} = 0,23;$$

$$S_{II}(\bar{X}) = \frac{0,23}{\sqrt{6}} = 0,11.$$

Так как число повторностей различно, однородность дисперсий проверяется с помощью критерия Фишера по формуле (6.5):

$$F = \frac{0,25}{0,23} = 1,085.$$

Табличное значение критерия Фишера находим по таблице в Приложении Д в зависимости от $q(\alpha)$ и числа степеней свободы $k_I = 5 - 1 = 4$, $k_{II} = 5 - 1 = 5$. Оно (после округления до десятых) равно:

$$F_{табл} = 6,3;$$

$$1,085 < 6,3,$$

т. е. все оценки дисперсий однородны, незначимо различны между собой.

Доверительный интервал оценок СКО определяется по формуле (6.10). Из таблицы в Приложении Е находим коэффициенты в зависимости от $q(\alpha)$ и числа степеней свободы при оценке дисперсий: $Z_{I1} = 0,359$; $Z_{I2} = 8,26$; $Z_{II1} = 0,390$; $Z_{II2} = 6,02$.

Доверительный интервал СКО для упека в туннельной печи

$$0,359 \cdot 0,25 < \sigma_I^2 < 8,26 \cdot 0,25;$$

$$0,0897 < \sigma_{II}^2 < 2,065.$$

Доверительный интервал СКО для упека в тупиковой печи

$$0,390 \cdot 0,23 < \sigma_I^2 < 6,02 \cdot 0,23;$$

$$0,0897 < \sigma_{II}^2 < 1,3846.$$

Для определения грубых погрешностей в предполагаемых промахх x_{inod} от среднего результата $\bar{X}$ используется формула:

$$\nu_n = |x_{inod} - \bar{X}| < Z(P, n) \cdot S(x),$$

где $Z(P, n)$ – нормированное выборочное отклонение нормального распределения.

По числу наблюдений (n) и принятому $P(x)$ находят по таблице 6.3 величину $Z(P, n)$.

Если $\nu_n < Z(P, n) \cdot S(x)$, то наблюдение не является промахом.

Если $\nu_n \geq Z(P, n) \cdot S(x)$, то результат классифицируется как промах, подлежит исключению.

Таблица 6.3 – Значения нормированного выборочного отклонения нормального распределения $Z(P, n)$, в зависимости от числа наблюдений n

Число наблюдений n	Значения $Z(P, n)$ при $P(x = 0,95)$
3	1,414
4	1,710
5	1,917
6	2,067
7	1,182
8	2,273
9	2,349
10	2,414
12	2,519
14	2,602
16	2,670

В нашем случае:

$$Z_I(P, n) \cdot S_I(X) = 1,917 \cdot 0,25 = 0,479;$$

$$Z_{II}(P, n) \cdot S_{II}(X) = 2,067 \cdot 0,23 = 0,475.$$

Все отклонения подозрительных результатов от среднего $|x_i - \bar{X}|$ меньше полученных значений, то есть грубых погрешностей нет.

Доверительный интервал случайной погрешности определяется по формуле (9.2):

$$\epsilon_I(P) = 2,78 \cdot 0,25 = 0,695;$$

$$\epsilon_{II}(P) = 2,57 \cdot 0,23 = 0,591,$$

где 2,78 и 2,57 значения критерия Стьюдента для первой и второй серии экспериментов соответственно (принимаются из таблицы зависимости от $P(X)$ и n).

$$5,505 < X_I < 6,895;$$

для среднего результата

$$\epsilon_I(\bar{X}) = 2,78 \cdot 0,11 = 0,3;$$

$$\epsilon_{II}(\bar{X}) = 2,57 \cdot 0,09 = 0,23;$$

$$5,894 < \bar{X}_I < 6,506.$$

Запись результата для первой серии (туннельная печь):

$$\bar{X}_I \pm \epsilon_I (\bar{X}) = 6,2 \pm 0,3.$$

Аналогично для тупиковой печи результат $9,9 \pm 0,2$.

Анализ однородности средних, то есть определение значимости средних проводится по формулам (6.1), (6.2), так как дисперсии однородны

$$S_2 = \frac{0,25 \cdot 4 + 0,23 \cdot 5}{4 + 5} = \frac{1 + 1,15}{9} = 0,24.$$

По формуле (6.3) определяется критерий Стьюдента:

$$t_p = \frac{6,2 - 9,9}{0,24 \cdot \frac{4 \cdot 5}{9}} = \frac{3,7}{0,73} = 5,068.$$

Табличное значение критерия Стьюдента при $k = k_I + k_{II} - 2$ составляет 2,26 (найден из таблицы 3.2 после экстраполяции).

$$5,068 > 2,26.$$

Отсюда делается вывод, что средние неоднородны и, следовательно, конструкция печи влияет на величину упека.

Значения выборочного среднего $\bar{X}$ и среднего квадратического выборки S может служить информацией для оценки точности работы технологического оборудования рассмотрим пример.

Рассмотрим пример:

Оценить работу тестоделителя, если масса тестовых заготовок при расчетной $g_0 = 1137$ г составила 1125 г, 1130 г, 1140 г, 1150 г, 1127 г.

Промежуточные результаты расчета оформлены в таблицу 6.4.

Таблица 6.4 – Промежуточные результаты

g	Δg_i	$\bar{X} - \Delta g$	$(\bar{X} - \Delta g)^2$
1125	-12	3	9
1130	-7	2	4
1140	3	6	36
1150	13	4	16
1127	10	1	1

Отклонения измеряемых значений от расчетных равны:

$$\Delta g_i = g_i - g_0,$$

где g_i – измеряемое значение массы заготовки;

g_0 – расчетное значение массы заготовки, рассчитанное по формуле:

$$g_0 = (100 + y_I + y_{II}) \cdot \frac{G}{100},$$

где y_I – фактический упек, %

y_{II} – фактическая усушка, %;

G – масса готового остывшего изделия, г.

Среднеарифметическое отклонение массы заготовки рассчитывается по формуле (2.4):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta g}{n} = \frac{12 + 7 + 3 + 13 + 10}{5} = 9,0 \text{ г.},$$

где n – число измерений.

Определение колебаний массы заготовок можно производить по величине среднеквадратичного отклонения выборки по формуле (2.18):

$$S(X) = \sigma = \sqrt{\frac{9 + 4 + 36 + 16 + 1}{5 - 1}} = 4,06 \text{ г.}$$

Точность работы тестоделителя характеризует коэффициент вариации по формуле (6.9):

$$k_B = \frac{4,06}{1137} \cdot 100 = 0,36.$$

При статистической оценке погрешности пользуются правилом трех сигм, на основании которого полагают, что с вероятностью 0,997 случайная погрешность выборки по абсолютной величине не превосходит 3σ . На этом основании наибольшей возможной ошибкой выборки считают $\Delta = 3\sigma = 3 \cdot 4,06 = 12 (\sigma = S(X))$.

Следовательно, максимальная (max) и минимальная (min) масса единичной выборки будут:

$$g_{\min} = 1137 - 12 = 1125 \text{ г.};$$

$$g_{\max} = 1137 + 12 = 1149 \text{ г.}$$

Лишь одно из значений фактических замеров не попадает в этот интервал (1150 г).

Однако правило трех сигм не носит абсолютного утверждения того, что в выборке невозможны отклонения, больше по абсолютному значению 3σ . При принятой вероятности 0,997 они могут встречаться в пределах трех случаев на тысячу замеров.

Так как на практике погрешность работы тестоделителей определяется в процентах к нулевой массе, то указанные предельные отклонения равносильны точности деления.

$$\Delta g = \frac{3\sigma}{g_0} \cdot 100 = \frac{3 \cdot 4}{1137} \cdot 100 = 1,05 \text{ \%}.$$

Фактическая точность деления по произведенным замерам:

$$\Delta_{\min} = \frac{(g_0 - g_{\min})}{g_0} \cdot 100 = \frac{1137 - 1125}{1137} \cdot 100 = 1,05 \text{ \%};$$

$$\Delta_{\max} = \frac{(g_{\max} - g_0)}{g_0} \cdot 100 = \frac{1149 - 1137}{1137} \cdot 100 = 1,05 \text{ \%}.$$

По ОСТ 27-31-78 точность деления тестоделительных машин не должна превышать:

2 % при массе заготовок от 0,4 до 1,8 кг;

3 % для мелкоштучных.

По паспортным данным этот показатель не превышает 2,5 %. Следовательно, тестоделитель обеспечивает требуемую точность деления.

Рассмотрим еще один пример:

Как Вы проверите точность работы дозаторов?

Решим задачу для общего случая. Точность дозирования определяется по контрольным пробам с применением методов математической статистики.

Определяют среднее арифметическое n результатов по формуле (2.4), где:

$$x_i = m_i; \quad \bar{X} = m;$$

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n}.$$

Определяют среднее квадратичное отклонение контрольных проб по формуле (2.18):

$$S(X) = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}{n-1}}.$$

Оценивают случайную погрешность по правилу трех сигм:

$$\Delta = \pm 3\sigma.$$

Точность дозирования оценивается коэффициентом вариации по формуле (6.9):

$$k_B = \frac{\sigma}{\bar{m}} \cdot 100.$$

Относительную погрешность дозирования определяют:

$$\Delta m = \frac{3\sigma}{\bar{m}} \cdot 100.$$

6.3 Определение точечных оценок параметров распределения

Наиболее достоверное значение измеряемой физической величины, называемое средним взвешенным $\bar{X}_{cv}$, находится по формуле:

$$\bar{X}_{cv} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{X}_j \cdot P_j}{\sum_{j=1}^m P_j}, \quad (6.11)$$

где m – число групп (серий) наблюдений;

$\bar{X}_j$ – среднее арифметическое в j -й группе наблюдений;

P_j – вес каждой j -й группы наблюдений.

Значение оценки СКО для каждого ряда наблюдений определяют по формуле:

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m P_j \cdot (x_j - \bar{X}_{св})^2}{m-1}}, \quad (6.12)$$

где m – число групп (серий) наблюдений.

Оценка СКО среднего взвешенного вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{X}_{св}} = \frac{S_p}{\sqrt{\sum_{j=1}^m P_j}} \quad (6.13)$$

или

$$S_{\bar{X}_{св}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^2}}}, \quad (6.14)$$

где $S_{\bar{X}_j}$ – СКО результата наблюдений в отдельной группе (ряду).

Из формулы (6.14) видно, что оценка СКО среднего взвешенного меньше любой оценки СКО рядов. Поэтому при обработке неравноточных рядов точность результатов измерений значительно повышается.

Рассмотрим пример:

При испытаниях центробежного насоса на постоянном режиме работы измерялась частота вращения ротора с помощью индуктивного датчика и магнитоиндукционного тахометра. Предварительной обработкой двух рядов наблюдений, объемами $n_I = n_{II} = 25$, установлено, что распределения не противоречат нормальному. Результаты измерений: $\bar{X}_I = 297,3$ рад/с, $\bar{X}_2 = 296,9$ рад/с; оценки СКО средних: $S_{\bar{X}_I} = 0,6$ рад/с; $S_{\bar{X}_{II}} = 1,2$ рад/с.

Требуется определить наиболее достоверное значение частоты вращения ротора и оценить погрешность при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Прежде чем приступить к совместной обработке рядов наблюдений, необходимо определить значимость различий средних $\bar{X}_j$ и дисперсий $S_{\bar{X}_j}^2$.

Допустимость различия оценок дисперсий проверяем по критерию Фишера.

Вычисляем отношение дисперсий по формуле (6.5):

$$\frac{S_{\bar{X}_{II}}^2}{S_{\bar{X}_I}^2} = \frac{1,2^2}{0,6^2} = 4.$$

По Приложению Д при принятом уровне значимости $q = 0,02$ и числах степеней свободы $k_I = k_{II} = 25 - 1 = 24$ находим квантиль распределения Фишера, она равна:

$$F_{0,01; 24,24} = 2,894;$$

поскольку $\frac{S_{\bar{X}_{II}}^2}{S_{\bar{X}_I}^2} = 4 > F_{0,01; 24,24}$, то при уровне значимости $q = 0,02$ делаем

вывод, что гипотеза о равнозначности рядов наблюдений отвергается.

Допустимость различия средних определяем по критерию Стьюдента: по таблице 3.2 находим квантиль Стьюдента при вероятности $P = 0,95$ и числе степеней свободы $k = n_I + n_{II} - 2 = 48 - 2 = 46$, $t_{0,95} = 1,96$.

Гипотеза о допустимом различии средних $S_{\bar{x}_{II}}^2$ подтверждается, так как:

$$\begin{aligned} & \frac{|\bar{X}_I - \bar{X}_{II}|}{\sqrt{(n_I - 1) \cdot S_{\bar{X}_I}^2 + (n_{II} - 1) \cdot S_{\bar{X}_{II}}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_I \cdot n_{II} \cdot (n_I + n_{II} - 2)}{n_I + n_{II}}} = \\ & = \frac{|297,3 - 296,9|}{\sqrt{(25 - 1) \cdot 0,6^2 + (25 - 1) \cdot 1,2^2}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 25 \cdot (25 + 25 - 2)}{25 + 25}} = 1,49; \end{aligned}$$

$$1,49 < t_{0,95} \approx 1,96.$$

Следовательно, два ряда наблюдений относятся к неравноточным измерениям одной и той же величины, так как оценки дисперсий недопустимо различны, а оценки математических ожиданий выборок имеют допустимое различие.

Обрабатываем результаты неравноточных измерений по вышеизложенным правилам.

Определяем вес каждого результата измерения (примем, $C = S_{\bar{X}_{II}}^2$) по формуле 6.8:

$$P_I = \frac{C}{S_{\bar{X}_j}^2} = \frac{S_{\bar{X}_{II}}^2}{S_{\bar{X}_I}^2} = 4;$$

$$P_{II} = \frac{S_{\bar{X}_{II}}^2}{S_{\bar{X}_{II}}^2} = 1.$$

Вычисляем величину среднего взвешенного по формуле:

$$\bar{X}_{св} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m \bar{X}_j \cdot P_j \right)}{\sum_{j=1}^m P_j};$$

$$\bar{X}_{св} = \frac{297,34 + 396,9 \cdot 1}{4 + 1} = 297,2 \text{ рад/с.}$$

Находим оценку СКО среднего взвешенного:

$$S_{\bar{X}_{св}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^2}};$$

$$S_{\bar{X}_{св}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{0,6^2} + \frac{1}{1,2^2} \right)}} = 0,54 \text{ рад/с.}$$

Доверительная граница погрешности результата измерения (без учета знака) при вероятности $P = 0,95$ будет равна (при $k = 36,2$; $P = 0,95$ по таблице 3.2 находим $t_{0,95} = 2,028$):

$$\Delta = t_{0,95} \cdot S_{\bar{X}_{св}} = 2,028 \cdot 0,54 = 1,095 \approx 1,1 \text{ рад/с,}$$

где число степеней свободы найдено по формуле:

$$k \equiv \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^2} \right)^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j + 1} \cdot \frac{1}{S_{\bar{X}_j}^4}} \right] - 2 = \left[\frac{\left(\frac{1}{0,6^2} + \frac{1}{1,2^2} \right)^2}{\left(\frac{1}{(25+1) \cdot 0,6^4} + \frac{1}{(25+1) \cdot 1,2^4} \right)} \right] - 2 = 36,2.$$

Результат обработки неравноточных рядов наблюдений должен быть представлен в форме:

$$\bar{X}_{св} = 297,2 \text{ рад/с}; \Delta = 1,1 \text{ рад/с}; P = 0,95.$$

Результат принадлежит интервалу:

$$296,1 < \bar{X}_{св} < 298,3$$

7 Определение параметров закона распределения результатов наблюдений по статистическим критериям

7.1 Проверка нормальности распределения по критерию Пирсона

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения производится так же, как проверка гипотезы о параметрах распределения, т. е. при помощи специально подобранной случайной величины – критерия согласия.

Критерий согласия называют /23/ критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Среди наиболее известных критериев следует отметить критерий Пирсона χ^2 , критерий Колмогорова, составной критерий $\bar{d}$, критерий Мизеса – Смирнова ω^2 .

Ограничимся описанием применения критериев Пирсона и составного критерия $\bar{d}$, применяемых в метрологической практике, для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Следует отметить, что критерий Пирсона применяется и для других распределений (в этом состоит его достоинство).

Критерий Пирсона отвечает на вопрос случайно (незначимо) или неслучайно (значимо) расхождение эмпирических и теоретических частот попаданий в заданный интервал. Случайность может быть объяснима либо малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Однако возможно это расхождение неслучайно и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Правда, как и любой другой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы (“генеральная совокупность распределена нормально”) принимается случайная величина, определяемая по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^S \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}, \quad (7.1)$$

где n_i – эмпирические частоты в некоторой выборке (серии результатов измерений);

n'_i – теоретические частоты, вычисленные в предположении нормально-распределенной генеральной совокупности.

Для непрерывной случайной величины (какой может быть результат измерения) проверку принадлежности нормальному распределению по критерию Пирсона проводят, используя формулу:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}, \quad (7.2)$$

где m_i – эмпирическая частота попадания исправленных результатов наблюдений в i -й интервал;

$n \cdot p_i$ – теоретическая (выравнивающая) частота попадания исправленных результатов наблюдений в этот же интервал;

P_i – вероятность попадания X в i -й частичный интервал, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.

Таким образом, выравнивающие частоты непрерывного распределения находят по равенству: $n'_i = n \cdot P_i$.

В частности если основания предположить, что непрерывной случайной величины принадлежат нормально распределенной генеральной совокупности, то выравнивающие частоты могут быть найдены по формуле:

$$n'_i = \frac{n \cdot h}{S} \cdot \varphi(U_i), \quad (7.3)$$

где n – число испытаний (серия наблюдений при измерениях);

h – длина частичного интервала;

S – выборочное среднее квадратическое отклонение (оценка СКО);

$U_i = \frac{(x_i - \bar{X})}{S}$ – (x_i – середина i -го частичного интервала).

Методика представления вариационного ряда интервальным представлена в разделе 5 пособия.

Напомним, что плотность общего нормального распределения $f(x)$ и плотность нормированного распределения $\varphi(U)$ связаны между собой следующей зависимостью:

$$f(x) = \frac{1}{S} \cdot \varphi(U). \quad (7.4)$$

В Приложении Г (таблица Г.1) приведены значения дифференциальной функции нормированного нормального распределения.

Таким образом, вероятность попадания результатов наблюдения в i -ый интервал длиной h приближенно равна произведению длины интервала на значение плотности распределения $f(x)$ в любой точке интервала и, в частности, при $x = x_i$, т. е.:

$$P_i = h \cdot f(x_i) = h \cdot \frac{1}{S} \cdot \varphi(U_i). \quad (7.5)$$

Число степеней свободы находят по равенству:

$$k = S - 1 - r, \quad (7.6)$$

где S – число групп (частичных интервалов выборки);

r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В случае нормального распределения $r = 2$ (математического ожидания и среднее квадратическое отклонение), тогда $k = S - 3$.

При определении меры расхождения Пирсона исходные данные группируются как при построении гистограммы.

Однако, рекомендуется, что бы каждая группа содержала не менее 5-8 частот (вариант); малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя эмпирические частоты.

Найденная мера расхождения сравнивается с табличной, найденной из таблицы Ж.1 Приложения Ж. Для этого задаются уровнем значимости $\alpha(q) = 1 - p$ (рекомендуется выбирать $q = (0,1 - 0,02)$), а число степеней свободы определяют как $k = r - 3$. Гипотеза о принадлежности эмпирического распределения подтверждается, если выполняется условие:

$$\chi^2_{k, \frac{1}{2} \cdot q} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{k, 1 - \frac{1}{2} \cdot q}. \quad (7.7)$$

Следует отметить, односторонний критерий более “жестко” отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, построим правосторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в область в предположении справедливости нулевой гипотезы была в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости q .

$$P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(q; k)] = q.$$

Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_{кр}(q; k)$, а область принятия нулевой гипотезы – неравенством $\chi^2 < \chi^2_{кр}(q; k)$.

Критерий χ^2 основан на группировке данных и не учитывает порядка отклонений частот эмпирического и теоретического распределений.

Поскольку возможны ошибки первого и второго рода, в особенности, если согласование теоретических и эмпирических частот “слишком хорошее”, следует проявлять осторожность в окончательной оценке

принадлежности к нормальному закону распределения. При этом рекомендуется либо повторить измерительную процедуру (если установлена технико - экономическая целесообразность), увеличить число наблюдений, воспользоваться другими критериями, вычислить асимметрию и эксцесс. Некоторые из методов рассматриваются дальше.

7.2 Проверка нормальности распределения по составному критерию $\bar{d}$

При малых объемах выборки $10 \leq n < 50$ для проверки согласия опытного распределения с нормальным применяется составной критерий $\bar{d}$. Составной критерий $\bar{d}$ рекомендован ГОСТ 8.207 – 76 “ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения”. При проверке задаются уровнем значимости $q_I(\alpha_I)$ (для критерия I) и $q_{II}(\alpha_{II})$ (для критерия II). Уровень значимости составного критерия должны удовлетворять условию:

$$q \leq q_I + q_{II} \cdot (\alpha \leq \alpha_I + \alpha_{II}). \quad (7.8)$$

Гипотеза о согласованности опытного распределения с теоретическим нормальным проверяется следующим образом:

1) проверяем выполнение критерия I. Для этого определяется значение $\bar{d}$ по формуле:

$$\bar{d} = \frac{1}{nS^*} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}_{у.р.}|, \quad (7.9)$$

где $S^*(\sigma^*)$ – смещенная оценка СКО результата наблюдений, найденная по формуле:

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{у.р.})^2}. \quad (7.10)$$

Нулевая гипотеза о принадлежности эмпирического распределения нормальному справедлива, если выполняется условие:

$$\bar{d}_{1-\frac{1}{2} \cdot q_I} < \bar{d} < \bar{d}_{\frac{1}{2} \cdot q_I}, \quad (7.11)$$

где $\bar{d}_{1-\frac{1}{2} \cdot q_I}$, $\bar{d}_{\frac{1}{2} \cdot q_I}$ – квантили распределения $\bar{d}$;

2) выполняем проверку по критерию II. Гипотеза о нормальности распределения подтверждается, если не более m разностей $|x_i - \bar{X}_{u.p.}|$ превзошли значения $\frac{Z_{p/2}}{S}$.

Несмещенная оценка СКО результата наблюдений (S) определяется по известной формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{u.p.})^2}. \quad (7.12)$$

Верхняя квантиль интегральной функции нормированного распределения Лапласа $Z_{p/2}$, отвечающая вероятности $\frac{p}{2}$ находится по таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Квантили $Z_{p/2}$ интегральной функции Лапласа

P	0,90	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$Z_{p/2}$	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

Задаются уровнем значимости q_2 и для известного n из таблицы 7.3 находят значения P и m .

Результирующий уровень значимости составного критерия:

$$q \leq q_1 + q_2. \quad (7.13)$$

Если окажется, что хотя бы один из критериев не выполняется, то считают, что распределение исследуемой совокупности результатов измерений не соответствует нормальному закону.

Таблица 7.2 – Квантили распределения статистики d

n	$d_{0,01}$	$d_{0,05}$	$d_{0,10}$	$d_{0,90}$	$d_{0,95}$	$d_{0,99}$
1	2	3	4	5	6	7
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8625	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291

Таблица 7.3 – Значения m и P , соответствующие различным n и q

n	m	P при уровне значимости q , равном		
		0,01	0,02	0,05
1	2	3	4	5
10	1	0,98	0,98	0,96

Продолжение таблицы 7.3

1	2	3	4	5
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,97
23-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

Рассмотрим пример оценки закона распределения с помощью составного критерия $\bar{d}$. Даны результаты многократных измерений ($n = 40$) давления в масляной системе летательного аппарата /5/ которые представлены после предварительной группировки в таблице:

Таблица 7.4 – Результаты измерений давления

Результаты наблюдений, $Па \cdot 10^{-5}$	3,12	3,14	3,15	3,17	3,20	3,21	3,24	3,25	3,28
Частота m_i	1	4	3	9	8	9	4	1	1

Требуется проверить согласие опытного распределения с нормальным с помощью составного критерия $\bar{d}$ при уровне значимости $q_I = q_{II} = 0,02$ ($q \leq q_I + q_{II} = 0,04$).

Вычисляем выборочное среднее арифметическое $\bar{X}$, несмещенную S и смещенную S^* оценки СКО.

$$\bar{X} = 3,191 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$S^* = 0,035 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$S = 0,036 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Проверяем согласие по критерию I. Для этого определяем значение $\bar{d}$ по формуле:

$$\bar{d} = 0,815 \text{ Па.}$$

При $n = 40$; $\frac{1}{2} \cdot q_I = 0,01$ и $1 - \frac{1}{2} \cdot q_I = 0,99$ из таблицы 7.2 находим квантили распределения $\bar{d}$ (после интерполяции):

$$\bar{d}_{0,01} = 0,8731; \bar{d}_{0,99} = 0,7226.$$

Гипотеза о нормальности распределения по критерию I, при выбранном уровне значимости подтверждается, так как:

$$\bar{d}_{0,99} < \bar{d} < \bar{d}_{0,01}$$

или

$$0,7226 < 0,815 < 0,8731.$$

Проверка по критерию II. По таблицам 7.1, 7.3 находим значение $m = 2$; $P = 0,99$; $Z_{p/2} = 2,58$, т. е., находим произведение $Z_{p/2} \cdot S$ и сравниваем его с максимальным отклонением. Гипотеза о нормальности распределения по критерию II справедлива, так как в выборке нет ни одной разницы, превышающей значение:

$$Z_{p/2} \cdot S \cdot |x_{40} - \bar{X}|_{\max} = 0,089 \cdot 10^5 \text{ Па} < Z_{p/2} \cdot S = 0,093 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Таким образом, гипотеза о нормальности закона опытного распределения по обоим критериям подтверждается при принятом уровне значимости $q \leq 0,04$.

7.3 Проверка нормальности распределения по критерию согласия Колмогорова А.Н.

В качестве меры расхождения между эмпирическим и теоретическим законами распределения в критерии Колмогорова А.Н. выбрано максимальное значение D модуля разности между эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ и выбранной теоретической функцией распределения $F(x)$

$$D = \max |F^*(x) - F(x)|. \quad (7.14)$$

При этом Колмогоровым А.Н. доказано, что независимо от вида предполагаемой функции распределения непрерывной случайной

величины X в случае неограниченного увеличения числа независимых измерений n вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda.$$

Стремиться к пределу вероятности $p(\lambda)$, равному

$$p(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2 \cdot k^2 \cdot \lambda^2}. \quad (7.15)$$

При практическом применении критерия согласия Колмогорова А.Н. величина λ , являющаяся критериальным параметром, принимается равной $\lambda = D \cdot \sqrt{n}$. Значение D находится после построения на одном графике эмпирической и теоретической функций изображением этих функций и представляет величину D . Затем по вычисленному значению λ по таблице 7.1 определяется вероятность $p(\lambda)$ как вероятность того, что за счет случайных причин максимальное расхождение между эмпирической и теоретической функциями распределения будет не меньше, чем полученное из результатов измерений. Следовательно, если вероятность $p(\lambda)$ достаточно большая, то гипотезу о соответствии опытного распределения теоретическому следует рассматривать как правдоподобную, не противоречащую опытным данным.

Особенности применения этого критерия согласия рассмотрим на том же примере, которым иллюстрировался порядок использования критерия хи-квадрат.

На рисунке 7.1 на одном графике показаны зависимости теоретической (сплошная линия) и эмпирической (штриховая линия) функций распределения погрешности наведения радиотелескопа в пределах абсолютных погрешностей от -8 до $+8$ угл. с.

Рассмотрение рисунка 7.1 показывает, что при небольшом масштабе трудно определить точку, в которой расхождение между эмпирической и теоретической кривой будет наибольшим (значение D). При крупномасштабном представлении кривых максимальное расхождение оказывается при значении погрешности $\Delta = 0$ угл. с, когда $D = 0,02$. Находим значение критериального параметра

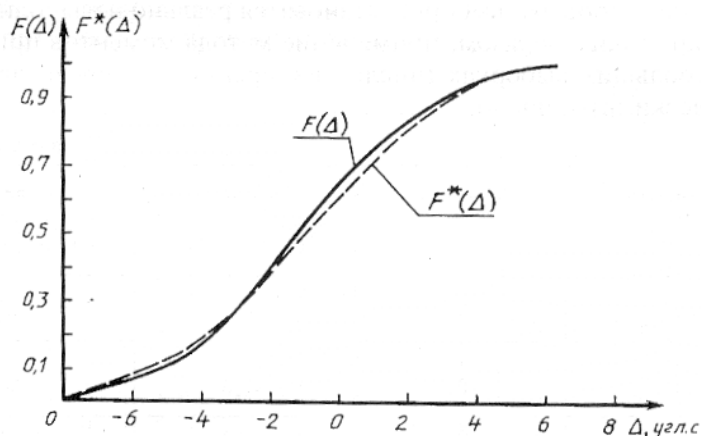


Рисунок 7.1 – Теоретическая и эмпирическая функции погрешности наведения радиотелескопа

$$\lambda = D \cdot \sqrt{n} = 0,02 \cdot \sqrt{500} = 0,447.$$

Произведя необходимую экстраполяцию значений λ между 0,4 и 0,5 (значения взяты из таблицы 7.5), получим вероятность $p(\lambda)$, близкую к 0,98. Это как раз тот случай, когда можно было бы предложить столь превосходное подтверждение выдвинутой гипотезы о нормальном законе распределения погрешностей как свидетельство наличия не случайных причин. Но в данном случае подобный подход не следует делать, поскольку эксперимент привлек весьма обширную информацию (500 результатов измерений).

Таблица 7.5 – Критериальные значения

λ	$p(\lambda)$	λ	$p(\lambda)$	λ	$p(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,2	0,112
0,3	1,000	0,8	0,544	1,3	0,068
0,4	0,997	0,9	0,393	1,4	0,040
0,5	0,964	1,0	0,270		
0,6	0,864	1,1	0,178		

С другой стороны, требуется обсудить результаты расчетов, проведенных с помощью критерия хи-квадрат, когда при тех же условиях вероятность “сходимости” распределений $p = 0,6$ существенно меньше вероятности $p(\lambda) = 0,98$. Все объясняется тем, что как в случае применения критерия хи-квадрат, так и критерия Колмогорова А.Н. мы предполагаем общий вид закона распределения, а числовые параметры этого закона нам неизвестны и определяются на основе полученных при измерениях статистических данных. При применении критерия хи-квадрат это приближение учитывается путем введения некоторого числа независимых

условий (число s), уменьшающего число степеней свободы распределения хи-квадрат, что ведет при данной величине χ^2 к уменьшению вероятности “сходимости” p , как это нетрудно видеть из рассмотрения таблицы значений хи-квадрат (Приложение Ж). В случае критерия Колмогорова А.Н. подобное “ужесточение” отсутствует, и это обстоятельство при прочих равных условиях приводит к завышению значений вероятности $p(\lambda)$. Таким образом, отличаясь простотой применения, критерий Колмогорова А.Н. уступает критерию хи-квадрат по степени доверия к результатам идентификации законов распределения. Это же обстоятельство определенным образом снимает ограничения на имеющееся число измерений в случае использования критерия хи-квадрат. Во многих случаях число измерений, превышающее 30...40, позволяет использовать их результаты для идентификации закона распределения с помощью критерия хи-квадрат.

Кроме рассмотренных критериев согласия, применяются и другие, например, *метод моментов*. Так, ранее говорилось, что каждое распределение случайной величины имеет начальные и центральные моменты высших порядков (третьи, четвертые), характеризующие форму закона распределения: асимметричность, остро- или плосковершинность и т. д. Метод моментов, в частности, использует понятие контрэксцесса, равного корню квадратному отношению СКО в четвертой степени к четвертому унцентральному моменту (μ_4)

$$k_3 = \sqrt{\frac{\sigma_x^4}{\mu_4}}.$$

Найдя по результатам измерений значений S_x^4 и μ_4^* , а также эмпирического значения $k_3^* = \sqrt{\frac{S_x^4}{\mu_4^*}}$, можно сопоставить это значение известным из математической статистики значениям контрэксцесса теоретического закона распределения и, таким образом, идентифицировать форму эмпирического закона.

В таблице 7.6 приведены значения контрэксцесса для некоторых законов распределения.

Однако применение метода моментов требует наличия более обширной информации. Известно, что для надежной оценки первого момента (математического ожидания) требуется выборка $n \geq 30$, для оценки вторых моментов - $n \geq 100$, а при оценке третьих моментов требования к объему выборки становятся реально невыполнимыми ($n = 1000$). Таким образом, применение метода моментов при обычных, небольших выборках (число измерений не превышает 100) практически ограничено.

Таблица 7.6 – Основные критериальные параметры законов распределения

Наименование закона распределения	Асимметрия $S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$	Эксцесс $\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4 - 3}$	Контрэксцесс $k_3 = \sqrt{\frac{\sigma_x^4}{\mu_4}}$
Нормальный	0	0	0,577
Треугольный (Симпсона)	0	-0,6	0,646
Раномерный	0	-1,2	0,745
Арксинусный	0	-1,5	0,816

8 Приближённая идентификация формы и вида закона распределения результатов измерений

При изучении распределений, отличных от нормальных, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс /23/. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю.

В метрологической практике используют эмпирические моменты. Доказано /6, 23/, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответственно начальных и центральных теоретических моментов того же порядка.

Все моменты представляют собой некоторые средние значения, причем если усредняются величины, отсчитываемые от начала координат, то моменты называют начальными, а если – от центра распределения, то центральными. Начальные и центральные моменты r -го порядка определяются соответственно по формулам:

$$a_r[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}^r \cdot p(x) \cdot dx; \quad (8.1)$$

$$\mu_r[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{X} - m_{(x)}) \cdot p(x) \cdot dx. \quad (8.2)$$

При вычислении статических оценок неизвестного параметра – теоретического распределения результатов наблюдений, которые представляют из себя функции от наблюдаемых случайных величин оперируют лишь ограниченными данными (выборкой). Поэтому при вычислении эмпирических моментов усреднение рассматриваемой случайной величины (результата наблюдения) осуществляется через суммирование (арифметическое или геометрическое), а не через операцию интегрирования.

Оценки начального момента первого порядка (математическое ожидание) и центрального момента второго порядка (дисперсии) рассмотрены в разделе 2.

Приближенная оценка (как часть этапа идентификации) формы распределения может осуществляться по сочетанию оценок параметров распределения с использованием критериальных значений характеристик распределения, указанных в таблице 3.1 Приложения 3.

Оценка первого центрального момента определяется по формуле:

$$\mu_1^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{u.p.}). \quad (8.3)$$

При $\mu_1^* = 0$ оценкой центра распределения является среднее арифметическое $\bar{X}$.

Оценка второго центрального момента μ_2 , характеризующий дисперсию D распределения, определяется по формуле:

$$D = S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{y.p.})^2. \quad (8.4)$$

Для оценки дисперсии и СКО по экспериментальным данным (как было показано в разделе 2) используется соотношение для несмещенной дисперсии:

$$D \cong S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{y.p.})^2. \quad (8.5)$$

Оценка третьего центрального момента μ_3 (характеристика момента указывает на асимметрию) характеризует скошенность спадов и определяется по формуле:

$$\mu_3^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{y.p.})^3. \quad (8.6)$$

Распределение считается симметричным, если выполняется условие:

$$|\gamma_\alpha| \leq 1,5 \cdot \sigma_{(\gamma_\alpha)}, \quad (8.7)$$

где γ_α – коэффициент асимметрии;

$\sigma_{(\gamma_\alpha)}^*$ – оценка СКО коэффициента асимметрии, определяемая по формуле:

$$\sigma_{(\gamma_\alpha)}^* = \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}}. \quad (8.8)$$

Коэффициент асимметрии определяется по формуле:

$$\gamma_\alpha = \frac{\mu_3^*}{S^3}. \quad (8.9)$$

Оценка четвертого центрального момента μ_4 (характеризует протяженность спадов) определяют по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\mu_4^*}{S^4} = \frac{1}{n \cdot S^4} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{y.p.})^4. \quad (8.10)$$

Эксцесс закона распределения определяют по формуле:

$$\gamma_a = \frac{1}{n \cdot S^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_{y.p.})^3. \quad (8.11)$$

Коэффициент эксцесса определяется по формуле:

$$\gamma_{\varepsilon} = \varepsilon - 3. \quad (8.12)$$

Величина, обратная эксцессу, называется контрэксцессом, он определяется выражением:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (8.13)$$

Идентификация распределения обязательно включает определение показателя формы α , который является функцией эксцесса и находится по графику, показанному на рисунке 8.1.

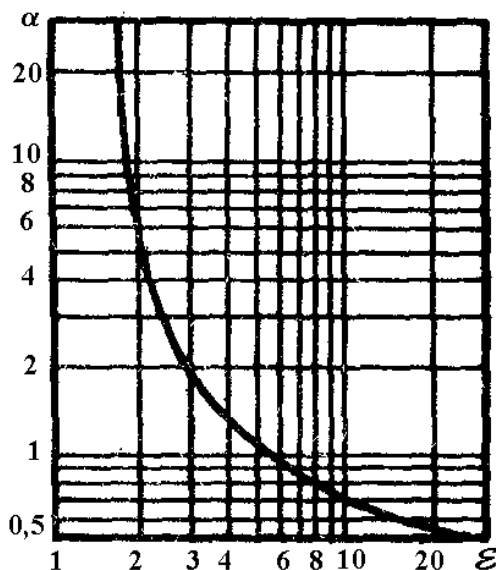


Рисунок 8.1 – Показатель формы α распределения

Информационными характеристиками распределения являются энтропийное значение погрешности, определяемое как

$$\Delta_{\varepsilon} = \frac{h \cdot n}{2} \cdot 10^{-\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k m_i \cdot \lg m_i} \quad (8.14)$$

и энтропийный коэффициент, определяющий форму распределения:

$$k = \frac{\Delta_{\mathcal{S}}}{S}. \quad (8.15)$$

9 Представление результатов измерений

За результат измерений при статистической обработке выборки, состоящей из многократных наблюдений, принимается координата центра распределения при равноточных измерениях; средневзвешенное значение центров распределений в группах - при неравноточных.

В силу конечного объёма выборки, наличия неисключенных составляющих погрешностей и различных законов распределения, результат измерения имеет неопределенность.

Зона неопределенности (доверительные границы) генерального среднего устанавливаются погрешностью результата измерения $\pm \Delta$.

Границы могут быть заданы как симметричными, так и несимметричными, они зависят от выбранной доверительной вероятности. Чаще используются симметричные границы с двухсторонней вероятностью P .

За погрешность результата измерения может быть принято:

- а) только случайная составляющая погрешности;
- б) систематическая составляющая погрешности;
- в) композиция случайной и систематической составляющих погрешностей.

Характеристики погрешности измерений указываются в единицах измеряемой величины (абсолютные) и в процентах (относительные) относительно результатов измерений или истинных значений измеряемой величины.

9.1 Определение доверительных интервалов случайной погрешности

В случае отсутствия в результатах наблюдений систематических погрешностей или при условии, что отношение неисключенной систематической погрешности θ к оценке $S_{\bar{x}}$ СКО результата измерения соответствует условию:

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} < 0,8, \quad (9.1)$$

то за погрешность результата измерения принимается случайная составляющая погрешности:

$$\Delta = \dot{\Delta} = \pm t \cdot S_{\bar{x}}, \quad (9.2)$$

где t – коэффициент, зависящий от объема выборки, вида распределения и доверительной вероятности P . В соответствии с

ГОСТ 8.207-76 рекомендуется устанавливать доверительную вероятность $P = 0,95$.

При выполнении технических измерений, а также при контроле параметров технологического процесса, например, в пищевой и автомобильной промышленности так же принимают доверительную вероятность $P = 0,95$.

При невозможности повторного измерения, доверительную вероятность P допускается принимать равной 0,99. В особых случаях, когда результаты измерения имеют большое значение для здоровья людей, допускается вместо вероятности, равной $P = 0,99$ принимать более высокую доверительную вероятность.

С увеличением доверительной вероятности P квантиль Стьюдента t уменьшается, степень доверия к результату измерения повышается, и поэтому могут быть использованы более узкие границы (задающие интервалы), в которых ожидается появление данного результата.

Существует ряд рекомендаций по выбору коэффициента t /14, 15/:

а) при нормальном законе распределения случайной величины коэффициент t выбирается из таблицы 3.2 квантилей Стьюдента при принятой доверительной вероятности P и числе степеней свободы $k = n - 1$;

б) для распределений вида Лапласа с эксцессом $\varepsilon = 6$, нормального распределения с эксцессом $\varepsilon = 3$, равномерного распределения с эксцессом $\varepsilon = 1,8$, трапецеидального с эксцессом $\varepsilon = 2$ и погрешностью, не превышающей 4 % и при вероятностях $P = 0,9 \div 0,99$ коэффициент определяется по формуле:

$$t = 1,62 \cdot \left[3,8 \cdot (\varepsilon - 1,6)^{2/3} \right]^{\lg \lg [1/(1-P)]}; \quad (9.3)$$

в) для кругловершинных двумодальных распределений с эксцессом $\xi = 1 \div 3$ с доверительной вероятностью $P = 0,8 \div 0,999$ и погрешностью не менее 10 %:

$$t = 1,6 \cdot \left\{ 3,6 \cdot [1 + tg(\varepsilon - 1)] \right\}^{\lg \lg [1/(1-P)]}; \quad (9.4)$$

г) для распределения типа Шапо с эксцессом $\varepsilon = 1,8 \div 6$ с погрешностью до 8 %:

$$t = 1,56 \cdot \left[1,12 + \frac{(\varepsilon - 1,8)^{0,58}}{\sqrt{10}} \right]^{\lg [0,1/(1-P)]}; \quad (9.5)$$

д) для островершинных двумодальных распределений с эксцессом $\varepsilon = 1,8 \div 6$ при $P = 0,9 \div 0,999$ с погрешностью 5 %:

$$t = 1,23 \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{2,5}} \cdot \lg \frac{0,175}{1 - P} \right]; \quad (9.6)$$

е) для законов распределения от Лапласа до равномерного и некоторых двумодальных с погрешностью до 10 %:

$$t_{0,9} = 1,6; \quad t_{0,95} = 1,8. \quad (9.7)$$

9.2 Определение границ неисклученной систематической погрешности результата измерений

Если неисклученные систематические погрешности в 8 и более раз превышают оценки $S_{\bar{x}}$ СКО результата измерения, т. е.:

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} > 8, \quad (9.8)$$

то за погрешность результата измерения принимается систематическая погрешность. Согласно /9/ за неисклученную систематическую погрешность принимают составляющую погрешности результата измерений, обусловленную погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка, на действие которой не введена вследствие ее малости. Неисклученная систематическая погрешность характеризуется ее границами и рассматривается как квазислучайная.

Границы неисклученной систематической погрешности θ при числе слагаемых $N \leq 3$ вычисляют по формуле:

$$\Delta = \theta = \pm \sum_{i=1}^N |\theta_i|. \quad (9.9)$$

При числе неисклученных систематических погрешностей $N \geq 4$ вычисления проводят по формуле:

$$\Delta = \theta = K \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \theta_i^2}, \quad (9.10)$$

где θ_i – граница i -й неисклученной систематической погрешности;

K – коэффициент зависимости отдельных неисклученных систематических погрешностей от выбранной доверительной вероятности P при их равномерном распределении (при $P = 0,99$; $K \approx 1,4$).

Значения коэффициента для других случаев представлены в таблице 9.1.

Неисключенная систематическая погрешность θ рассматривается в данном случае как доверительная квазислучайная погрешность.

Доверительная граница θ_i для i -й составляющей погрешности может быть найдена с учетом значений квантилей t_α равномерного закона распределения, используя принцип геометрического суммирования.

Таблица 9.1 – Коэффициент K систематической погрешности

Доверительная вероятность	Число составляющих погрешностей N					
	2	3	4	5	...	средняя
0,90	0,97	0,95	0,95	0,95	...	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	...	1,11
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	...	1,40

Следует отметить, что границы неисключенной систематической погрешности вычисляются путем построения композиций неисключенных погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими факторами (условия измерения перекалибровка и др.). При суммировании погрешностей по формулам (9.9), (9.10) предполагается их равномерное распределение в установленных границах.

Для некоторых законов распределения квантили t_k представлены в таблице 9.2:

Таблица 9.2 – Квантили законов распределения

Закон распределения	Значение α		
	0,90	0,95	0,99
Нормальный	1,645	1,96	2,576
Равномерный	1,55	1,64	1,71
Треугольный	1,67	1,90	2,20

Если отношение неисключенной систематической составляющей погрешности к оценке $S_{\bar{x}}$ СКО находится в пределах:

$$0,8 \leq \frac{\theta}{S_{\bar{x}}} \leq 8, \quad (9.11)$$

то за погрешность результата измерения без учета знака принимают композицию случайной и систематической составляющих погрешности:

$$\Delta = k \cdot (\dot{\Delta} + \theta), \quad (9.12)$$

где k – коэффициент, зависящий от соотношения $\frac{\theta}{S_{\bar{x}}}$, его значения сведены в таблицу 9.3

Таблица 9.3 – Значение коэффициента K

$\theta/S_{\bar{x}}$	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$k(P=0,95)$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,8	0,81
$k(P=0,99)$	0,87	0,85	0,82	0,8	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

Рассмотрим пример:

Определить при доверительной вероятности $P = 0,95$ границы погрешности результата измерения случайной величины $\bar{X} = 234,2$ мм. Оценка СКО случайной погрешности $S_{\bar{x}} = 2,7$ мм. За неисключенную систематическую погрешность принимается: погрешность первичного преобразователя $\theta_1 = \pm 6,3$ мм, погрешность блока усиления $\theta_1 = \pm 4,5$ мм и погрешность блока индикаций $\theta_1 = \pm 3,6$ мм. Установлено, что случайная погрешность подчиняется равномерному закону распределения с эксцессом $\varepsilon = 1,8$.

Суммируем неисключенные систематические погрешности по формуле (9.9), полагая, что при этом они равномерно распределены в установленных границах $\pm \theta_i$:

$$\Delta = \theta = \pm \sum_{i=1}^3 |\theta_i| = |6,3 + 4,5 + 3,6| = \pm 14,4 \text{ мм}$$

Вычисляем отношение суммарной неисключенной систематической погрешности к оценке СКО:

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} = \frac{14,4}{2,7} = 5,33.$$

Поскольку $0,8 < \frac{\theta}{S_{\bar{x}}} < 8$, то погрешность результата измерения определяем как композицию случайной и систематической составляющей погрешности по формуле (9.12):

$$\Delta = \pm k(\dot{\Delta} + \theta),$$

где $k = 0,745$, при $P = 0,95$ и $\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} = 5,33$.

Находим границу случайной составляющей погрешности результата измерения. Поскольку распределение случайной погрешности равномерное, то принимаем формулы:

$$\dot{\Delta} = \pm t \cdot S_{\bar{x}} = 1,67 \cdot 2,7 = \pm 4,51 \text{ мм},$$

где:

$$t = 1,62 \cdot \left[3,8 \cdot (\xi - 1,6)^{2/3} \right]^{\lg \lg [1/(1-P)]} = 1,62 \cdot \left[3,8 \cdot (1,8 - 1,6)^{2/3} \right]^{\lg \lg [1/(1-0,95)]} \approx 1,67.$$

Тогда доверительная граница погрешности результата измерения:

$$\Delta = \pm k \cdot (\dot{\Delta} + \theta) = \pm 0,745 \cdot (4,51 + 14,4) = \pm 14,09 \text{ мм}.$$

Результат измерения представляем в форме:

$$\bar{X} = 234,2 \text{ мм}; \Delta = \pm 14,1 \text{ мм}; P = P_D = 0,95$$

или

$$(234,2 \pm 14,1) \text{ мм}; P = P_D = 0,95.$$

Как известно, повторение числа измерений всегда сопровождается дополнительными затратами, поэтому выбор необходимого числа измерений должен быть обоснован исходя из требуемой точности (а также по экономическим соображениям).

Рассмотрим это на примере:

Пусть для условий предыдущей задачи, где результаты измерений были повторены и объем выборки составил $n = 16$, требуется определить минимальное число наблюдений, необходимых для уменьшения границы погрешности результата измерения до значения, равного границам неисключенной систематической составляющей. Считать, что оценка СКО $S_{\bar{x}}$ результатов наблюдений от объема выборки меняется незначительно

Случайной составляющей погрешности измерения можно пренебречь при условии, если неисключенные систематические погрешности в восемь и более раз превышают оценки $S_{\bar{x}}$ СКО результата измерения, т. е. выполняется отношение 9:8. В нашем случае предельное значение СКО $S_{\bar{X}_{np.}}$ должно быть равно:

$$S_{\bar{X}_{np.}} = \frac{\theta}{8} = \frac{14,4}{8} = 1,8$$

Вычислим оценку СКО S результатов наблюдений по формуле:

$$S = S_{\bar{X}} \cdot \sqrt{n}; \quad (9.13)$$

$$S = 2,7 \cdot \sqrt{16} = 10,80 \text{ мм}$$

Определим минимальное число наблюдений по формуле:

$$n_{\min} = \left(\frac{S}{S_{\bar{X}_{np.}}} \right)^2; \quad (9.14)$$

$$n_{\min} = \left(\frac{10,80}{1,80} \right)^2 = 36.$$

9.3 Правила округления результатов измерений

Наименьшие разряды числовых значений результатов измерений должны быть такими же, как наименьшие разряды числовых значений среднего квадратического отклонения абсолютной погрешности измерений или значений границ, в которых находится абсолютная погрешность измерений (или статистических оценок этих характеристик погрешности).

Числовое значение результата измерений представляется так, чтобы оно оканчивалось десятичным знаком того же разряда, какой имеет погрешность этого результата, например, $1213 \pm 0,17$.

Числовые значения именованной физической величины и ее погрешности (отклонения) надо записывать с указанием размерности единицы физической величины, например, $(80,550 \pm 0,002) \text{ кг}$.

Значащие цифры числа – это все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней записанной справа цифры. При этом нули в множителе 10 не учитываются.

В приближенном числе различают верные и сомнительные цифры.

Верные цифры приближенного числа определяют по его абсолютной погрешности.

Принято считать:

а) если отличная от нуля первая (слева) цифра абсолютной погрешности равна или меньше 5, то все цифры приближенного числа, расположенные левее, будут верными;

б) если эта цифра абсолютной погрешности больше 5, то верными цифрами приближенного числа будут только те, которые расположены на одну цифру того же разряда, к которому она принадлежит.

Рекомендуется /1/ записывать приближенные числа так, чтобы все цифры были верными и только одна, последняя была сомнительной.

В окончательной записи погрешность измерения принято выражать числом с одним или двумя значащими цифрами.

Две значащие цифры приводят в случае выполнения точных измерений.

Эмпирически были установлены следующие правила округления рассчитанного значения погрешности и полученного результата измерений:

а) погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 и 2, и одной, – если первая цифра равна 3 или более;

б) результат измерения округляется до того же десятичного знака, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерений оканчивается нулями, то нули отбрасываются до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности;

в) если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остающиеся цифры в числе не изменяют. Если эта цифра равна или больше 5, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают. Например, числовое значение результата измерения составляет 25,458 при погрешности результата, выраженной пределами $\pm 0,02$; округление результата будет 25,46. Если пределы погрешности имеют $\pm 0,002$, то числовое значение результата сохраняется полностью. Числовое значение результата измерений 105553 получено с погрешностью $\pm 0,0005 \pm 0,0005$. В нем сохраняются четыре значащие цифры и округление, даст число 105600; если числовое значение результата 105,553, то при тех же условиях округление дает число 105,6. Или еще пример: Число 6783,6 округляют до 6784, число 5499,7 – до 5500, число 12,34501 – до 12,35;

г) если отбрасываемая цифра равна пяти, а следующие за ней цифры неизвестны (отсутствуют) или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная. Число 105,5 при сохранении трех значащих цифр округляют до 106. Еще пример: Число 1234,50 округляют до 1234; число 5465,50 – до 5466; число 43210,500 – до 43210;

д) округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним - двумя лишними знаками (или числом разрядов, которые удастся получить).

Таким образом, при выполнении вычислений может быть оставлена (как было сказано выше) одна сомнительная цифра, а в окончательном результате, в соответствии со стандартом, оставлять в приближенном числе только верные цифры.

Если руководствоваться этими правилами округления, то количество значащих цифр в числовом значении результата измерений дает возможность ориентировочно судить о точности измерения.

Предельная погрешность, обусловленная округлением, равна половине единицы последнего разряда числового значения результата измерения.

9.4 Формы представления результатов измерений

Результат измерений представляется именованным или неименованным числом.

Рассмотрим пример:

100 кВт; 20 °С — именованные числа;

0,44; 2,765 — неименованные числа.

Совместно с результатом измерений должны быть представлены характеристики его погрешности или их статистические оценки. Если результат измерений или определенная группа результатов измерений получены по аттестованной методике выполнения измерений, то их можно сопровождать, вместо характеристик погрешности измерений, ссылкой на документ (аттестат), удостоверяющий характеристики погрешностей, получаемых при использовании данной методики, и условия применимости этой методики.

Если результат измерений получен по такой методике, когда характеристики погрешности измерений оценивались в процессе самих измерений или непосредственно перед ними, он (результат) должен сопровождаться статистическими оценками характеристик погрешности измерений.

Допускается представление результата измерений доверительным интервалом, покрывающим с известной (указываемой) доверительной вероятностью истинное значение измеряемой величины. В этом случае статистические оценки характеристик погрешности измерений отдельно не указываются.

Такая форма представления результатов измерений допускается в случаях, когда характеристики погрешности измерений заранее не установлены и погрешность измерений оценивается в процессе самих измерений или непосредственно перед ними.

Рассмотрим примеры:

Форма записи в техническом задании на разработку методики выполнения измерений расхода жидкости (норма).

Границы, в которых абсолютная погрешность измерений расхода жидкости должна находиться с заданной вероятностью (границы допускаемого интервала) $S_{\bar{x}_j} = \pm 0,2 \text{ м}^3/\text{с}$; $P = 0,95$. Условия, при которых погрешность измерений должна находиться в заданных границах: диапазон значений измеряемого расхода от 10 до 50 $\text{м}^3/\text{с}$, температура жидкости от 15 до 30 °С, кинематическая вязкость жидкости от 1×10^{-6} до $1,5 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Форма записи в аттестате методики выполнения измерений добротности катушки индуктивности (приписанная погрешность).

Наибольшее возможное значение среднего квадратического отклонения случайной составляющей абсолютной погрешности измерений $\sigma_m[\Delta] = 0,08$ наибольшее возможное значение среднего квадратического отклонения неисключенной систематической составляющей абсолютной погрешности измерений $\sigma_m[\Delta_S] = 0,1$. Условия, для которых определены характеристики погрешности измерений: диапазон значений измеряемой добротности от 50 до 80; диапазон частот тока, протекающего через катушку, от 50 до 300 Гц; диапазон температур среды, окружающей катушку и применяемые средства измерений, от 15 до 25 °С; коэффициент нелинейных искажений тока не более 1 %.

При практических записях характеристик погрешностей измерений необязательно каждый раз писать словами название характеристики и условия, которым они соответствуют. Лучше характеристики и условия записывать условными обозначениями, приложив отдельный список обозначений.

При регистрации характеристик погрешности измерений с помощью автоматических устройств рекомендуется обозначать характеристики словами и не пользоваться условными обозначениями.

Статистические оценки характеристик погрешности измерений представляются одной или, при необходимости, несколькими характеристиками из числа рассмотренных выше. Дополнительно могут указываться частотный спектр или скорость изменения измеряемой величины (или частотный спектр, скорость изменения параметров, функционалом которых является измеряемая величина); значения или диапазоны значений существенно влияющих величин, а также, при необходимости, и другие факторы, характеризующие проведенные измерения.

Каждая статистическая оценка характеристики погрешности измерений относится к определенному результату измерения или значению измеряемой величины.

Статистические оценки характеристик погрешности измерений указываются в единицах измеряемой величины (абсолютные) или в процентах от результата измерения (относительные).

Характеристики погрешности измерений и их статистические оценки могут указываться в виде постоянных величин или как функции времени, измеряемой или другой величины в виде формулы, таблицы, графика.

Характеристики погрешности и их статистические оценки выражаются числом, содержащим не более двух значащих цифр. При этом для статистических оценок характеристик третий разряд (неуказываемый младший) округляется в большую сторону. Допускается характеристики погрешности и их статистические оценки выражать числом, содержащим одну значащую цифру. В этом случае для статистических оценок

характеристик число получается округлением в большую сторону, если цифра последующего неукзываемого младшего разряда равна или больше пяти, или в меньшую сторону, если эта цифра меньше пяти.

Характеристики погрешности измерений и условия, для которых они действительны, должны указываться совместно с результатом измерений, к которому они относятся, или совместно с группой результатов измерений, к которым они относятся, или в документе (аттестате), удостоверяющем свойства методики выполнения измерений, по которой получены данные результаты измерений.

9.5 Запись результата измерений при прямых измерениях

При симметричной доверительной погрешности результаты измерений для групп равноточных рядов записывают так:

$$\bar{X}_{ц.р.}(\bar{X}); \pm \Delta; P = P_D; n = \dots$$

или

$$\bar{X}_{ц.р.}(\bar{X}) \pm \Delta; P = P_D,$$

где Δ – границы;

$P = P_D$ – принятая доверительная вероятность;

n – количество наблюдений.

Если измерения неравноточные, то за результат принимают оценку средневзвешанного значения для групп наблюдений и тогда окончательно пишут:

$$\bar{X}_{св} \pm \Delta; P = P_D; m_1 = \dots; m_2 = \dots; n = \dots,$$

где $m_1 = \dots; m_2 = \dots$ – количество наблюдений в i -группе (серии) неравноточных измерений;

$n = \dots$ – общее количество наблюдений.

При несимметрической погрешности измерений результаты представляют в форме:

$$\bar{X}_{ц.р.}(\bar{X}); \Delta(R) \text{ от } \Delta_n \text{ до } \Delta_e; P = P_D; n = \dots,$$

где Δ_n и Δ_e – значения нижней и верхней границ погрешности измерений.

Если отсутствуют данные о функциях распределения составляющих погрешности, то результаты измерений представляют в виде: $\bar{X}$; $S_{\bar{X}}$; n ; θ при доверительной вероятности $P = P_D$.

10 Обработка результатов косвенных измерений

При косвенных измерениях значение искомой физической величины Y находится на основании результатов измерений аргументов (отдельные результаты наблюдений в ряду измерений) $x_1, x_2, \dots, x_m$, связанных с искомой величиной известной функциональной зависимостью:

$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (10.1)$$

Результаты измерений аргументов и оценки их погрешностей могут быть получены из прямых, косвенных, совокупных, совместных измерений или из литературных источников.

Функция F должна быть известна из теоретических предпосылок или установлена экспериментально с погрешностью, которой можно пренебречь.

При оценивании доверительных границ погрешностей результата косвенного измерения обычно принимают вероятность, равную 0,95 или 0,99. Использование других вероятностей должно быть обосновано.

В пособии рассматривается определение результатов косвенных измерений и оценивание их погрешности при условии, что в процессе выполнения измерений параметры объекта не изменяются во времени.

Разработаны методики /19/ определения результатов косвенных измерений и оценки их погрешности:

- 1) при линейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями изменений аргументов;
- 2) при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;
- 3) для коррелированных погрешностей измерений аргументов при наличии рядов отдельных значений измеряемых аргументов.

10.1 Обработка результатов косвенных измерений при линейной зависимости

Для решения задачи косвенных измерений необходимо, чтобы были известны: вид функций, результаты измерений аргументов $x_1, x_2, \dots, x_m$, и оценки их погрешностей.

Условием справедливости нулевой статической гипотезы об отсутствии корреляционной связи между погрешностями результатов измерения i -го и $(i+1)$ -го аргументов является выполнение неравенства для критерия Стьюдента.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-n^2}}, \quad (10.2)$$

где n – число измерений.

Значение t , полученное из (10.2), сопоставляют с табличным значением t_q , которое берут для принятого уровня значимости q и числа степеней свободы $f = n - 2$. При $t > t_q$ подтверждается значимость выборочного коэффициента корреляции.

При условии, что распределение случайных погрешностей результатов измерений аргументов не противоречит нормальному распределению, критерием отсутствия корреляционной связи между погрешностями результатов измерений аргументов является выполнение неравенства.

$$\left| \frac{\bar{r} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}} \right| < t_q, \quad (10.3)$$

где t_q – коэффициент Стьюдента, соответствующий уровню значимости q и числу степеней свободы $f = n - 2$;

$\bar{r}$ – оценка коэффициента корреляции между погрешностями аргументов x_h и x_j , найденная по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{hi} - \bar{X}_h) \cdot (x_{ji} - \bar{X}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{hi} - \bar{X}_h)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \bar{X}_j)^2}}, \quad (10.4)$$

где x_{hi} ; x_{ji} – результаты i -го измерения h -го и j -го аргументов;

$n_j = n_i = n$ – число измерений каждого из аргументов.

Если измеряемая величина зависит от m аргументов, необходимо проверить отсутствие корреляционных связей между погрешностями всех парных сочетаний аргументов.

Если существует линейная зависимость и отсутствует корреляция между погрешностями измерений аргументов, то обработку результатов выполняют в следующей последовательности.

Искомое значение Y связано с m измеряемыми аргументами $x_1, x_2, \dots, x_m$, уравнением:

$$Y = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_m \cdot x_m, \quad (10.5)$$

где $b_1, b_2, \dots, b_m$ – постоянные коэффициенты при аргументах $x_1, x_2, \dots, x_m$, соответственно.

При экспериментальном определении коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_m$ результат измерения величины получается после выполнения 2-х этапов.

На первом этапе оцениваются каждое слагаемое $b_i x_i$ как косвенно измеряемую величину, полученную в результате произведения двух измеряемых величин. На втором этапе находят оценку измеряемой величины Y .

Результат косвенного измерения для известных значений результатов аргументов (т. е. точечные оценки рядов измерений аргументов) $x_1, x_2, \dots, x_m$ равен:

$$\bar{Y} = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_m). \quad (10.6)$$

Или, с учетом зависимости 10.5, результат $\bar{Y}$ вычисляется по формуле:

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^m b_i \cdot \bar{X}_i, \quad (10.7)$$

где $\bar{X}_i$ – результат измерения i -го аргумента (параметра X_i);
 m – число аргументов.

Причем, следует напомнить, что каждый аргумент (в случае многократных измерений) может быть повторен n раз.

Оценка среднего квадратичного отклонения результата косвенного измерения вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)^2 \cdot S_{\bar{X}_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot S_{\bar{X}_i}^2}, \quad (10.8)$$

где $S_{\bar{X}_i}$ – оценка среднего квадратического отклонения измерения аргумента x_i , определяемого по известной формуле.

10.1.1 Представление результатов измерений

Ввиду того, что каждый аргумент может иметь соответствующие доверительные границы неисключенной систематической и случайной погрешностей, то задача определения погрешности косвенного измерения в этих случаях делится на три этапа:

- а) суммирование частных неисключенных систематических погрешностей аргументов;
- б) суммирование частных случайных погрешностей аргументов;
- в) сложение систематической и случайной составляющих погрешности.

Доверительная граница неисключенной систематической погрешности косвенного измерения при условии одинаковой доверительной вероятности

частных погрешностей и их равномерного распределения внутри заданных границ определяется по формуле (без учета знака):

$$\theta_{\bar{y}} = k \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_j}{\partial F} \right)^2 \cdot \Delta_{\bar{x}_j}^2}, \quad (10.9)$$

где $\theta_{\bar{y}}$ – доверительная граница неисключенной систематической погрешности среднего значения $\bar{X}_j$ -го аргумента.

При отсутствии корреляционной связи между аргументами оценка СКО случайной погрешности косвенного измерения вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \cdot S_{x_j}^2}, \quad (10.10)$$

где S_{x_j} – оценка СКО случайной погрешности результата измерения $\bar{X}_j$ -го аргумента.

При нормальном распределении погрешностей косвенного измерения доверительная граница случайной составляющей погрешности вычисляется по формуле:

$$\dot{\Delta} = \pm t_p \cdot S_y, \quad (10.11)$$

где t_p – квантиль Стьюдента при доверительной вероятности P с эффективным числом степеней свободы $k_{\text{эф}}$, определяемом при малых объемах выборки по формуле:

$$k_{\text{эф}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \cdot S_{\bar{x}_j}^2 \right)^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j + 1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^4 \cdot S_{\bar{x}_j}^4} - 2. \quad (10.12)$$

При больших объемах число степеней свободы находится по формуле:

$$k = \frac{m^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j - 1}}. \quad (10.13)$$

Доверительная граница суммарной погрешности результата косвенного измерения определяется по правилам, изложенным выше.

10.2 Обработка результатов косвенных измерений при нелинейной зависимости

Существуют два метода определения точечной оценки результата косвенного измерения и её погрешности: линеаризации и приведения.

10.2.1 Метод линеаризации

Для косвенных измерений при нелинейных зависимостях и некоррелированных погрешностях измерений аргументов используется метод линеаризации.

Метод линеаризации основан на том, что погрешность измерения значительно меньше измеряемой величины, и поэтому вблизи средних значений $\bar{X}_i$ аргументов нелинейная функциональная зависимость линеаризуется и раскладывается в ряд Тейлора (члены высокого порядка не учитываются).

Линеаризуя функцию нескольких случайных аргументов (какими и являются результаты измерений и их погрешности), можно получить, как правило, достаточно простое выражение для вычисления оценок среднего значения и среднего квадратического отклонения функции.

Разложение нелинейной функции в ряд Тейлора имеет вид:

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_m) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}_i} \Delta X_i + R. \quad (10.14)$$

Метод линеаризации допустим, если можно пренебречь остаточным членом R .

Остаточным членом $R = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2} \right)_{\bar{X}_i} \cdot (\Delta X_i)^2$ пренебрегают, если

$$R < 0,8 \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}_i}^2 \cdot S_{\bar{X}_i}^2}, \quad \text{где } S_{\bar{X}} - \text{среднее квадратическое отклонение}$$

случайных погрешностей результата измерения x_i -го аргумента.

Первое слагаемое правой части уравнения есть точечная оценка истинного значения косвенной величины, которая получается подстановкой в функциональную зависимость средних арифметических $\bar{X}_i$, значений аргументов:

$$Y = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m). \quad (10.15)$$

Второе слагаемое $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}_i} \cdot \Delta X_i$, есть сумма составляющих погрешности косвенного измерения, называемых частными погрешностями, а частные производные $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ - коэффициентами влияния.

Отклонения ΔX_i должны быть взяты из полученных значений погрешностей и такими, чтобы они максимизировали выражение для остаточного члена R .

Если частные погрешности косвенного измерения не зависят друг от друга, т. е. являются некоррелированными, и известны доверительные границы погрешности аргументов при одинаковой вероятности, то предельная погрешность (без учета знака) косвенного измерения вычисляется по формуле:

$$\Delta_{\bar{x}} = \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial F}{\partial x_j} \right| \cdot \Delta \bar{x}_j, \quad (10.16)$$

где $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ - значения частных производных функциональной

зависимости определяются при средних значениях аргументов $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j}$.

Этот метод, называемый максимум-минимум, дает значительно завышенное значение погрешности косвенного измерения.

Относительно правильная оценка погрешности косвенного измерения, получается, по методу квадратического суммирования:

$$\Delta_{\bar{y}} = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial X_j} \right)^2 \cdot \Delta_{x_j}^2}. \quad (10.17)$$

В ряде случаев расчет погрешности косвенного измерения значительно упрощается при переходе к относительным погрешностям. Для этого используется прием логарифмирования и последующего дифференцирования

функциональной зависимости. Когда предельная погрешность косвенного измерения, полученная по методу максимума-минимума:

$$\delta_{\bar{y}} = \pm \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial \ln Y}{\partial x_j} \right| \cdot \Delta \bar{x}_j, \quad (10.18)$$

а по методу квадратического суммирования:

$$\delta_{\bar{y}} = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial \ln Y}{\partial x_j} \right|^2 \cdot \Delta_{x_j}^2}. \quad (10.19)$$

Рассмотрим пример:

На стендовых испытаниях двигателя измерялась тяга с помощью тягоизмерительной системы с погрешностью $\pm 0,12$ % и секундный массовый расход m топлива с погрешностью $\pm 0,5$ % при доверительной вероятности $P = 0,95$. Требуется вычислить удельный импульс I двигателя и границы погрешности, если регистрирующие средства измерения показали значения: $P_T = 812$ Н; $m = 0,2$ кг/с.

Функциональная связь имеет вид:

$$I = \frac{P_m}{m}. \quad (10.20)$$

Определим точечную оценку удельного импульса по формуле (10.20):

$$I = \frac{812}{0,2} = 4060 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{кг}}.$$

Погрешности аргументов выражены в относительных величинах, поэтому для оценки погрешности удельного импульса используем прием логарифмирования и последующего дифференцирования функциональной зависимости, вычислим по формуле предельную погрешность по методу максимум-минимум (без учета знака):

$$\delta_{\bar{I}} = \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial \ln Y}{\partial x_j} \right| \cdot \Delta \bar{x}_j = \frac{1}{P} \cdot \Delta_P + \frac{1}{m} \cdot \Delta_m = \delta_P + \delta_m; \quad (10.21)$$

$$\delta_{\bar{I}} = 0,12 + 0,5 = 0,62 \text{ \%}.$$

По методу квадратического суммирования относительная погрешность будет:

$$\delta_{\bar{I}} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial \ln Y}{\partial x_j} \right|^2 \cdot \Delta_{x_j}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \delta_j^2}; \quad (10.22)$$

$$\delta_{\bar{I}} = \sqrt{0,12^2 + 0,5^2} = 0,51 \text{ \%}.$$

Примем относительную погрешность косвенного измерения $\delta_I = \pm 0,51 \text{ \%}$, тогда абсолютная погрешность находится по формуле:

$$\Delta_{\bar{I}} = I \cdot \delta_I; \quad (10.23)$$

$$\Delta_{\bar{I}} = 4060 \cdot 0,51 \text{ \%} = \pm 21 \frac{H \cdot c}{\kappa^2}.$$

Результаты представим в форме:

$$I = (4060 \pm 21) \frac{H \cdot c}{\kappa^2}; \quad P = 0,95.$$

Рассмотрим другой пример:

Определить амплитуду A виброперемещения некоторой точки корпуса вертолета и границы погрешности при доверительной вероятности $P = 0,95$. По результатам многократных наблюдений получены следующие исходные данные: частота колебаний $f = 145,2 \text{ Гц}$; $\theta_{\bar{f}} = 0$; $S_{\bar{f}} = 0,04 \text{ Гц}$; $n = 20$; амплитуда виброускорения $\bar{a} = 4,2 \cdot q$; $\theta_{\bar{a}} = 0,1 \cdot q$; $S_{\bar{a}} = 0,02 \cdot q$; $n = 20$.

Функциональная зависимость имеет вид:

$$A = \frac{a}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2}. \quad (10.24)$$

Найдем через средние значения аргументов точечную оценку амплитуды виброперемещения по формуле (10.24):

$$\bar{A} = \frac{4,2 \cdot 9,8 \cdot 10^6}{4 \cdot \pi^2 \cdot 145,2^2} = 49,45 \text{ мкм}.$$

Вычислим доверительную границу (без учета знака) неисключенной систематической погрешности косвенного измерения по формуле, учитывая, что при $P = 0,95$; $k = 1,1$.

$$\theta_{\bar{A}} = k \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2} \cdot \theta_{\bar{x}_j}^2 ; \quad (10.25)$$

$$\theta_{\bar{A}} = 1,1 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 145^2} \right)^2 \cdot (0,1 \cdot 9,8 \cdot 10^6)^2} = 1,30 \text{ мкм.}$$

Определим оценку СКО $S_{\bar{A}}$ случайной погрешности косвенного измерения по формуле (10.26):

$$S_A = k \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2} \cdot S_{\bar{x}_j}^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot \bar{f}^2} \right)^2 \cdot S_{\bar{a}}^2 + \left(-2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot \bar{f}^2} \right) \cdot S_{\bar{f}}^2} ; \quad (10.26)$$

$$S_A = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 145,2^2} \cdot (0,02 \cdot 9,8 \cdot 10^6)^2 + \frac{2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 145,2^2} \cdot 0,04^2}.$$

Поскольку отношение неисключенной систематической погрешности к оценке СКО $S_{\bar{A}}$ находится в пределах $0,8 < \frac{\theta_{\bar{A}}}{S_{\bar{A}}} = \frac{1,30}{0,24} = 5,4 < 8$, то суммарную погрешность косвенного измерения определяем по формуле:

$$\Delta_{\bar{A}} = \pm K \cdot (\dot{\Delta}_{\bar{A}} + \theta_{\bar{A}}). \quad (10.27)$$

Для этого из таблицы 9.3 при $P = 0,95$ и $\frac{\theta}{S} = 5,4$ находим $K = 0,785$.

Доверительная граница случайной составляющей погрешности (без учёта знака):

$$\Delta_{\bar{A}} = t_{0,95} \cdot S_{\bar{A}} = 2,04 \cdot 0,24 = 0,49 \text{ мкм,}$$

где $t_{0,95} = 2,04$ определена из таблицы 3.2 при доверительной вероятности $P = 0,95$ и числе степеней свободы, найденном по формуле:

$$K = \frac{m^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j - 1}}; \quad (10.28)$$

$$K = \frac{2^2}{\frac{1}{20-1} + \frac{1}{20-1}} = 38.$$

Тогда доверительная граница погрешности косвенного измерения будет (без учёта знака) равна:

$$\Delta_{\bar{A}} = 0,785 \cdot (0,49 + 1,30) = 1,41 \text{ мкм.}$$

Окончательный результат косвенного измерения амплитуды виброперемещения представим в виде:

$$\bar{A} = 49,5 \text{ мкм}; \Delta_{\bar{A}} = \pm 1,4 \text{ мкм}; P = 0,95.$$

Исправленное значение измеряемой (вычисляемой) величины с указанной доверительной вероятностью принадлежит интервалу $[48,1; 50,9]$.

10.2.2 Метод приведения

Этот метод оценивания погрешностей косвенных измерений применяют, когда не известны законы распределения погрешностей измерений аргументов, а между аргументами существует корреляция.

Метод основан на приведении ряда отдельных значений косвенно измеряемой величины к ряду прямых измерений. Получаемые сочетания отдельных результатов измерений аргументов подставляют в формулу (10.1) и вычисляют отдельные значения измеряемой величины Y : $X_1, X_2, \dots, X_m$ по которым затем вычисляют результат косвенного измерения:

$$Y = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m X_i, \quad (10.29)$$

где m – число отдельных значений измеряемой величины;

x_i – i -е отдельное значение измеряемой величины, полученное в результате подстановки i -го сочетания согласованных результатов измерений аргументов в формулу.

Оценку среднего квадратического отклонения случайных погрешностей результата косвенного измерения вычисляют по формуле:

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{(X_i - \bar{Y})^2}{m \cdot (m-1)}}. \quad (10.30)$$

Доверительные границы случайной погрешности для результата измерения вычисляют по формуле:

$$\Delta = T \cdot S(\bar{Y}), \quad (10.31)$$

где T – коэффициент, зависящий от вида распределения отдельных значений измеряемой величины, выбранной доверительной вероятности.

При нормальном распределении отдельных значений измеряемой величины доверительные границы случайных погрешностей вычисляют в соответствии с ГОСТ 8.207-76 /12/.

Рассмотрим пример определения плотности твердого тела /12/. Как известно плотность можно определить по формуле:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (10.32)$$

При определении плотности твердого тела получены результаты измерений аргументов, представленные в таблице 10.1.

$$\begin{aligned} \bar{m} &= 252,9120 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; & \bar{V} &= 195,3798 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \\ S^2(m) &= 19,4 \cdot 10^{-14} \text{ кг}^2; & S^2(\bar{V}) &= 16,4 \cdot 10^{-20} \text{ м}^6. \end{aligned}$$

Зависимость измеряемой величины от аргументов нелинейна, поэтому для нахождения результата измерения и оценки его погрешностей следует воспользоваться методом линеаризации. Предварительно следует проверить, выполняется ли в уравнении (10.14) условие для исключения остаточного члена R .

Таблица 10.1 – Результаты измерений плотности

Масса тела, $m_i \cdot 10^8$, кг	$(m_i - \bar{m}) \cdot 10^7$, кг	$(m_i - \bar{m})^2 \cdot 10^{14}$, кг ²	Объем тела $V_i \cdot 10^6$, м ³	$(V - \bar{V}) \cdot 10^{10}$, м ³	$(V - \bar{V})^2 \cdot 10^{20}$, м ³
1	2	3	4	5	6
252,9119	1	1	195,3799	1	1
252,9133	13	169	195,3830	32	1024
252,9151	31	961	195,3790	8	64
252,9130	10	100	195,3819	21	441
252,9109	11	121	195,3795	3	9
252,9094	26	676	195,3788	10	100
252,9113	7	49	195,3792	6	36
252,9115	5	25	195,3794	4	16
252,9119	1	1	195,3794	4	16
252,9115	5	25	195,3791	7	49
252,9118	2	4	195,3791	7	49

При линеаризации функции (10.32) остаточный член имеет вид:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial V^2} (\Delta V)^2 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial m^2} (\Delta m)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial m \cdot \partial V} \cdot \Delta m \cdot \Delta V \right]. \quad (10.33)$$

Числовое значение R равно:

$$\begin{aligned} R &= \frac{252,912 \cdot 10^{-3}}{(195,3798 \cdot 10^{-6})^3} \cdot (32 \cdot 10^{-10})^2 + \frac{32 \cdot 10^{-10} \cdot 31 \cdot 10^{-7}}{(195,3798 \cdot 10^{-6})^2} = \\ &= 0,0347240 \cdot 10^{-5} + 0,0259867 \cdot 10^{-5} = 0,0607107 \cdot 10^{-5} \approx 6 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Знаки у слагаемых взяты одинаковыми, так как погрешности ΔV и Δm случайные.

Числовое значение R необходимо сравнить с числовым значением:

$$0,8 \times S(\bar{\rho}). \quad (10.34)$$

Числовое значение $\bar{X}_m$ равно:

$$S(\bar{\rho}) = \left(\frac{1}{\bar{V}} \right)^2 \cdot S^2(\bar{m}) + \left(\frac{\bar{m}}{\bar{V}^2} \right)^2 \cdot S^2(\bar{V}); \quad (10.35)$$

$$S(\bar{\rho}) = \frac{213 \cdot 10^{-14}}{11 \cdot 38173,2662 \cdot 10^{-12}} = \frac{(252,912 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 180 \cdot 10^{-20}}{11 \cdot (38173,2662 \cdot 10^{-12})} \approx 0,0035.$$

Так как $0,000006 < 0,8 \cdot 0,0035$, то условие, предъявляемое к остаточному члену в уравнении (10.14). В соответствии с формулой (10.32) результат измерения равен:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}} \approx 1294463 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение результата вычисляют в соответствии с формулой:

$$S(\bar{\rho}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 \cdot S^2(\bar{m}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2 \cdot S^2(\bar{V})}; \quad (10.36)$$

$$S(\bar{\rho}) \approx 0,004 \text{ кг/м}^3.$$

Запись результата измерения можно представить в виде:

$$\bar{\rho} = 1,294463 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; S(\bar{\rho}) = 0,004 \text{ кг/м}^3; n_1 = n_2 = 11.$$

11 Обработка результатов совместных измерений

Совместные измерения представляют собой производимые одновременно измерения двух или нескольких, как правило, неоднородных величин для нахождения зависимости между ними.

Этот вид измерений находит широкое применение в научных, технических и метрологических измерениях.

Совместные измерения применяются в метрологической практике при экспериментальном определении градуировочных характеристик средств измерений, в том числе различных преобразователей.

Определение градуировочной характеристики средства измерения называется градуировкой средства измерения.

Градуировочная характеристика средства измерения представляет собой зависимость между значениями величин на входе и выходе средств измерений. Она может быть представлена в виде таблицы, графика или формулы (т. е. в аналитическом виде).

Наиболее универсальной формой градуировочной характеристики является ее представление в виде формулы, которую удобно использовать при автоматизированных испытаниях с применением ЭВМ.

Каждому измерительному прибору или преобразователю соответствуют собственная индивидуальная зависимость между входной величиной X и выходной Y , которая в общем случае зависит также и от времени t . Функциональная зависимость $y = f(x, t)$ представляет собой функцию преобразования измерительного прибора (или преобразователя) и является градуировочной характеристикой.

При градуировке выполняют совместные измерения входных и выходных величин. Если число точек измерения n , то получают набор результатов измерений $(x_i; y_i)$, $i = 1 \dots n$, по которым определяют градуировочную характеристику.

В каждой исследуемой точке измерения проводятся многократно (при прямом и обратном направлении изменения входной величины).

Наиболее предпочтительной градуировочной характеристикой является линейного вида:

$$Y = \alpha + \beta \cdot X, \quad (11.1)$$

где α – константа (свободный член);

β – коэффициенты, которые определяют по экспериментальным данным при градуировке средства измерения методом регрессионного анализа.

В регрессионном анализе для определения коэффициентов применяют метод наименьших квадратов (МНК), который предполагает, что выполнены два основных требования:

- 1) значения входных величин x_i известны точно;

2) результаты измеренных выходных величин y_i содержат независимые случайные погрешности, которые распределены по нормальному закону.

Необходимо специально проверить справедливость выполнения условия 2. Резко выделяющиеся значения (промахи) должны быть исключены. Для этого применяют рассмотренные выше критерии проверки статических гипотез.

Для определения коэффициентов a и b в уравнении регрессии (11.2) используют регрессионный анализ:

$$\bar{y} = a + b \cdot x, \quad (11.2)$$

где $\bar{y}$ – линия регрессии (функция отклика).

11.1 Методика регрессионного анализа

Рассмотрим методику регрессионного анализа для пассивного эксперимента, когда эксперимент заранее не планируется.

Уравнению (11.1) соответствует [22, 23] парная регрессия, коэффициенты которой определяют по формулам:

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)}; \quad (11.3)$$

$$a = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right). \quad (11.4)$$

Дисперсия $\bar{Y}$ будет складываться из двух компонентов – дисперсии параметра a и дисперсии параметра b .

Верхняя y_h и нижняя y_i границы для $\bar{Y}$ имеют вид:

$$y_{ih} = \bar{Y}_i + t_q \cdot S_{\bar{y}_i}; \quad y_{il} = \bar{Y}_i - t_q \cdot S_{\bar{y}_i}, \quad (11.5)$$

где t_q – коэффициент Стьюдента.

Среднее квадратическое отклонение отклика y вычисляют по формуле:

$$S_{\bar{y}_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y}_i)^2}{(n-2)} \cdot \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_i)^2} \right]}, \quad (11.6)$$

где $x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$.

Если нанести доверительные границы на графике, приведенном на рисунке 11.1, то они расположатся соответственно выше и ниже линии регрессии в виде ветвей гиперболы, ограничивающих доверительную область.

Для определения доверительной области с учетом отклонений отдельных измерений необходимо вычислить среднее квадратическое отклонение по формуле:

$$S_{y_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y}_i)^2}{(n-2)} \cdot \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_i)^2} \right]}. \quad (11.7)$$

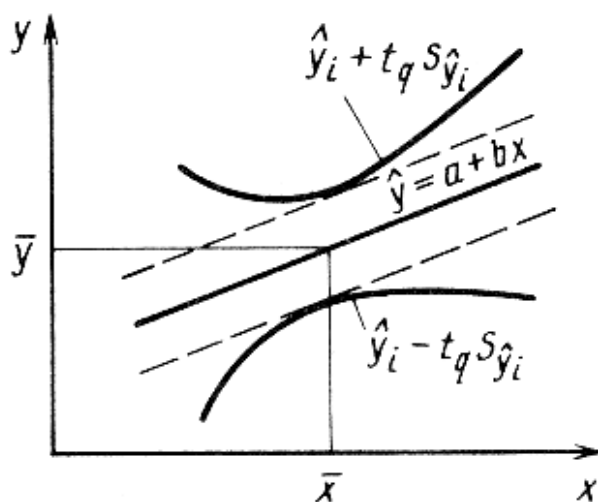


Рисунок 11.1 – Границы доверительного интервала линейного уравнения парной регрессии

Тогда доверительные границы будут равны:

$$y_{ih} = \bar{Y}_i + t_q \cdot S_{y_i}; \quad y_{il} = \bar{Y}_i - t_q \cdot S_{y_i} \quad (11.8)$$

Если возникает необходимость проверки статической гипотезы о равенстве двух уравнений регрессии, то такая проверка включает последовательную проверку справедливости трех статических гипотез:

- 1) об остаточных дисперсиях;
- 2) о значениях коэффициентов регрессии b ;
- 3) о значениях коэффициентов (константа) a .

В рассмотренной парной регрессии значения y зависят от значений только одной переменной x . Однако в общем случае y может зависеть от нескольких переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Это так называемый случай множественной регрессии.

Оценка параметров регрессии обычно сопровождается расчетом дополнительной характеристики, называемой коэффициентом корреляции.

Выборочный коэффициент корреляции представляет собой эмпирическую (т. е. определенную по экспериментальным результатам) меру линейной зависимости между x и y .

В математической статистике степень коррелируемости переменных (n пар случайных величин $x_i, y_i, i=1, 2, 3, \dots, n$), которую оценивают выборочным коэффициентом корреляции Пирсона:

$$r_b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \cdot \left[n \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}. \quad (11.9)$$

Если $r_b > 0$, то при увеличении x возрастает y , при $r_b < 0$, с ростом x , y – убывает. Принято считать, что при выполнении условия $0,75 < |r_b| < 0,95$ существует сильная связь, а при $0,95 < |r_b| \leq 1$ – функциональная зависимость.

Для небольших значений n (так называемая малая выборка) коэффициент корреляции r должен быть скорректирован:

$$r'_b = r_b \cdot \left[1 + \frac{1 - r_b^2}{2 \cdot (n - 3)} \right]. \quad (11.10)$$

Выборочный коэффициент r_b (или r'_b) должен быть проверен на существенность, т. е. значимо ли он отличается от нуля.

Для проверки статической гипотезы о существенности (значимости) корреляции между исследуемыми величинами X и Y и построения доверительных интервалов для коэффициента корреляции используют преобразование Фишера:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (11.11)$$

которое аппроксимируется нормальным законом с дисперсией:

$$\sigma_U^2 = (n-3)^{-1}. \quad (11.12)$$

Если $|U| > Z_{1-q/2} \cdot \sigma_U$, то коэффициент корреляции существенно отличается от нуля.

Приняв, что справедлив нормальный закон (для доверительной вероятности $P = 0,95$), находят верхнюю U_h и нижнюю U_l границы доверительного интервала:

$$U_h = U + 1,96 \cdot \sigma_U; \quad U_l = U - 1,96 \cdot \sigma_U. \quad (11.13)$$

Если число измерений $n > 50$, то при доверительной вероятности 0,95 доверительные границы выборочного значения коэффициента корреляции имеют вид:

$$r_h = r_b + 1,96 \cdot \frac{1-r_b^2}{\sqrt{n}}; \quad r_l = r_b - 1,96 \cdot \frac{1-r_b^2}{\sqrt{n}}. \quad (11.14)$$

С помощью преобразования (11.11) можно установить равенство между собой двух выборочных коэффициентов корреляции, используя, например, статический критерий T [23].

При выбранном уровне значимости q требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции (при конкурирующей гипотезе: выборочный коэффициент корреляции r_b отличен от нуля).

Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а X и Y коррелированы, т. е. связаны линейной зависимостью.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину:

$$T = \frac{r_b \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_b^2}}.$$

Величина T при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы.

Рассмотрим пример:

По выборке $n = 122$, извлеченной из нормальной двумерной совокупности, найден выборочный коэффициент корреляции $r_b = 0,4$. При уровне значимости $q = 0,05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю

генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе: “выборочный коэффициент корреляции не равен нулю”. С этой целью найдем наблюдаемое значение критерия:

$$T_{набл} = r_b \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_b^2}} = 0,4 \cdot \frac{\sqrt{122-2}}{\sqrt{1-0,4^2}} = 4,78.$$

По уровню значимости $q = 0,05$ и числу степеней свободы $k = n - 2 = 122 - 2 = 120$ находим по таблице 3.4 (для двусторонней критической области) критическую точку $t_{кр}(q; n) = (0,05; 120) = 1,98$.

Поскольку $T_{набл} > t_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергаем, это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т. е. X и Y коррелированы.

Проверка равенства выборочных коэффициентов корреляции может производиться также с использованием статистики χ^2 (хи-квадрат).

Корреляционно-регрессивный анализ получил широкое применение в научных исследованиях и на производстве, при обработке статических данных, например, связанных с производством и испытаниями авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) /22/, в пищевой промышленности и других отраслях.

Так, например, линейная множественная регрессионная модель выявила, что основной причиной вибраций авиационного турбовинтового двигателя является величина зазора между наружным кольцом шарикоподшипника вала винта и корпусом двигателя.

Если в качестве фактора включается время, то корреляционно-регрессивный анализ позволяет выявить тенденции, характер измерения во времени, так называемый тренд.

11.2 Проверка статистической гипотезы об адекватности модели

Целью проверки адекватности математической (регрессионной) модели является подтверждение того, что данная модель правильно описывает исследуемый процесс. Для этого определяются погрешности математической модели и экспериментальных данных. Если погрешности модели превышают погрешности экспериментальных данных, то гипотеза об адекватности математической модели отклоняется.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}; \quad (11.15)$$

$$S_{cp}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{S_i^2}{m}; \quad (11.16)$$

$$G < G_{1-q}(f; m). \quad (11.16)$$

Для проверки используют критерий Фишера (11.15), в числитель которого записывают дисперсию адекватности S_{ad}^2 , а в знаменатель – усредненную дисперсию S_{cp}^2 , которая вычисляется по формуле (11.16) при условии подтверждения однородности дисперсий по (11.17).

Дисперсию адекватности определяют по формуле:

$$S_{ad}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{(n - c)}, \quad (11.18)$$

где c – число коэффициентов уравнения регрессии;

$\bar{Y}_i$ – среднее арифметическое значение экспериментальных данных;

$\bar{Y}$ – значение функции отклика, вычисленное по уравнению регрессии.

12 Обработка результатов наблюдений при прямых однократных измерениях

Прямые однократные измерения имеют наибольшее распространение в измерительной технике, быту, медицинской практике проведения биохимических анализов с целью постановки предварительного анализа и во всех случаях, где однократное измерение может дать представление об измеряемой величине.

При однократных измерениях показания приборов x_i принимают равным результату измерения, при этом трудоемкость и время измерения существенно уменьшаются.

Однократные измерения с точки зрения соотношения случайных и систематических погрешностей целесообразны тогда, когда сходимость результатов измерений высока, а появление систематической погрешности неизбежно.

Таким образом, однократные измерения применимы в том случае, если среднее квадратичное отклонение СКО результатов наблюдений, выполненных в одинаковых условиях (а именно СКО является параметром сходимости) близко к нулю. Тогда результаты отдельных наблюдений практически совпадают и, следовательно, среднее арифметическое значение результатов наблюдений и его математическое ожидание практически равны между собой, т. е. выполняется условие $\bar{X} \cong M(x)$. Что означает, что случайная погрешность пренебрежительно мала и нет необходимости в выполнении повторных наблюдений.

За результат однократного измерения принимается значение величины, полученное при измерении (после исключения систематической погрешности). Отличие результата измерения от наблюдения состоит в том, что последний содержит в себе погрешности (как систематические, так и случайные), отсутствуют границы (доверительные) в пределах которых следует ожидать нахождения истинного (действительного) значения случайной величины.

Оценка погрешности результата вычисляется предварительно по известным оценкам составляющих погрешности. Все составляющие рассматриваются как случайные величины, каждая из которых подчиняется своим законам распределения. Суммарная погрешность результата измерения имеет распределение как композиция из составляющих распределений. Аналитическое решение такой задачи трудоемко и становится практически неразрешимой уже для 3-4 составляющих. Поэтому для оценки погрешности однократного прямого измерения пользуются приближенными методами, т. е. речь идет о приближенном оценивании погрешности результата.

Чтобы оценить суммарную погрешность результата, необходимо провести тщательный предварительный анализ всех влияющих факторов (погрешность СИ, метода, субъективная погрешность и др.). По своему

проявлению они могут быть отнесены к неисключенным систематическим и случайным погрешностям.

Неисключенные систематические погрешности, если их доверительные границы заданы разными вероятностями, суммируются по формуле (12.1) (без учета знака):

$$\theta = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{k_i}}, \quad (12.1)$$

где k_i – коэффициент, соответствующий доверительной вероятности, который может принимать значения: $k_i = 0,95$ при $P = 0,90$; $k_i = 1,1$ при $P = 0,95$ и $k_i = 1,4$ при $P = 0,99$.

Если неисключенные систематические погрешности определены при одинаковой доверительной вероятности, то формула суммирования имеет вид формулы (9.10).

Если случайные составляющие погрешности заданы доверительными границами, полученными с разными вероятностями, то случайная погрешность прямого измерения определяется по формуле:

$$\dot{\Delta} = \pm z_{p/2} \cdot S_{\bar{X}}, \quad (12.2)$$

$$\text{где } S_{\bar{X}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\dot{\Delta}}{z_{p_i/2}} \right)^2};$$

$z_{p/2}$ – верхняя квантиль интегральной функции нормированного распределения Лапласа, отвечающая вероятности $\frac{P}{2}$ (значение квантилей указаны в таблице 7.1).

В случае одинаковой вероятности задания границ случайных погрешностей формула (12.2) преобразуется к виду:

$$\dot{\Delta} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^m \dot{\Delta}_i^2}. \quad (12.3)$$

Следует отметить, что правило суммирования случайных погрешностей справедливо для широкого класса распределений (от Лапласа до равномерного) при доверительной вероятности $P = 0,90$. При других P оценка суммарной погрешности является приближенной.

Если известны по предварительным исследованиям СКО составляющих случайных погрешностей, то доверительная граница суммарной случайной погрешности находится по формуле:

$$\dot{\Delta} = \pm Z_{p/2} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (12.4)$$

$$\text{где } S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m S_{\bar{x}_i}^2}.$$

Сложение случайной и систематической составляющей погрешностей прямого однократного измерения выполняется по правилам, изложенным в разделе 9.

Граница основной абсолютной погрешности измерительной системы при предложении об их нормальном распределении вычисляется по формуле:

$$\Delta_c = \pm \sqrt{\Delta_{\partial}^2 + \Delta_n^2 + \sum_{i=1}^{m-2} \Delta_i^2}, \quad (12.5)$$

где Δ_n – основная абсолютная погрешность прибора;

Δ_{∂} – основная абсолютная погрешность измерительного преобразователя (датчика);

Δ_i – абсолютная погрешность других элементов измерительной системы.

Напомним, что средство измерения в общем случае представляет собой некоторую систему, состоящую из преобразователей, блоков усиления, сравнения, фильтрации, вывода и каналов интерфейса.

Измерительные каналы или системы включают в себя средства измерения, средства преобразования и др.

Если на основе проведенной метрологической аттестации измерительной системы установлены абсолютные погрешности каждого из ее элементов, соответствующие остальным значениям диапазона измеряемой величины, то основная абсолютная погрешность системы, соответствующая этим отдельным значениям диапазона, определяется по формуле:

$$\Delta_c = \pm \left(\Delta_{\partial} + \Delta_n + \sum_{i=1}^{m-2} \Delta_i \right). \quad (12.6)$$

Рассмотрим несколько примеров оценивания погрешностей при однократных измерениях.

Рассмотрим пример:

При измерении объемного расхода топлива, проводимого при стендовых испытаниях ГТД применялся турбинный датчик расхода с неисключенной систематической погрешностью $\pm 0,25$ %. Относительная погрешность электронной аппаратуры равна $\pm 0,1$ %, дополнительная погрешность, обусловленная изменением напряжения источника питания, равна $\pm 0,05$ %. Известно, что распределение погрешностей не противоречит

нормальному, и границы заданы при одинаковой вероятности $P = 0,95$. Результат однократного измерения составил $Q = 320,4 \text{ см}^3/\text{с}$. Определить погрешность результата при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Суммируем неисключенные систематические погрешности датчика и аппаратуры, предполагая их равномерное распределение в границах $\pm \theta_i$, формуле (9.10):

$$\theta_{\Sigma} = 1,1 \cdot \sqrt{0,1^2 + 0,1^2 + 0,05^2} \approx 0,16 \%$$

так как $P = 0,95$, то $k = 1,1$.

Вычисляем отношение суммарной систематической неисключенной погрешности к СКО случайной погрешности датчика и проверяем условия по формулам (9.1) и (9.8):

$$\frac{\theta_{\Sigma}}{S} = \frac{0,16}{0,25} = 0,6.$$

Отношение $\frac{\theta_{\Sigma}}{S} = 0,6 < 0,8$, поэтому за границу относительной погрешности результата измерения (без учета знака) принимаем случайную составляющую, которая находится по формуле (12.4):

$$\delta = 1,96 \cdot 0,25 = 0,49 \%,$$

где значение $z_{p/2}$ взято из таблицы 8.1 при $P = 0,95$.

В абсолютных величинах погрешность однократного измерения:

$$\Delta = \delta \cdot Q = 0,49 \% \cdot 320,4 \approx 1,6 \text{ см}^3/\text{с}$$

Следовательно, результат однократного прямого измерения можно представить в форме:

$$Q = 320,4 \text{ см}^3/\text{с}; \Delta = \pm 1,6 \text{ см}^3/\text{с}; P = 0,95.$$

13 Математические методы планирования и анализа активного эксперимента

Обработку результатов активного эксперимента осуществляют на основе регрессионного анализа. Для использования регрессионного анализа необходимы следующие предпосылки:

а) ошибки эксперимента должны быть распределены по нормальному закону;

б) опыты должны быть воспроизводимы.

Следовательно, перед выполнением активного эксперимента необходимо провести предварительные серии опытов на изучаемом объекте, чтобы выявить наличие или отсутствие этих предпосылок.

13.1 Проверка гипотезы о нормальном законе распределения погрешностей эксперимента

Существует несколько способов проверки гипотезы о нормальном законе распределения ошибок эксперимента. Для этой цели часто используют W -критерий [22, 23]. Статический критерий W (критерий согласия Шапиро-Уилка) предназначен для двух статических моделей (нормальной и экспоненциальной). Он является более мощным, т. е. обеспечивает большую вероятность исключить неправильную гипотезу (модуль) по сравнению с рассмотренным в разделе 7 критерием χ^2 (хи-квадрат). В таком случае требуется от 3 до 50 параллельных опытов, выполненных в одинаковых условиях.

Проверка нулевой гипотезы о принадлежности неизвестного экспериментального закона распределения погрешностей эксперимента теоретическому нормальному закону осуществляется в следующей последовательности:

а) результаты опытов располагают в виде неубывающей последовательности:

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_k, \quad (13.1)$$

где k – число параллельных опытов;

б) вычисляют значение величины:

$$S^2 = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^k y_i^2 - \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{i=1}^k y_i \right)^2; \quad (13.2)$$

г) вычисляют значение величины по формуле:

$$b = a_k \cdot (y_k - y_1) + a_{k-1} \cdot (y_{k-1} - y_2) + \dots + a_{k-l+1} \cdot (y_{k-l+1} - y_l) = \sum_{i=1}^l a_{k-i+1} (y_{k-i+1} - y_i), \quad (13.3)$$

где значения коэффициентов a_{k-i+1} для $i = 1 \dots l$ берутся из таблицы И.1 в Приложении И (для $l = 3 \dots 50$). Если k -четное число, то принимают $l = \frac{k}{2}$, а если k -нечетное, то $l = \frac{(k-1)}{2}$ (в этом случае y_{l+1} не используется при вычислении);

д) находят расчетное значение W -критерия по формуле:

$$W_p = \frac{b}{S^2}; \quad (13.4)$$

е) при определенном уровне значимости q (обычно $q = 0,05$) проверяют выполнение условия:

$$W_p \geq W_q, \quad (13.5)$$

где W_q – критическое значение критерия, взятое из таблицы И.2 в Приложении И.

Следует отметить, что в Приложении И приведены таблицы для числа параллельных опытов k от 3 до 16. Таблица для большего числа опытов приведена в /22/.

Если условие (13.5) выполнено, то гипотезу о справедливости нормального закона распределения погрешностей эксперимента принимают.

Рассмотрим пример проверки гипотезы с помощью W -критерия. Допустим, что в результате опытов, выполненных в одинаковых условиях, получены следующие значения выхода целевого продукта реакции (%):

74,5; 78,9; 69,1; 72,8; 73,6; 70,5; 76,2; 71,7

Проверим с помощью W -критерия гипотезу о нормальном законе распределения погрешностей в указанном эксперименте. Для этого расположим экспериментальные данные в порядке возрастания:

69,1; 70,5; 71,7; 72,8; 73,6; 74,5; 76,2; 78,9

Вычислим значение величины S^2 по формуле (13.2):

$$S^2 = (69,1)^2 + (70,5)^2 + (71,7)^2 + (72,8)^2 + (73,6)^2 + (74,5)^2 + (76,2)^2 + (78,9)^2 - \frac{1}{8} \cdot (69,1 + 70,5 + 71,7 + 72,8 + 73,6 + 74,5 + 76,2 + 78,9)^2 = 69,49.$$

Рассчитаем значение величины b по формуле (13.3):

$$b = a_8 \cdot (y_8 - y_1) + a_7 \cdot (y_7 - y_2) + a_6 \cdot (y_6 - y_3) + a_5 \cdot (y_5 - y_4).$$

Коэффициенты a_i , взятые из таблицы И.1 в Приложении И, имеют следующие значения:

$$a_8 = 0,6052; a_7 = 0,3164; a_6 = 0,1743; a_5 = 0,0561.$$

Тогда

$$b = 0,6052 \cdot (78,9 - 69,1) + 0,3164 \cdot (76,2 - 70,5) + 0,1743 \cdot (74,5 - 71,5) + 0,0561 \cdot (73,6 - 72,8) = 8,267.$$

Вычислим расчетное значение W -критерия по формуле (13.4):

$$W_p = \frac{8,267}{69,49} = 0,119.$$

Критическое (табличное) значение W -критерия, найденное в таблице И.2 Приложения И для уровня значимости 0,05, равно 0,818. Сравнивая значения W_p и W , приходим к выводу; что по формуле (13.5):

$$W_p > W; 0,119 < 0,818.$$

Следовательно, гипотеза о нормальном законе распределения погрешностей в рассмотренном эксперименте отвергается.

13.2 Проверка гипотезы о воспроизводимости опытов

13.2.1 Проверка гипотезы о воспроизводимости с помощью критерия Кочрена

Для проверки гипотезы о принадлежности двух выборочных дисперсий одной генеральной совокупности (их однородности), а, следовательно, и равноточности серий измерений (показатель воспроизводимости опытов в эксперименте) используется критерий Кочрена (см. также раздел 7).

Для проверки гипотезы с помощью критерия Кочрена необходимы результаты нескольких серий параллельных опытов. В каждой из них количество опытов должно быть одинаково. Обычно число серий не велико — $2 \div 3$. Количество опытов в серии также может быть небольшим — $2 \div 3$. Результаты эксперимента помещают в таблицу 13.1.

Таблица 13.1 – Эксперимент для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов по критерию Кочрена

Номер серии опытов	Результаты параллельных опытов				$\bar{Y}$	S_j^2
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	y_1	S_1^2
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	y_2	S_2^2
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
j	y_{j1}	y_{j2}	...	y_{jk}	y_j	S_j^2
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
N	y_{N1}	y_{N2}	...	y_{Nk}	y_N	S_N^2

Для каждой серии параллельных опытов вычисляют среднее арифметическое значение функции отклика:

$$y_i = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k y_{ji}, \quad (13.6)$$

где j – номер серии;

i – номер опыта в серии;

k – число параллельных опытов.

Далее рассчитывают оценки дисперсий для всех серий опытов, пользуясь формулой:

$$S_j^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^k (y_{ji} - \bar{y}_j)^2. \quad (13.7)$$

Результаты вычислений по формулам (13.6) и (13.7) заносят в таблицу 13.1.

Расчетное значение критерия Кочрена представляет собой отношение наибольшей из оценок дисперсий к сумме всех найденных оценок дисперсий:

$$G_p = \frac{\max S_j^2}{\sum_{j=1}^N S_j^2}. \quad (13.8)$$

Критическое значение критерия Кочрена G находят в таблице Приложения К.

Гипотезу о воспроизводимости опытов принимают, если выполнено условие:

$$G_p \leq G. \quad (13.9)$$

В этом случае оценки дисперсий всех серий проведенных опытов считаются однородными, т.е. принадлежащими к одной генеральной совокупности.

На основании однородных оценок дисперсий вычисляют величину, называемую оценкой дисперсией воспроизводимости опытов, по формуле:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N S_j^2. \quad (13.10)$$

С нею связано число степеней свободы, вычисляемое по формуле:

$$f_y = N \cdot (k - 1). \quad (13.11)$$

Оценка дисперсии воспроизводимости используется при анализе результатов активного эксперимента для проверки статистических гипотез о значимости коэффициентов регрессии и об адекватности уравнения регрессии.

Рассмотрим пример проверки гипотезы с помощью критерия Кочрена:

Допустим, что для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов выполнен эксперимент, состоящий из трех серий по два параллельных опыта в каждой. Результаты этого эксперимента приведены в таблице 13.2. В качестве функции отклика был принят выход целевого продукта реакции y , (%). Будем считать, что условия проведения различных серий опытов отличаются друг от друга.

Вычислим средние значения выходов целевого продукта в каждой серии опытов по формуле (13.6):

$$\bar{y} = 0,5 \cdot (35,0 + 36,0) = 35,5.$$

Аналогично получаем:

$$\bar{y}_2 = 38,7; \bar{y}_3 = 32,6.$$

Таблица 13.2 – Экспериментальные и расчетные данные для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов

Номер серии опытов	$y, \%$		y_i	S_j^2
	результат 1-го опыта	результат 2-го опыта		
1	35,0	36,0	35,5	0,50
2	39,3	38,1	38,7	0,72
3	31,8	33,4	32,6	1,28

Результаты вычислений внесем в таблицу 13.2. Рассчитаем оценки дисперсий для каждой серии опытов по формуле (13.7):

$$S_1^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^k (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 = \frac{1}{2-1} \cdot [(35,0 - 35,5)^2 + (36,0 - 35,5) \cdot 2] = 0,50.$$

Аналогично:

$$S_2^2 = 0,72; S_3^2 = 1,28.$$

Вычисленные значения S_1^2 поместим в таблицу 13.2. С каждой из этих оценок дисперсий связано число степеней свободы, вычисленное по формуле (13.11):

$$f_i = 2 - 1 = 1.$$

Вычислим расчетное значение критерия Кочрена по формуле (13.8):

$$G_p = \frac{1,28}{0,50 + 0,72 + 1,28} = 0,51.$$

Соответствующее критическое значение критерия Кочрена берем из таблицы К.1 в Приложении К. При уровне значимости $q = 0,05$, числе серий опытов $N = 3$ и числе степеней свободы $f_j = 1$ находим значение $G = 0,967$.

Очевидно, что $G_p < G$, следовательно, можно принять гипотезу о том, что опыты воспроизводимы. В этом случае оценки дисперсий, содержащиеся в таблице 3.2, можно считать однородными.

Вычислим оценку дисперсии воспроизводимости:

$$S_y^2 = \frac{1}{3} \cdot (0,50 + 0,72 + 1,28) = 0,83.$$

С ней связано число степеней свободы, найденное по формуле (13.11):

$$f_y = 3 \cdot (2 - 1) = 3.$$

13.2.2 Проверка гипотезы с помощью критерия Бартлетта

Характеристикой воспроизводимости результатов серий (групп) измерений как в предыдущем случае является их выборочные дисперсии.

Как показано в разделе 1 воспроизводимость и сходимость являются показателями прецизионности измерений и количественно выражаются через межгрупповую и внутригрупповую дисперсию.

Гипотеза о равенстве нескольких выборочных дисперсий (для нескольких серий измерений), т. е. их однородности, характеризует воспроизводимость (т. е. степень близости друг друга) результатов измерений, полученных в разных условия.

Критерий Бартлетта используется для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов в тех случаях, когда имеются результаты нескольких серий параллельных опытов, однако число опытов в этих сериях разное. Экспериментальные данные, используемые для проверки гипотезы, помещают в таблицу 13.3.

Для каждой серии опытов вычисляется среднее арифметическое значение по формуле (13.6).

Оценку дисперсии для каждой серии параллельных опытов вычисляют по формуле (13.7).

Таблица 13.3 – Эксперимент для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов по критерию Бартлетта

Номер серии опытов	Результаты параллельных опытов			f_j	y_j	S_j^2
	1-й опыт	2-й опыт	...			
1	y_{11}	y_{12}	...	$k_1 - 1$	y_1	S_1^2
2	y_{21}	y_{22}	...	$k_2 - 1$	y_2	S_2^2
...	...	...	...	...	...	...
N	y_{N1}	y_{N2}	...	$k_N - 1$	y_N	S_N^2

С каждой из этих оценок дисперсий связано число степеней свободы:

$$f_j = k_j - 1. \quad (13.12)$$

Результаты вычислений по формулам (13.7)-(13.12) вносят в таблицу 13.3.

Далее рассчитывают средневзвешенную оценку дисперсии по формуле:

$$S_{св}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (f_j \cdot S_j^2)}{\sum_{j=1}^N f_j}. \quad (13.13)$$

Для упрощения дальнейших расчетных формул введем в рассмотрение величину:

$$f = \sum_{j=1}^n f_j, \quad (13.14)$$

с помощью которой рассчитывается вспомогательный коэффициент:

$$G = 1 + \frac{1}{3 \cdot (N-1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{f_j} - \frac{1}{f} \right). \quad (13.15)$$

Расчетное значение коэффициента Бартлетта вычисляется по формуле:

$$B = \frac{2,303}{C} \cdot \left(f \cdot \lg S_{св}^2 - \sum_{j=1}^N f_j \cdot \lg S_j^2 \right). \quad (13.16)$$

После этого проверяется выполнение условия:

$$B \leq \chi_{[q \cdot (N-1)]}^2. \quad (13.17)$$

Значение B сравнивается со значением W -критерия для уровня значимости q и числа степеней свободы $f = N - 1$.

Если условие (13.17) выполнено, то принимается гипотеза о воспроизводимости опытов.

В качестве оценки дисперсии воспроизводимости принимается величина $S_{св}^2$, с которой связано число степеней свободы f , определяемое по формуле (13.14).

Рассмотрим пример проверки гипотезы, с помощью критерия Бартлетта:

В качестве примера рассмотрим результаты эксперимента, приведенные в таблице 13.4. В ней представлены значения выхода целевого продукта химической реакции y , (%), полученные при проведении трех серий опытов. Как видно из таблицы, число параллельных опытов в этих сериях различное. Следует также отметить, что для проверки гипотезы с помощью критерия Бартлетта число опытов в серии должно быть не менее трех.

Для каждой серии опытов вычисляем среднее арифметическое значение выхода целевого продукта по формуле (13.6):

$$\bar{y}_1 = (85,2 + 83,8 + 86,4) = 8,1$$

Таблица 13.4 – Экспериментальные и расчетные данные для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов

Номер серии опытов	Выход целевого продукта y , %				f_j	y_j	S_f^2
	1-й опыт	2-ой опыт	3-ий опыт	4-ый опыт			
1	85,2	83,8	86,4		2	85,1	2,70
2	92,7	90,5	89,8	93,4	3	91,6	2,97
3	76,4	74,3	77,9	-	2	76,2	3,27

Аналогично получаем:

$$y_2 = 91,6; y_3 = 76,2.$$

Полученные значения вносим в таблицу 13.4. Рассчитываем оценки дисперсий для всех серий параллельных опытов по формуле (13.7):

$$S_1^2 = \frac{1}{3-1} \cdot [(85,2 - 85,1)^2 + (83,8 - 85,1)^2 + (86,4 - 85,1)^2] = 2,70.$$

Аналогично:

$$S_2^2 = 2,97; S_3^2 = 3,27.$$

С этими оценками связаны числа степеней свободы, вычисленные по формуле (13.12):

$$f_1 = 2; f_2 = 3; f_3 = 2.$$

Рассчитанные значения вносим в таблицу 13.4.

Средневзвешенную оценку дисперсии рассчитываем по формуле (13.13):

$$S_{св}^2 = \frac{2 \cdot 2,70 + 3 \cdot 2,97 + 2 \cdot 3,27}{2 + 3 + 2} = 2,98.$$

С нею связано число степеней свободы:

$$f = 2 + 3 + 2 = 7.$$

Вычислим вспомогательный коэффициент по формуле (13.15):

$$C = 1 + \frac{1}{3 \cdot (3-1)} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) = 1,20.$$

Рассчитаем значение коэффициента Бартлетта по формуле (13.16):

$$B = \frac{2,30259}{1,20} \cdot (7 \cdot \lg 2,98 - (2 \cdot \lg 2,70 + 3 \cdot \lg 2,97 + 2 \cdot \lg 3,27)) = 0,018$$

В таблице Ж.1 Приложения Ж находим значение критерия χ^2 для уровня значимости $q = 0,05$ и числа степеней свободы $f = N - 1 = 3 - 1 = 2$. Оно равно 5,99.

Очевидно, что в рассматриваемом примере:

$$B < \chi^2(0,05; 2).$$

Следовательно, можно принять гипотезу о воспроизводимости опытов.

14 Автоматизация обработки результатов наблюдений при многократных измерениях

Учитывая сложность и длительность проведения статистической обработки результатов измерений с многократными наблюдениями, на кафедре разработан пакет прикладных программ “Проведение обработки результатов измерений с применением интервальных оценок” /11/. Разработанный ППП может быть использован как при выполнении курсовых и контрольных работ, так и взят за основу для автоматизированного решения широкого круга задач по обработке экспериментальных данных. Настоящая программа позволяет выдвинуть гипотезу о форме распределения полученного множества результатов наблюдений и проверить ее с помощью описанных выше критериев.

С целью улучшения адаптируемости системы к изменениям в условиях задачи она реализована в виде совокупности модулей и состоит из следующих программных подсистем, осуществляющих:

- а) весь расчет;
- б) составление вариационных рядов;
- в) построение графиков;
- г) построение гистограмм;
- д) генерацию информации на экран;
- е) предупреждение ошибок и др.

В качестве базовой платформы для разработки программного средства были выбраны операционные системы Windows 95 и MS-DOS.

Инструментальным средством разработки программы служит Turbo Pascal 7.0 фирмы Borland International, Inc.

Основными требованиями, обеспечивающими высокую производительность данной программной системы, а также ее открытость, гибкость и способность сохранять информации при сбоях являются:

- а) IBM, совместимый компьютер не ниже 80486 SX-66;
- б) оперативная память 8 Мб;
- в) свободное дисковое пространство 1 Мб;
- г) видеокарта и монитор, поддерживающие режим VGA.

Структурная схема программы представлена в Приложении М.

Обращение к программе осуществляется путем запуска на выполнение файла CHEDEV.R.EXE.

Режим работы программы - интерактивный. Иерархическая организация меню обеспечивает свободу выбора действий. Однако в программе предусмотрена блокировка отдельных ветвей меню для обеспечения правильности ее работы и предупреждения неверных действий (например, невозможно воспользоваться в меню “Проводником”, если не были загружены входные данные. Предусмотрен контроль за корректным вводом начальных данных. Для работы с программой необходимы минимальные знания работы в среде Windows и навыки работы с “мышью”.

Для ввода начальных данных предусмотрены два пути:

а) загрузка данных из файла, для этого в главном меню необходимо выбрать пункт “Открыть файл”;

б) ввести данные с клавиатуры, для этого в главном меню выбирается пункт “Ввод данных”.

Входной файл должен иметь имя и расширение “<имя>.txt” и должен включать характеристики, представленные в таблице 14.1:

Таблица 14.1 – Характеристики файла

Диапазон значений	Тип	Цель использования	Источник	Где используется
Вещественный	real	Исходные данные	Вводится с клавиатуры	В расчете

Выходной файл должен иметь имя и расширение, в представленной программе это: “rezult.txt”, он содержит информацию, указанную в таблице 14.2

Таблица 14.2 – Информация файла:

Диапазон значений	Тип	Цель использования	Источник
Текст	Text	Скорлинг и вывод на печать	Результат расчета

Для просмотра результата расчета точечных математических оценок необходимо:

а) управляя кнопками “вверх”, “вниз”, “Page Up”, “Page Down”, вывести результаты на экран;

б) выбрав пункт “Проводник” вы сможете посмотреть гистограммы и графики;

в) выбрав пункт “Печать” вы сможете распечатать результаты на принтере;

г) выбрав пункт “Описание” вы сможете познакомиться с кратким описанием теории;

д) выбрав пункт “Выход” вы сможете выйти из программы.

Статистическую обработку результатов можно выполнять, пользуясь таблицами Excel.

Пользователям, которые предпочитают осваивать новые программы без чтения документации, следует записать Microsoft Excel и внимательно ознакомиться. Большинство необходимых средств и команд находятся в панели меню и в панели команд “Стандартная”. Получить необходимую справку можно, задав вопрос “Помощнику” по Office на естественном языке. Для этого следует щелкнуть кнопку “Помощник” (если он выведен на экран), ввести вопрос и нажать кнопку “Найти”.

Описание работ с таблицами Excel при статистической обработке результатов:

- а) вводим в столбцы В3 – В102 экспериментальные данные;
- б) копируем данные в столбец D и затем сортируем эти данные;
- в) копируем ячейки G4 – G8 в ячейки G14 - G18 и сортируем (среднее значение будет центром распределения);
- г) в соответствии с ячейками G1 проставляем ячейки H4-H8;
- д) смотрим, есть ли в столбцах L, M, N более 2-х минусов (отрицательная разность в столбцах свидетельствует о присутствии в выборке грубых погрешностей). Если они есть, то удаляем ячейки из экспериментальных данных в соответствии с номером;
- е) проводим исключение систематической погрешности по формуле:

$$" = \$BВ - 19 * \exists O \# / 50",$$

(вносится в командную строку), копируя ее в столбец P (#- номера строк);

- ж) копируем измененный ряд в столбец R и сортируем его.

Если была грубая погрешность, уменьшается количество данных, поэтому в ячейке T3 в формуле меняется значение логарифма – LOG10(#);

- з) в ячейке T5 в формуле меняется значение границы;

и) в ячейке T7 знаменатель ставится в соответствии с числом в ячейке T3 (округление в сторону меньшего);

- к) задаем границы $(X_k - X_{k+1})$ в ячейках (W4 – W9);

л) в ручную задаем частоту появления результатов в заданный интервал, занося их в ячейки (Y4 – Y9);

- м) задаем $F_{теор}$ в ячейки U24-U29 в соответствии с t_j (T24-T29);

н) в ячейку U43 заносим $\bar{X}_{ц.р.}$ из ячейки X12 и погрешность из ячейки U41;

- о) в ячейку X43 заносится конечное число элементов;

- п) на листе 2 получаем графики.

Эти графики включают:

а) начальной упорядоченной последовательности результатов наблюдений, а также без систематической и грубой погрешностей (т. е. после их исключения);

- б) гистограммы экспериментальных и теоретических частот;

- в) экспериментальные и теоретические кумуляты $F_{теор}$ и $F_{эм}$.

Подобные процедуры выполняем для оформления результатов расчета по каждой группе наблюдений.

15 Тематика курсовых работ

Задание является общим для всех вариантов и формулируется в следующем виде: по данному объему выборки n , представляющей массив экспериментальных данных, определить закон распределения вероятностей результата измерения, т. е. вид функции распределения и ее параметры. Варианты различаются видом функции распределения, объемом выборки и конкретным массивом данных. Возможные виды распределений приведены в Приложении А.

Вариант определяется по двум последним цифрам шифра студента: по последней цифре выбирается объем выборки, а по предпоследней – массив данных. Например, если шифр студента 01061, то ему следует выполнить работу с такими исходными данными: объем выборки n_1 , массив данных X_6 . Варианты работ приведены в таблице 1.1.

Таблица 15.1 – Варианты курсовой работы

Варьируемая характеристика	Варианты и исходные данные									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Объем выборки n_i^*	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_0
Массив данных X_i^{**}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_0
* - $n_1 = 200$; $n_2 = 60$; $n_3 = 180$; $n_4 = 80$; $n_5 = 160$; $n_6 = 100$; $n_7 = 120$; $n_8 = 240$; $n_9 = 220$; $n_0 = 140$.										
** - Массивы данных приведены в Приложении Б.										

16 Оформление курсовой работы

Курсовая работа по обработке результатов многократных измерений должна выполняться в соответствии с разделами, указанными в содержании к методическому пособию.

Оформление курсовой работы должна выполняться в соответствии с ГОСТ 2.105–95 и СТП 101–00.

Титульный лист курсовой работы следует оформлять в соответствии с Приложением Н.

Структура расчетно-пояснительной записки включает:

а) постановку задачи с исходными данными из соответствующего варианта задания;

б) алгоритм решения задачи с необходимыми обоснованиями результатов (выводов) на каждом шаге.

Вся графическая информация должна быть представлена на листах формата А4 и оформлена в виде приложений. В приложениях в обязательном порядке должны быть представлены:

а) задание на курсовую работу, выданное руководителем (допускается представление копии задания);

б) графическая интерпретация результатов наблюдений по группам (сериям) в последовательности их получения при измерительном эксперименте. Эти ломаные кривые должны быть заменены аппроксимирующими прямыми. На этом же графике должна быть представлена кривая исправленных результатов (в случае наличия систематической составляющей погрешности измерений);

в) гистограммы для исправленных результатов наблюдений (по группам). Используя эти же координатные оси, нанести теоретические (нормированные) кривые дифференциальных функций распределения;

г) кумулятивные кривые, построенные по накопленной частоте (статистической вероятности) появления результатов измерений. На этой же координатной плоскости (для сравнения) следует построить кривые теоретических интегральных функций распределения (по группам).

Список использованных источников

1. Кузнецов В.А., Ялунина Г.В. Метрология (теоретические, прикладные и законодательные основы): Учебное пособие – М.: ИПК Изд-во стандартов, 1998. – 336 с.
2. Никипорец Э.Н., Парамонова Л.А., Черновский Н.М. Сборник задач по взаимозаменяемости и метрологическому обеспечению в авиационной технике: Учебное пособие – М.: Изд-во МАИ, 1990. – 108 с.
3. Третьяк Л.Н. Обработка прямых измерений с многократными наблюдениями: Учебное пособие – Оренбург: ИПК ОГУ, 2002. – 60 с.
4. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология. Карманная энциклопедия студента: Учебное пособие – М.: Логос, 2001. – 376 с.
5. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Учебное пособие для вузов – М.: Логос, 2001. – 408 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятности: Учебник для вузов – М.: Наука, 1989. – 564 с.
7. Брянский Л.Н., Дойников А.С. Краткий справочник метролога – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 79 с.
8. Метрологическое обеспечение и эксплуатация измерительной техники /Под ред. Кузнецова В.А. – М.: Радио и связь, 1990. – 207 с.
9. РМГ 29–99. Рекомендации по межгосударственной стандартизации ГСИ. Метрология. Основные термины и определения (взамен ГОСТ 16263–70) – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2000. – 46 с.
10. Маркин Н.С. Практикум по метрологии: Учебное пособие – М.: Изд-во стандартов, 1994. – 188 с.
11. Третьяк Л.Н., Канюков В.Н. Пакет прикладных программ Математическая обработка результатов многократных измерений. Зарегистрирован в ФАП ОГУ, 9.06.2000, Рег. Номер 6-2000.
12. ГОСТ 8.207-76 ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения М.: Изд-во стандартов, 1977 – 10 с.
13. Нормативные документы в области метрологии (действующие в России по состоянию на 1 января 2001 г.) Указатель. /Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы (ВНИИМС) - М.: ТОО “ТОТ”, 1998. – 102 с.
14. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 247 с.
15. Селиванов М.Н., Фридман А.Э., Кудряшова Ж.Ф. Качество измерений. – Л.: Лениздат, 1987. – 295 с.
16. МИ 199-79. Методика установления вида математической модели распределения погрешностей. – М.: Изд-во стандартов, 1980 – 32 с.
17. Метрология и электрорадиоизмерения в телекоммуникационных системах: Учебник для вузов /Нефедов В.И., Хахин В.И., Федорова Е.В. и др.; Под ред. Нефедова В.И. – М.: Высш. Шк., 2001. – 383 с.: ил.

18. МИ 1317-86. ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроля их параметров. – М.: Изд-во стандартов, 1986. – 29 с.

19. МИ 2083-90. ГСИ. Рекомендация. Измерения косвенные. Определения результатов измерений и оценивание их погрешностей. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 9 с.

20. Юнкеров В.И., Григорьев С.Г. Математико-статистическая обработка данных медицинских исследований. – Спб.: ВМедА, 2002. – 266 с.

21. ГОСТ Р ИСО 5725-1-2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 1. Основные положения и определения. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2002 – 23 с.

22. Гусев К.И. и др. Метрологическое обеспечение, взаимозаменяемость, стандартизация: Учебное пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов. – М.: Машиностроение, 1992. – 384 с.

23. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – Изд. 7-е, стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 479 с.

24. Кудряшев Л.С., Гуринович Г.В., Рензеева Т.В. Стандартизация, метрология, сертификация в пищевой промышленности: Учебник. – М.: ДеЛи принт, 2002. – 303 с.

Приложение А

(справочное)

Виды распределений, используемые в вариантах курсовой работы

Таблица А.1 – Виды распределений

Распределение	Область значений	Плотность вероятности	Ограничения на параметры
Нормальное	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < m < \infty$ $0 < \sigma < \infty$
Функция ошибок	$-\infty < x < \infty$	$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 x^2)$	$0 < h < \infty$
Коши	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\pi \cdot \beta} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$
Показательное	$\alpha \leq x < \infty$	$\frac{1}{\beta} \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$
Лапласа	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{2\beta} \exp\left[-\left \frac{x-\alpha}{\beta}\right \right]$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$
Пирсона III типа	$\alpha \leq x < \infty$	$\frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot y^{p-1} \exp(-y);$ $y = \frac{x-\alpha}{\beta}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$ $0 < p < \infty$
Гамма-распределение	$0 \leq x < \infty$	$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot x^{p-1} \cdot \exp(-x)$	$0 < p < \infty$
Бета-распределение	$0 \leq x < \infty$	$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$	$1 \leq \alpha \leq \infty$ $1 \leq \beta \leq \infty$
Прямоугольное (равномерное)	$m - \frac{h}{2} \leq x \leq m + \frac{h}{2}$	$\frac{1}{h}$	$\frac{n}{2} - \infty < m < \infty$ $0 < h < \infty$
Треугольное	$-\alpha \leq x \leq \alpha$	$\frac{\alpha - x }{\alpha^2}$	$0 < \alpha < \infty$
Парето	$X > X_0$	$\frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}$	$0 < x_0 < \infty$ $0 < \alpha < \infty$
Арсинусоидальное	$-\alpha < x < \alpha$	$\frac{1}{\pi a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$	$0 < \alpha < \infty$

Приложение Б (обязательное)

Массивы данных для вариантов курсовой работы

Массивы данных (матрицы X_i) приведены для максимального объема выборки $n = 240$. Для меньшего объема выборки массив данных формируется из приведенных матриц следующим образом. При $n \in [220; 120]$

- количество вычеркиваемых столбцов $k = \frac{(240 - n)}{20}$, при этом вычеркиваются последовательно столбцы с номерами, равными последней, предпоследней, третьей от конца цифре шифра студента и (или) соседние свободные.

При $n \in [60; 100]$ сохраняется количество столбцов $k = \frac{n}{20}$ с номерами, равными трем последним цифрам шифра студента, и (или) соседние свободные.

Таблица Б.1 – Массив данных X_1

X_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	16	6	4	15	14	5	18	2	3	9	14
2	7	13	4	6	12	11	7	9	6	4	9	14
3	7	14	4	3	12	16	7	9	4	7	9	2
4	9	12	8	6	13	10	14	15	7	9	11	4
5	9	11	8	4	14	10	13	11	7	9	11	4
6	4	11	11	8	13	6	12	11	9	5	12	6
7	5	10	12	8	11	6	12	13	9	8	14	7
8	8	10	9	11	4	13	11	12	7	6	16	7
9	6	5	7	11	5	15	11	14	7	6	16	8
10	8	6	13	10	2	12	5	7	8	10	6	12
11	10	8	14	12	6	12	6	7	10	12	7	13
12	2	12	11	10	7	9	8	2	10	14	7	8
13	11	16	11	9	8	11	9	12	13	7	10	7
14	12	9	10	11	8	8	9	10	13	11	10	11
15	10	9	10	13	12	5	11	10	14	11	12	11
16	10	7	15	13	9	10	9	8	10	11	13	10
17	17	3	18	9	8	4	3	8	11	13	4	9
18	15	5	12	10	9	3	9	6	11	15	4	9
19	13	9	10	16	10	7	10	4	15	10	8	9
20	12	6	10	14	10	9	14	8	16	10	3	10

Таблица Б.2 – Массив данных X_2

X_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	10,10	10,45	11,90	10,65	10,75	10,45	10,00	12,10	10,45	10,15	10,00	11,80
2	10,15	10,35	12,35	10,20	10,85	10,50	10,70	11,05	11,15	10,05	10,10	11,40
3	10,25	10,95	12,20	11,10	10,65	10,75	10,10	10,50	11,40	11,20	10,20	10,60
4	10,00	11,20	11,85	11,18	10,85	10,50	10,30	10,05	11,00	10,40	10,30	10,70
5	10,15	10,75	11,95	11,50	10,55	11,55	10,05	10,40	12,00	10,65	10,40	10,10
6	10,10	10,75	11,75	11,55	12,60	10,60	10,00	10,00	11,30	10,95	11,70	10,10
7	10,10	11,00	11,80	10,15	11,25	10,65	10,20	10,50	10,70	10,80	11,20	10,30
8	10,15	10,85	11,95	11,80	10,65	10,30	10,45	10,35	11,20	10,45	10,80	10,30
9	10,10	11,00	11,75	12,00	10,85	10,50	10,20	10,90	10,75	10,75	10,30	10,70
10	10,20	11,10	12,55	11,50	10,75	10,35	11,00	10,25	10,20	10,40	10,00	10,70
11	10,20	11,40	11,95	10,30	10,25	10,30	10,85	10,10	10,10	10,90	10,80	10,90
12	10,30	11,10	12,20	10,80	10,70	11,40	10,35	10,70	12,50	10,90	10,80	11,20
13	11,10	11,10	11,35	10,10	10,45	11,70	11,15	10,75	10,05	10,20	10,60	11,30
14	10,10	11,13	11,85	10,65	10,05	10,90	11,15	10,35	10,30	10,05	10,50	10,50
15	10,50	11,16	12,15	10,80	10,40	11,30	10,75	10,70	10,45	10,35	11,40	12,50
16	10,45	11,45	13,00	11,35	10,55	11,25	11,15	10,45	10,60	11,05	11,40	10,20
17	10,05	11,90	12,10	11,20	10,10	10,85	11,00	10,10	10,95	10,55	11,30	10,40
18	10,35	11,40	11,35	11,70	10,40	11,20	10,95	11,10	11,25	10,60	11,60	11,20
19	10,80	11,80	11,15	11,05	10,65	10,60	10,70	10,40	11,90	10,65	11,70	10,60
20	10,50	11,90	11,00	11,45	10,50	10,85	10,50	10,90	11,30	10,80	12,30	11,70

Таблица Б.3 – Массив данных X_3

X_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5,3	14,8	5,2	11,2	7,5	9,3	7,8	13,7	6,1	8,8	5,0	5,1
2	5,7	14,2	6,8	11,5	7,4	0,1	10,4	13,4	8,2	9,9	6,0	5,2
3	6,4	7,3	6,7	13,6	10,8	8,5	5,4	14,8	9,2	11,9	6,0	13,4
4	6,6	6,8	8,3	14,8	12,4	8,6	5,4	11,3	9,4	13,9	7,0	14,9
5	7,2	12,1	8,5	14,7	5,6	10,4	6,3	11,2	13,5	9,3	7,0	14,8
6	7,8	13,5	10,8	6,7	8,0	10,2	9,7	12,5	13,7	5,7	8,0	11,4
7	10,4	13,5	12,2	7,5	9,0	5,7	6,3	11,1	8,8	6,9	8,0	11,5
8	11,3	11,8	7,1	5,1	3,4	5,7	10,2	12,6	5,4	14,5	9,0	10,5
9	12,0	10,4	7,9	5,2	10,9	14,2	11,7	8,5	12,2	15,0	9,2	10,4
10	8,1	10,6	5,5	9,3	6,7	14,3	12,2	7,6	10,4	5,7	10,0	9,4
11	8,5	7,5	14,2	6,7	13,1	7,2	8,6	8,4	10,5	6,8	10,0	9,5
12	9,5	5,6	14,7	12,4	11,1	7,8	8,6	6,2	14,1	7,4	11,0	6,3
13	13,2	5,4	9,6	12,3	11,2	6,2	7,9	14,4	11,7	8,7	11,0	8,5
14	14,0	6,2	9,7	13,5	5,5	6,5	11,8	10,8	11,4	7,4	12,0	8,5
15	15,0	8,7	10,5	9,4	6,9	11,7	13,3	5,1	12,7	13,7	12,0	7,4
16	13,8	8,8	11,2	9,4	14,4	11,8	12,4	5,1	14,9	12,3	13,0	7,9
17	8,9	12,2	11,1	10,6	14,6	12,2	8,2	6,2	7,3	12,8	13,0	6,3
18	10,6	11,4	13,5	7,6	9,6	12,8	14,3	9,6	6,1	10,4	14,0	12,5
19	11,7	9,5	13,4	10,8	12,5	13,1	14,7	7,6	5,2	10,7	14,5	12,6
20	13,0	10,5	12,7	8,9	13,8	13,3	13,5	9,3	7,3	11,1	15,0	13,6

Таблица Б.4 – Массив данных X_4

X_4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5,000	5,130	5,200	5,420	5,300	5,050	6,200	5,200	5,090	7,250	5,240	5,040
2	5,300	5,620	5,180	5,570	5,420	5,220	6,380	5,280	5,120	6,900	5,480	5,625
3	5,375	5,550	5,400	5,160	5,125	5,380	5,740	5,370	5,125	5,700	5,390	5,570
4	5,625	5,370	5,470	5,120	5,570	5,380	5,800	5,420	5,125	6,400	5,120	5,680
5	5,700	5,290	5,540	5,140	5,100	5,300	6,050	5,700	5,130	6,200	5,120	5,790
6	6,125	5,650	5,720	5,620	5,120	5,400	6,680	5,850	5,270	6,100	5,540	6,125
7	6,620	5,120	5,280	5,690	5,200	5,130	5,400	5,760	5,380	5,960	6,090	6,230
8	7,120	5,880	5,100	5,390	5,740	5,150	5,350	5,550	5,40	5,770	6,360	5,270
9	5,125	5,900	5,150	5,260	5,630	5,120	5,600	6,110	5,490	5,720	6,625	5,280
10	5,100	6,400	5,790	6,450	5,860	5,600	5,520	6,160	5,580	5,620	6,875	5,400
11	5,400	5,125	5,630	5,110	5,940	5,620	5,440	5,650	5,630	5,520	5,600	5,875
12	5,580	5,115	6,300	5,190	5,120	5,620	5,240	5,340	5,690	5,470	5,640	5,080
13	5,80	6,900	5,120	5,760	6,150	5,870	5,260	6,340	5,880	5,390	5,420	5,125
14	6,375	6,130	5,380	6,170	6,390	5,870	5,100	6,640	5,890	5,360	5,060	6,375
15	5,880	5,200	5,950	6,700	6,180	6,350	5,180	5,080	6,080	5,290	5,140	6,600
16	6,150	5,400	6,120	6,950	6,890	6,600	5,220	5,120	6,140	5,220	5,350	5,240
17	5,875	6,580	6,130	5,890	7,400	6,870	5,120	5,190	6,320	5,230	5,840	6,700
18	5,130	7,380	6,620	6,100	5,270	6,120	5,900	6,840	6,580	5,125	5,920	5,240
19	5,120	6,400	6,850	6,280	5,260	6,140	7,300	5,140	6,780	5,120	6,150	5,375
20	5,360	5,450	7,450	7,140	6,650	7,150	6,860	7,100	7,500	5,110	7,375	7,125

Таблица Б.5 – Массив данных X_5

X_5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-4,5	0,2	3,6	-3,4	-0,7	4,4	-4,6	2,3	-3,2	3,1	-3,1	-2,0
2	-2,5	0,6	2,8	-2,4	-0,7	3,9	-3,5	2,7	-2,8	4,2	-2,2	-3,0
3	-2,4	0,7	2,4	-2,6	0,2	-2,2	-2,7	3,2	-2,4	2,2	-2,4	-2,0
4	-1,3	0,9	-0,4	0,1	0,3	-1,9	-1,2	4,9	-1,2	2,9	-5,0	-1,5
5	-1,7	1,4	0,2	0,4	-2,8	-0,6	-1,5	-1,8	-1,4	1,3	0,2	-1,0
6	-0,5	1,6	0,3	0,7	-2,3	0,2	-1,7	-1,4	-4,2	1,3	0,3	-0,5
7	0,0	1,9	0,8	-1,4	-3,2	-1,7	-1,0	-1,6	-0,8	1,9	0,6	0,5
8	-0,6	2,3	-0,9	-1,5	-4,2	-1,1	-2,4	-2,5	-0,6	0,1	-0,3	0,8
9	-0,7	2,7	-0,6	-1,6	0,8	-2,9	-0,5	-2,6	-0,6	0,3	-0,2	0,9
10	-1,5	3,4	-0,5	-0,8	1,3	-3,7	-0,8	-0,7	-0,2	0,8	1,5	-0,1
11	0,5	4,6	1,3	1,5	1,2	0,0	-0,9	-3,3	-1,5	-3,3	1,6	0,5
12	0,6	-2,3	1,7	2,4	1,8	0,4	0,9	-0,4	0,7	-2,6	1,6	-0,9
13	0,8	-2,6	1,7	2,6	-1,7	0,7	1,5	-0,4	1,2	-2,5	2,3	-3,5
14	-3,5	-1,4	-4,8	3,0	-1,6	-0,8	1,6	0,2	1,4	-1,8	2,5	1,4
15	1,2	-1,6	-3,8	-0,6	-1,8	-0,8	1,6	0,4	1,4	-1,7	3,9	1,8
16	1,5	-1,8	-2,7	-0,1	-0,6	1,4	0,4	0,6	2,6	-1,6	-0,4	1,8
17	1,8	-3,6	-2,2	1,4	-0,4	1,7	0,6	1,1	2,6	-0,7	-0,6	2,1
18	2,5	-0,2	-1,8	1,6	2,2	1,9	2,6	1,8	0,2	-0,7	-1,2	2,9
19	2,6	-0,4	-1,5	0,4	2,9	2,4	2,8	1,8	0,4	-0,4	-1,6	3,5
20	3,5	-0,8	-1,2	5,0	3,7	2,7	4,0	0,6	3,7	0,6	-1,7	4,5

Таблица Б.6 – Массив данных X_6

X_6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-0,80	2,80	-1,00	-0,15	-0,55	0,30	2,85	-0,75	0,44	-0,30	0,24	0,82
2	-0,40	2,50	-0,10	0,15	0,60	0,30	2,48	1,86	0,48	-0,10	0,38	0,84
3	0,00	1,50	0,10	0,35	0,80	0,40	-0,40	2,08	0,52	0,00	0,42	0,72
4	0,10	1,60	0,30	0,45	0,80	0,70	0,00	-0,55	0,64	-1,00	1,22	0,90
5	0,40	0,70	0,50	-0,45	0,90	0,70	0,05	-0,10	0,80	0,36	1,29	0,36
6	0,40	0,80	1,95	0,65	0,30	-0,18	0,45	-0,15	0,80	0,24	1,34	0,44
7	0,80	-0,50	2,05	0,70	0,00	0,16	0,45	0,68	0,94	0,62	1,42	-0,18
8	0,80	-0,10	2,30	0,80	1,10	-0,48	0,85	0,92	1,10	0,72	1,74	0,16
9	0,90	0,00	1,65	0,85	1,20	1,70	0,85	2,44	1,20	0,76	0,66	-0,52
10	0,90	0,30	1,75	-0,70	1,20	1,78	0,90	1,44	1,20	0,87	-0,06	1,45
11	1,20	0,40	1,42	1,18	1,20	1,34	0,90	1,65	1,28	1,10	0,08	1,62
12	1,20	0,50	0,75	1,20	1,60	1,90	1,05	1,76	-0,18	1,20	0,86	1,64
13	1,10	0,85	-0,30	1,27	1,60	2,10	1,20	0,46	0,08	1,24	0,80	1,82
14	1,30	0,90	0,80	1,32	1,80	1,15	1,88	0,57	1,60	1,36	0,94	2,04
15	1,50	1,10	0,90	1,98	-0,10	1,15	2,06	0,65	1,60	1,52	-0,44	2,56
16	1,60	1,20	0,90	2,15	1,90	1,20	1,62	0,84	-0,35	1,85	1,94	1,36
17	1,70	2,10	1,25	1,75	2,00	0,80	1,54	10,8	1,92	2,06	2,17	1,32
18	2,00	1,90	1,25	2,45	2,35	0,80	1,44	1,26	2,05	1,63	2,52	1,24
19	2,00	1,30	1,15	1,55	0,40	2,55	1,25	1,38	2,52	1,66	2,84	1,12
20	2,40	1,30	1,35	1,65	3,00	-0,85	1,35	1,24	3,00	2,42	1,16	-0,82

Таблица Б.7 – Массив данных X_7

X_7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-0,40	-0,10	-0,10	0,00	-0,44	2,98	-0,42	-0,49	2,40	-0,50	0,35	-0,45
2	0,00	0,15	-0,30	0,10	-0,15	2,28	-0,18	0,02	2,50	-0,10	0,45	0,00
3	0,10	0,30	-0,15	0,36	-0,05	2,56	0,09	-0,10	2,00	0,12	-1,00	0,11
4	0,40	0,65	0,05	0,45	0,38	1,86	0,27	0,24	2,10	0,32	-0,30	0,36
5	0,50	0,70	0,35	0,48	0,45	2,00	0,48	0,41	1,60	0,40	-0,15	0,40
6	0,80	0,90	0,45	0,90	0,72	2,18	0,68	0,59	1,70	0,52	0,05	0,48
7	0,85	0,55	0,70	0,40	0,82	1,48	0,78	0,65	1,50	0,64	1,20	0,70
8	0,75	1,25	0,80	1,18	0,94	1,76	0,98	0,82	2,65	0,70	1,18	0,90
9	1,10	1,35	0,80	1,28	1,05	1,08	1,07	1,11	2,80	0,90	1,34	1,00
10	1,20	-0,50	1,18	0,70	1,20	1,16	1,22	1,21	1,10	1,15	0,70	1,18
11	1,30	1,15	1,20	1,52	1,36	1,34	1,38	1,31	1,20	1,25	0,80	1,28
12	1,60	1,55	1,34	1,64	1,54	0,80	1,49	1,40	1,30	1,35	0,80	1,52
13	1,70	1,90	1,68	1,75	1,66	0,64	1,69	1,43	0,75	1,56	2,42	1,64
14	1,50	2,00	1,72	2,05	1,78	0,96	1,74	1,68	0,80	1,65	2,54	1,75
15	2,10	2,10	1,95	2,08	2,01	0,25	1,91	1,83	0,85	1,90	1,68	2,05
16	2,00	1,65	2,15	2,33	2,12	0,42	2,19	2,01	-0,40	2,00	1,72	2,08
17	2,40	2,35	2,42	2,48	2,32	0,58	2,37	2,19	0,00	2,10	1,95	2,10
18	2,50	2,45	2,54	2,85	2,46	-0,18	2,49	2,3	0,10	2,35	2,15	2,35
19	2,65	3,00	2,70	2,10	2,72	0,16	2,75	2,41	0,40	2,45	2,70	2,95
20	2,80	0,40	2,90	1,00	2,88	-0,38	2,88	2,82	0,50	3,00	2,90	2,48

Таблица Б.8 – Массив данных X_8

X_8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	20,10	20,25	20,66	20,83	20,48	21,65	20,62	20,27	20,44	21,89	20,14	20,27
2	20,30	20,35	20,78	20,92	20,52	21,75	20,78	20,33	20,56	21,96	20,29	20,34
3	20,48	20,50	20,86	20,32	20,96	21,84	20,86	20,46	20,71	21,69	21,88	20,46
4	20,52	20,56	20,93	20,34	20,71	21,96	20,93	20,54	20,69	21,71	21,92	20,54
5	20,70	20,65	20,96	20,46	20,88	21,12	20,97	20,64	20,88	21,46	21,68	20,64
6	20,72	20,71	21,08	20,54	20,90	21,04	20,10	20,72	20,90	21,54	21,72	20,74
7	20,89	20,75	21,17	20,64	20,92	21,06	20,24	20,76	20,92	21,10	21,49	20,76
8	20,90	21,10	20,45	20,74	21,10	21,24	20,45	20,88	21,09	20,04	21,51	20,83
9	20,91	20,15	20,58	20,76	21,14	21,37	20,58	20,92	21,11	21,16	21,26	20,92
10	21,11	21,05	20,08	21,06	20,30	21,48	21,08	21,04	20,05	21,28	21,34	21,06
11	21,12	21,45	20,28	21,11	20,12	21,52	21,17	21,10	20,29	21,32	21,38	21,11
12	21,28	21,55	21,26	21,16	21,30	20,84	21,26	21,17	21,25	20,87	21,08	21,16
13	21,30	21,65	21,34	21,24	21,45	20,96	21,34	21,24	21,30	20,93	21,17	21,24
14	21,32	21,75	21,38	21,36	21,50	20,23	21,38	21,36	21,35	20,22	20,86	21,36
15	21,48	21,85	21,49	21,44	21,55	20,37	21,89	21,42	21,87	20,38	20,93	21,44
16	21,50	21,95	21,58	21,56	21,26	20,42	21,99	21,59	21,69	20,5	20,96	21,56
17	21,52	21,25	21,68	21,72	21,34	20,58	21,67	21,62	21,71	20,51	20,66	21,66
18	21,70	21,35	21,78	21,86	21,68	20,66	21,79	21,78	21,43	20,61	20,78	21,72
19	21,70	20,85	21,88	21,66	21,73	20,72	21,49	21,85	21,50	20,70	20,45	21,82
20	21,90	20,95	21,96	21,94	21,93	20,77	21,58	21,95	21,57	20,79	20,55	21,98

Таблица Б.9 – Массив данных X_9

X_9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,05	0,73	0,53	0,14	0,85	0,13	0,04	0,11	1,00	0,12	0,05	0,13
2	0,15	0,74	0,56	0,16	0,85	0,17	0,16	0,19	0,58	0,18	0,16	0,17
3	0,25	0,78	0,56	0,23	0,75	0,17	0,16	0,19	0,85	0,18	0,16	0,17
4	0,25	0,63	0,33	0,27	0,75	0,25	0,94	0,27	0,75	0,26	0,28	0,27
5	0,35	0,66	0,35	0,74	0,95	0,26	0,22	0,34	0,75	0,27	0,33	0,34
6	0,34	0,67	0,37	0,76	0,65	0,34	0,28	0,34	0,65	0,32	0,35	0,33
7	0,36	0,52	0,22	0,84	0,65	0,36	0,33	0,37	0,65	0,38	0,37	0,38
8	0,45	0,54	0,28	0,86	0,55	0,41	0,35	0,43	0,55	0,44	0,42	0,43
9	0,45	0,59	0,62	0,54	0,55	0,45	0,37	0,45	0,55	0,45	0,44	0,45
10	0,45	0,12	0,64	0,55	0,55	0,54	0,42	0,47	0,55	0,46	0,48	0,47
11	0,55	0,18	0,69	0,56	0,35	0,49	0,44	0,54	0,45	0,52	0,53	0,54
12	0,55	0,24	0,73	0,43	0,34	0,53	0,48	0,55	0,45	0,54	0,56	0,55
13	0,65	0,26	0,77	0,45	0,36	0,58	0,53	0,56	0,45	0,59	0,56	0,56
14	0,65	0,27	0,42	0,47	0,25	0,62	0,56	0,64	0,35	0,63	0,62	0,64
15	0,75	0,32	0,44	0,34	0,25	0,65	0,56	0,65	0,34	0,65	0,64	0,65
16	0,75	0,38	0,48	0,34	0,45	0,68	0,62	0,66	0,36	0,67	0,69	0,66
17	0,85	0,44	0,04	0,37	0,45	0,72	0,64	0,74	0,25	0,73	0,72	0,74
18	0,85	0,45	0,16	0,64	0,45	0,75	0,69	0,76	0,25	0,78	0,77	0,76
19	0,95	0,46	0,82	0,65	0,15	0,78	0,73	0,84	0,15	0,74	0,82	0,84
20	0,55	0,88	0,96	0,66	0,05	0,87	0,77	0,86	0,0	0,88	0,95	0,86

Таблица Б.10 – Массив данных X_{10}

X_{10}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	93,05	94,45	93,24	93,44	94,90	93,80	93,20	94,92	93,06	93,13	93,02	93,04
2	93,10	94,55	93,30	93,50	94,70	93,10	93,09	94,75	93,10	93,14	93,09	93,10
3	93,15	94,30	93,36	93,56	94,50	93,12	93,11	94,48	93,10	93,08	93,11	93,16
4	93,10	94,65	93,46	93,26	94,10	93,14	93,18	94,32	93,14	93,10	93,18	93,12
5	93,25	94,95	93,54	93,31	94,25	93,28	93,24	94,02	93,25	93,28	93,24	93,26
6	93,30	94,05	93,50	93,36	94,35	93,30	93,30	94,18	93,30	93,31	93,30	93,31
7	93,35	94,15	93,64	93,00	93,90	93,32	93,36	93,87	93,35	93,32	93,36	93,37
8	93,50	93,08	93,76	93,10	93,90	93,45	93,46	93,91	93,65	93,45	93,46	93,44
9	93,50	93,10	93,92	93,12	93,65	93,55	93,54	93,62	93,70	93,55	93,54	93,50
10	93,65	93,12	94,08	93,18	93,70	93,66	93,50	93,78	93,75	93,66	93,50	93,56
11	93,70	93,14	94,12	93,62	93,75	93,74	93,64	93,44	93,90	93,74	93,64	93,62
12	93,75	93,28	94,27	93,78	93,50	93,85	93,76	93,50	93,90	93,85	93,76	93,78
13	93,90	93,30	94,33	93,87	93,50	93,95	93,92	93,56	94,10	93,95	93,92	93,87
14	93,90	93,32	94,52	93,91	93,25	94,05	94,08	93,26	94,25	94,05	94,08	93,94
15	94,10	93,45	94,69	94,02	93,30	94,15	94,12	93,31	94,35	94,15	94,12	94,03
16	94,25	93,55	94,85	94,18	93,35	94,30	94,27	93,36	94,50	94,30	94,27	94,17
17	94,35	93,66	93,02	94,31	93,05	94,45	94,33	93,04	94,70	94,45	94,33	94,31
18	94,50	93,74	93,09	94,48	93,10	94,55	94,52	93,10	94,90	94,55	94,52	94,48
19	94,70	93,85	93,11	94,75	93,15	94,65	94,69	93,12	93,50	94,65	94,69	94,75
20	94,90	93,95	93,18	94,91	93,10	95,00	94,84	93,18	93,50	94,95	94,85	94,91

Приложение В (справочное)

Функция распределения Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} \cdot dt.$$

Таблица В.1 – Значения функции распределения Лапласа

t	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
-3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00020	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
-3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00033	0,00034
-3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
-3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
-3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
-3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
-2,9	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0017	0,0018	0,0019
-2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
-2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
-2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
-2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
-2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
-2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
-2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
-2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
-2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
-1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
-1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
-1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
-1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
-1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
-1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
-1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
-1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1057	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
-1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
-1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
t	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
-0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
-0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
-0,7	0,2148	0,2177	0,2207	0,2236	0,2266	0,2297	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
-0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
-0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
-0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
-0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
-0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
-0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
-0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,500

Продолжение таблицы В.1

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8156	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8965	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9382	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9374	0,9664	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9931	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99916	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Приложение Г (справочное)

Дифференциальная функция нормированного нормального

$$\text{распределения } P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t = \frac{|x_i - \bar{x}|}{\sigma}.$$

Таблица Г.1 – Значения функции нормированного нормального распределения

<i>t</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	<i>t</i>
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9

Продолжение таблицы Г.1

<i>t</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	<i>t</i>
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	02^3	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0056	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9

Приложение Д (справочное)

Значения критерия Фишера-Снедекора

Таблица Д.1 – Критерий Фишера для различных уровней значимости

k_2	F_q при k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	∞
$q = 0,05$										
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,50
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,63
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,67
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	2,93
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,54
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,30
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,13
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	1,92
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,62
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,00
$q = 0,01$										
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,50
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,46
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	6,88
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	4,86
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	3,91
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,36
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,00
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	2,75
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,20	2,57
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,42
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,66	2,01
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,00

Примечание:

В таблице:

k_1 – число степеней свободы большей дисперсии;

k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии.

Приложение Е (справочное)

**Значения коэффициентов Z_1^2 , Z_2^2 , определяющих
величину доверительного интервала оценки дисперсии**

$$Z_1^2 \cdot S^2(y) \leq \sigma \leq Z_2^2 \cdot S^2(y); \quad Z_1 \cdot S(y) \leq \sigma \leq Z_2 \cdot S(y)$$

Таблица Е.1

Число степеней свободы	Уровень значимости q			
	0,05		0,01	
	Z_1^2	Z_2^2	Z_1^2	Z_2^2
1	0,199	1018	0,127	25464
2	0,271	39,5	0,189	199
3	0,321	13,9	0,234	41,8
4	0,359	8,26	0,269	19,3
5	0,390	6,02	0,299	12,1
6	0,415	4,85	0,324	8,88
7	0,437	4,14	0,345	7,08
8	0,456	3,67	0,364	5,95
9	0,473	3,33	0,382	5,19
10	0,488	3,08	0,397	4,64
11	0,437	2,88	0,411	4,23
12	0,512	2,72	0,424	3,90
13	0,526	2,60	0,436	3,65
14	0,536	2,49	0,447	3,44
15	0,546	2,40	0,457	3,26
16	0,555	2,32	0,467	3,11
17	0,563	2,25	0,476	2,98

Приложение Ж (справочное)

Мера расхождения Пирсона

Таблица Ж.1 – Значения χ^2_α , удовлетворяющие условию $P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha$

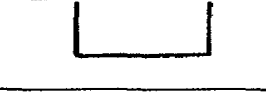
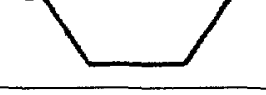
r	p														
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83	
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82	
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27	
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46	
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5	
6	0,872	1,134	1,645	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5	
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3	
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1	
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9	
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6	
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3	
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9	
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6	
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1	
15	5,23	5,98	7,25	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7	
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3	
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8	
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3	
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8	
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3	

Приложение 3

(справочное)

Критериальные значения характеристик распределения

Таблица 3.1 – Характеристики распределения

Вид распределения. Параметры распределения												
Показатель формы α	2	1,5	1	0,75	>10	10 ÷ 4	~3	–	1 ÷ 10	~1		
Контр-эксцесс γ	0,68	0,577	0,51	0,408	0,32	0,74 ÷ 0,645	0,645	0,816	0,1 ÷ 0,74	0,677		
Эксцесс ε	2,16	3	3,85	6	10	1,9 ÷ 2,18	2,4	1,5	6,25 ÷ 1,83	2,25		
Энтропийный коэффициент κ	1,9 (1,3 ÷ 1,9)	2,07	2,05	1,92	1,9	1,73 ÷ 2,02	2,02	1,11	1,7 ÷ 2,07	1,88		
Коэффициент асимметрии $\gamma(\omega)$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1 ÷ +1	0		
Вид распределения	Экспоненциальное плоское-вершинное	Гаусса	Экспоненциальное	Лапласа	Экспоненциальное	Трапециевидное		Симпсона	Аркасинное социальное	Двуарк- синное	Композиция арк- синусоидальных	

Приложение И

(справочное)

Проверка гипотезы с помощью W-критерия

Таблица И.1 – Значение коэффициентов a_{k-i+1} ,

i	k						
	3	4	5	6	7	8	1 9
1	0.7071	0,6872	0,6646	0.6431	0,6233	0,6052	0,5888
2		0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0.3244
3				0,0875	0,1401	0,1743	0,1976
4						0,0561	0,0947
i	k						
	10	11	12	13	14	15	16
1	0,5739	0,5601	0,5475	0.5359	0,5251	0,5150	0,5056
2	0.3291	0.3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0.3290
3	0,2141	0.2260	0.2347	0,2412	0.2460	0,2495	0,2521
4	0,1224	0.1429	0.1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939
5	0,0399	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447
6			0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005
7					0.0240	0.0433	0,0593
8							0,0196

Примечание:

k — общее количество экспериментов.

Таблица И.2 – Критические значения W-критерия

k	Уровень значимости q		
	0,01	0,02	0.05
3	0,753	0,756	0,767
4	0,687	0,707	0,748
5	0,686	0,715	0,762
6	0,713	0,743	0,788
7	0,730	0,760	0,803
8	0,749	0,778	0,818
9	0,764	0,791	0,829.
10	0,781	0,806	0,842
11	0,792	0,817	0.850
12	0,805	0,828	0,859
13	0,814	0.837	0,866
14	0,825	0,846	0,874
15	0.835	0,855	0,881
16	0,844	0,863	0,887

Приложение К

(справочное)

Проверка гипотезы с помощью критерия Кочрена

Таблица К.1 – Критические точки распределения Кочрена (f – число степеней свободы, N – количество выборок), при уровне значимости $q = 0,01$

Уровень значимости $q = 0,01$							
N	f						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	0,9933	0,9423	0,8831	0,8335	0,7933	0,7606	0,7335
4	0,9676	0,8643	0,7814	0,7212	0,6761	0,6410	0,6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	0,8828	0,7218	0,6258	0,5635	0,5195	0,4866	0,4608
7	0,8376	0,6644	0,5685	0,5080	0,4659	0,4347	0,4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	0,7544	0,5727	0,4810	0,4251	0,3870	0,3592	0,3378
10	0,7175	0,5358	0,4469	0,3934	0,3572	0,3308	0,3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	0,5747	0,4069	0,3317	0,2882	0,2593	0,2386	0,2228
20	0,4799	0,3297	0,2654	0,2288	0,2048	0,1877	0,1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	0,3632	0,2412	0,1913	0,1635	0,1454	0,1327	0,1232
40	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	0,1225	0,0759	0,0585	0,0489	0,0429	0,0387	0,0357
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Уровень значимости $q = 0,01$							
N	f						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,7107	0,6912	0,6743	0,6059	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,5897	0,5702	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,4401	0,4229	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,3911	0,3751	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,3207	0,3067	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,2945	0,2813	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	0,2104	0,2002	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,1646	0,1567	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	0,1157	0,1100	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,0334	0,0316	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица К.2 – Критические точки распределения Кочрена (f – число степеней свободы, N – количество выборок), при уровне значимости $q = 0,05$

Уровень значимости $q = 0,05$							
N	f						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Уровень значимости $q = 0,05$							
N	f						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение Л

(справочное)

Проверка гипотезы с помощью критерия Барлетта

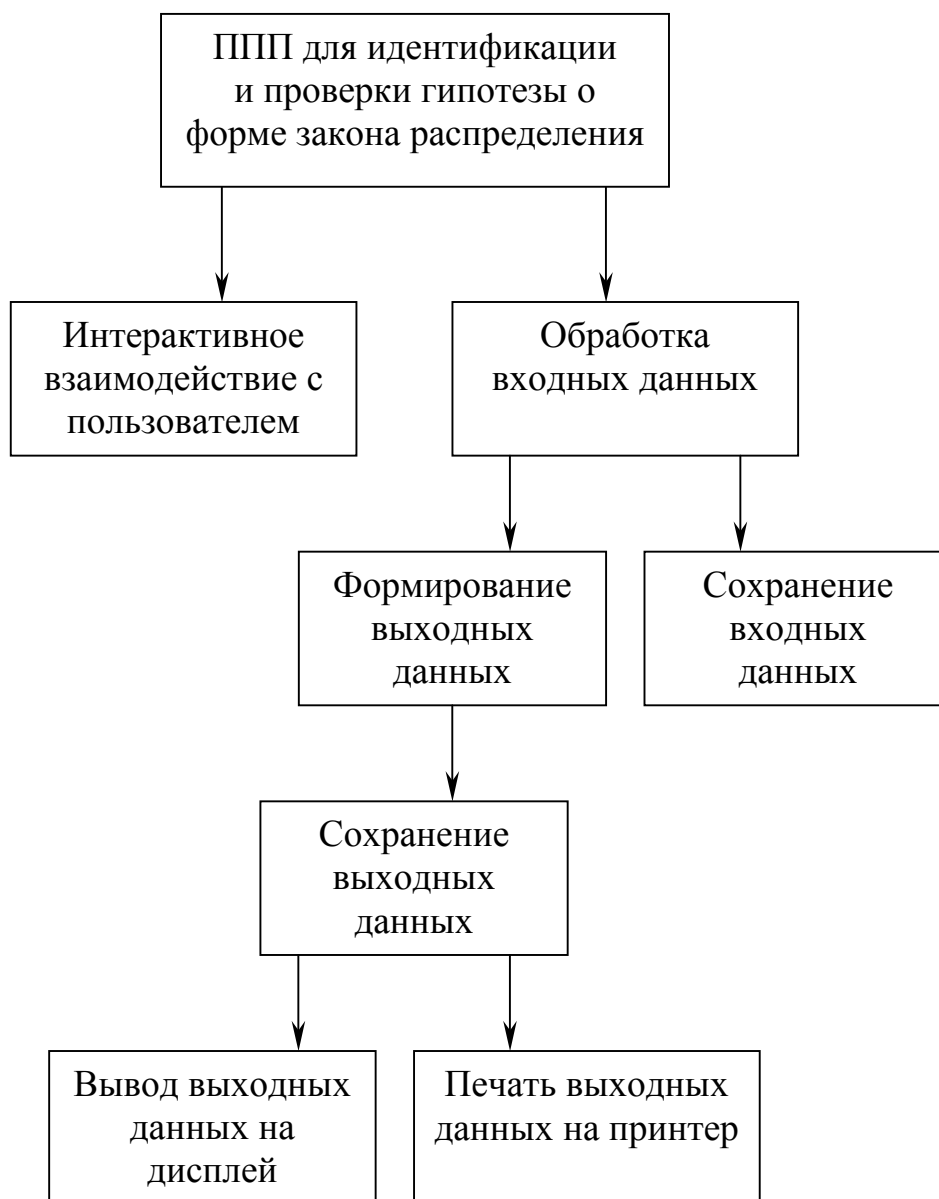
Таблица Л.1 – Значения критерия χ^2

f	Уровень значимости q		
	0,10	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6.64
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,3
4	7,78	9,49	13,3
5	9,24	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20.1
9	14,7	16,9	21,7
10	16,0	18,3	23,2
11	17.3	19.7	24,7
12	18,5	21,0	26,2
13	19,8	22,4	27,7
14	21,1	23,7	29.1
15	22,3	25,0	30.6
16	23,5	26,3	32,0
17	24,8	27.6	33,4
18	26,0	28,9	34,8
19	27,2	30,1	36,2
20	28,4	31.4	37,6
21	29,6	32,7	38,9

Приложение М

(справочное)

Структурная схема программы



Приложение Н
(справочное)

Пример оформления титульного листа курсовой работы

Министерство образования Российской Федерации
**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”**

Транспортный факультет

Кафедра метрологии, стандартизации и сертификации

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине
“Метрология, стандартизация и сертификация”

**Обработка результатов измерений
с многократными наблюдениями**

ГОУ ОГУ 072000

Руководитель работы
_____ Третьяк Л.Н.
“ _____ ” _____ 2004 г.

Исполнитель

Студент гр. 00 СС
_____ Ф.И.О.
“ _____ ” _____ 2004 г.

Оренбург, 2004

Предметный указатель

Величина физическая 5

- действительное значение 7, 9
- истинное значение 7
- случайная 61
- дискретная 61
- непрерывная 61
- измеряемая 7

Воспроизводимость 10

Граница неисключенной систематической погрешности 30

- доверительная 30,92,102

Гипотеза статистическая 42

- конкурирующая 42
- нулевая 42
- область принятия 42

Градуировочная характеристика 115,120

Группы однородных наблюдений 67,68

Достоверность измерения 10

Дисперсия 92,123

Единство измерений 11

Закон распределения 21, 31, 51, 54, 127

Значащие цифры числа 103

Измерения прямые 25,31

- косвенные 108
- многократные 28
- однократные 7, 123
- технические 12
- совместные 120

Критерий Пирсона 30, 84

- " 3σ " 49
- Бартлетта 137, 138
- вариационного размаха 47
- веса наблюдений 71
- Диксона 47

- Ирвина 45
- Колмогорова 90
- Кочрена 70,133
- Мизеса-Смирнова 30
- мощность 42
- Райта 49
- Романовского 46
- согласия 84
- составной (d – критерий) 30, 84
- Смирнова 50
- Стьюдента 69, 109,122
- Шовене 50
- Фишера 69,124,126
- Фишера-Снедекора 70
- W-критерий 131

Класс точности СИ 16

Контрэксцесс 93

Координата центра распределения 33

Коэффициент вариации 61

- асимметрии 30, 95
- веса наблюдений 71
- корреляции 108
- эксцесса 96
- энтропийный 97

Критическая совокупность значений критерия 42

- левосторонняя 43
- правосторонняя 43

Математическое ожидание 26

Медиана 33,35,36

Метрологическая аттестация 20

Моменты 94

- начальный 94
- нулевой 33
- первый начальный 33
- первый центральный 94
- центральный 94

Наблюдение при измерениях 7

Обработка результатов измерений 5

Оценки 30, 31

- второго центрального момента 95
- законов распределения 30
- истинного значения 30
- математические ожидания 31
- несмещенная 32
- первого центрального момента 39, 94
- СКО 38
- состоятельная 32
- точечная 32
- третьего центрального момента 95
- центра распределения 32
- четвертого центрального момента 96
- эффективная 32

Ошибка 42

- второго рода 42
- первого рода 42

Погрешность результата измерения 7

- абсолютная 12
- аддитивная 25
- воспроизведения единицы физической величины 23
- внешняя 18
- градуировки 24
- грубая 16, 41
- динамические 18
- дополнительная 20
- инструментальная, средства измерения 8, 23
- - вариации показаний 22
- - приведенная 20
- - систематическая 20
- - случайная 22
- квантования 24
- компонентов 20
- меры 23
- метода измерений 17
- мультипликативная 25
- округления, предельная 105
- основная 20
- относительная 14

- передачи размера единицы физической величины 24
- поверки 23
- предельная 28, 108
- при статистической обработке результатов измерений 17
- систематическая 15
- - не исключенная 99,128
- - прогрессирующая 15
- случайная 15
- статические 18
- субъективная 18
- энтропийное значение 97

Плотность распределения 62

Полигон 62

Правильность 9

Прецизионность 10

- экстремальные показатели 10

Принятое опорное значение 9

Размах 36

- центр срединного размаха 36

Регрессия парная 122,123

- множественная 126

Результат измерений 6,7,8

- наблюдения 7
- независимый 10
- многократных равноточных 97
- многократных неравноточных 97
- однократного измерения 127

Ряд результатов измерений 10

- неравнорассеянный 68

СКО 26

Среднее арифметическое 26

Средняя квадратичная погрешность 26

- коэффициента асимметрии 46,96

Сходимость результатов наблюдений 10

Точность 9

Уровень значимости 42

Число именованное 106

- неименованное 106

Функция распределения 61

- теоретическая 62

- эмпирическая 62

Эксцесс 96

Эталон 11